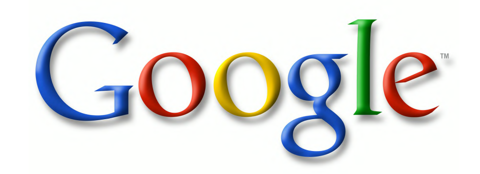
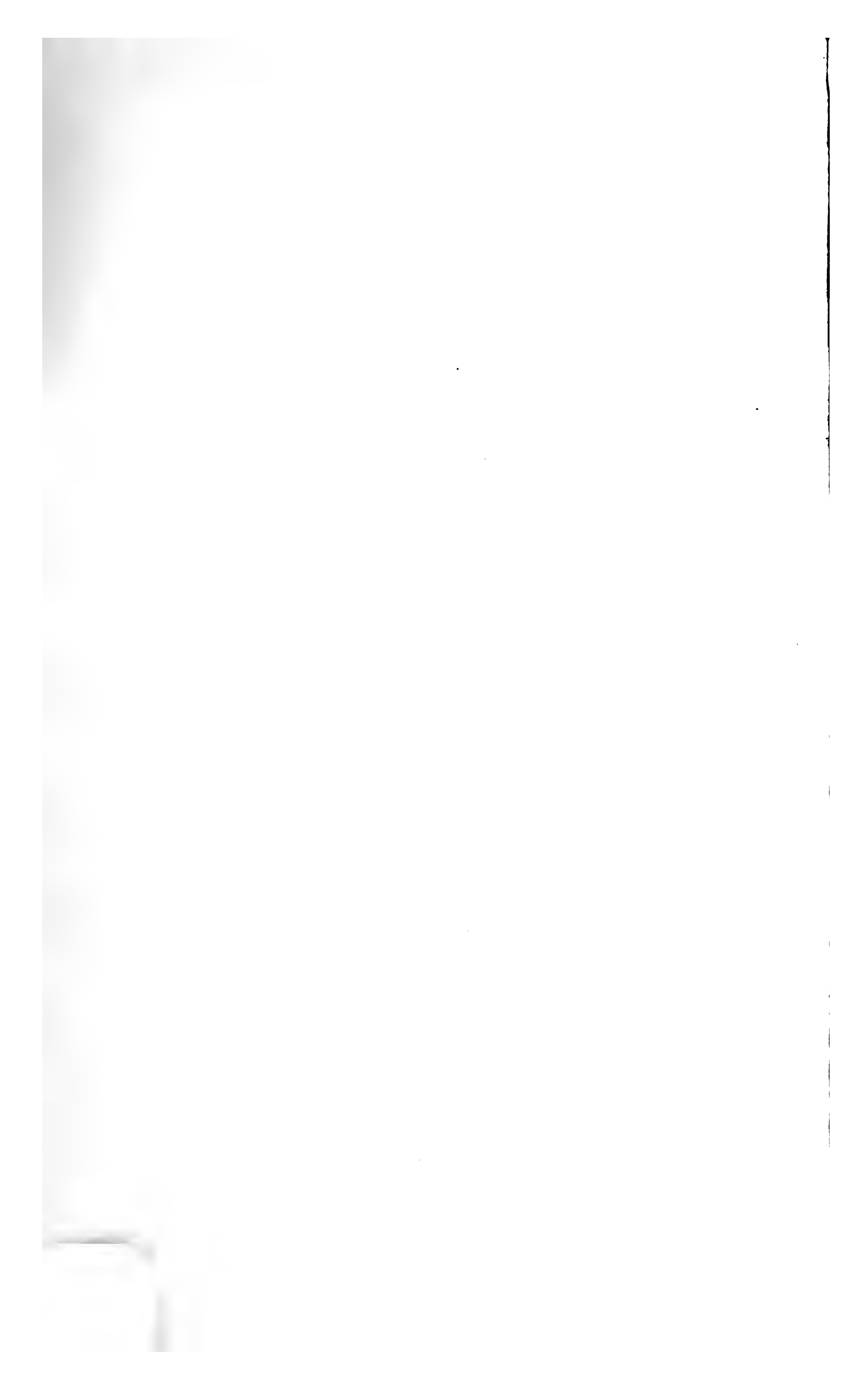






Neue

Grundmittel und Erfindungen

zur

Analysis, Algebra, Functionsrechnung

und zugehörigen Geometrie

sowie Principien zur mathematischen Reform nebst einer Anleitung zum Studiren und Lehren der Mathematik.

Von

Dr. E. Dühring und **Ulrich Dühring.**

Leipzig,
Fues's Verlag (R. Reisland).
1884.

Vorrede.

Den immer wiedergekehrten zahlreichen Anfragen gegenüber, welche sich auf das Erscheinen dieses ursprünglich früher in Aussicht gestellten Werks bezogen, mag eine Bemerkung nicht überflüssig sein. Die spätere Veröffentlichung ist im Wesentlichen die Folge einer absichtlichen Zurückhaltung gewesen. Allzubald nach dem ersten Theil der Neuen Grundgesetze zur Physik und Chemie in einem verwandten Gebiet wiederum etwas auf ungewöhnlich ernste Aufmerksamkeit Angelegtes herausgeben, hätte nach den inzwischen mit einem Theil der Gelehrtengeneration gemachten Erfahrungen sozusagen der durchschnittlichen Verdauung zuviel zumuthen heissen. Das Interesse des Publicums an einem Werk und eine entsprechende schnelle Verbreitung desselben genügen noch nicht, um sofort die volle Würdigung seines Inhalts mitsichzubringen und auf diese Weise die Gefahr gelehrter Diebstähle zu mindern. Aus einer Bemerkung am Ende des vorliegenden Buchs ist näher ersichtlich, wie grade gegen jene Schrift der Grundgesetze und vorzugsweise an dem Beitrage meines Sohnes die Verübung solcher Diebstähle im In- und Auslande bald begonnen hat. Nun werden die gutdenkenden Elemente des Publicums mir wohl zustimmen, wenn ich es für die Neuheiten und die Sache, die wir beide im vorliegenden Werk vertreten, nicht für erspriesslich hielt, damit vorzugehen, ehe nicht die Angelegenheiten jener andern Schrift für das allgemeinere Publicum zu einer reiferen Thatsache geworden wären, — welcher Fall nunmehr sichtlich eingetreten ist. Eine nähere Erläuterung der erwähnten Zurück-

haltung sowie auch Manches, was die persönlichen Erfahrungen zur Lage der Mathematik streift, findet man an verschiedenen Stellen meines Buchs „Sache, Leben und Feinde“.

Der Keim zu meiner neuen Imaginärtheorie ist schon im mechanischen Werk in der dort gegebenen Studienanleitung auf deutlich erkennbare Weise, nämlich unter Angabe des Kreis- und Hyperbelschema, vorgelegt. Der Gedanke eines Imaginativen im Unterschiede vom Imaginären gehört aber erst der ausgewachsenen Theorie des vorliegenden Werks an. Die Lehre vom Unendlichen hat auch allgemeine Ausgangspunkte, die in meinen Schriften mehr als zwei Jahrzehnte zurückreichen. Sie steht nicht minder, wie die Imaginärtheorie, allem Bisherigen entgegen, indem sie nicht nur mit dem gröbern Aberglauben bricht, sondern auch die feiner schattirten Irrgänge durch klare und durchgreifende Begriffe und Methoden ersetzt. Auch in Beziehung auf meine eignen früheren Veröffentlichungen, also in jeder Beziehung neu ist meine Werthigkeitsrechnung und was sich aus der Algebra, und zwar nicht blos im gewöhnlichen Sinne dieses Worts, sondern auch aus der Functionsalgebra weiter anschliesst. Die Werthigkeitsrechnung ist ein neues Grundmittel, wie die Differentialrechnung zu ihrer Zeit eines war. Sie kommt aber nicht erst blos als Keim zur Welt, wie dies mit der Fermatschen Methode für Maxima und Minima der Fall war, die dann erst später zu einem systematischen Algorithmus gemacht wurde; sie bietet sich vielmehr als vollständige, mit Regeln versehene und in Anwendungen verzweigte Rechnungsart dar. Freilich steckt unser Gebrauch nicht ihre Grenzen ab; denn wäre dem anders, so würde sie nicht das unbeschränkt weitertragende Mittel sein, welches wir in ihr sehen.

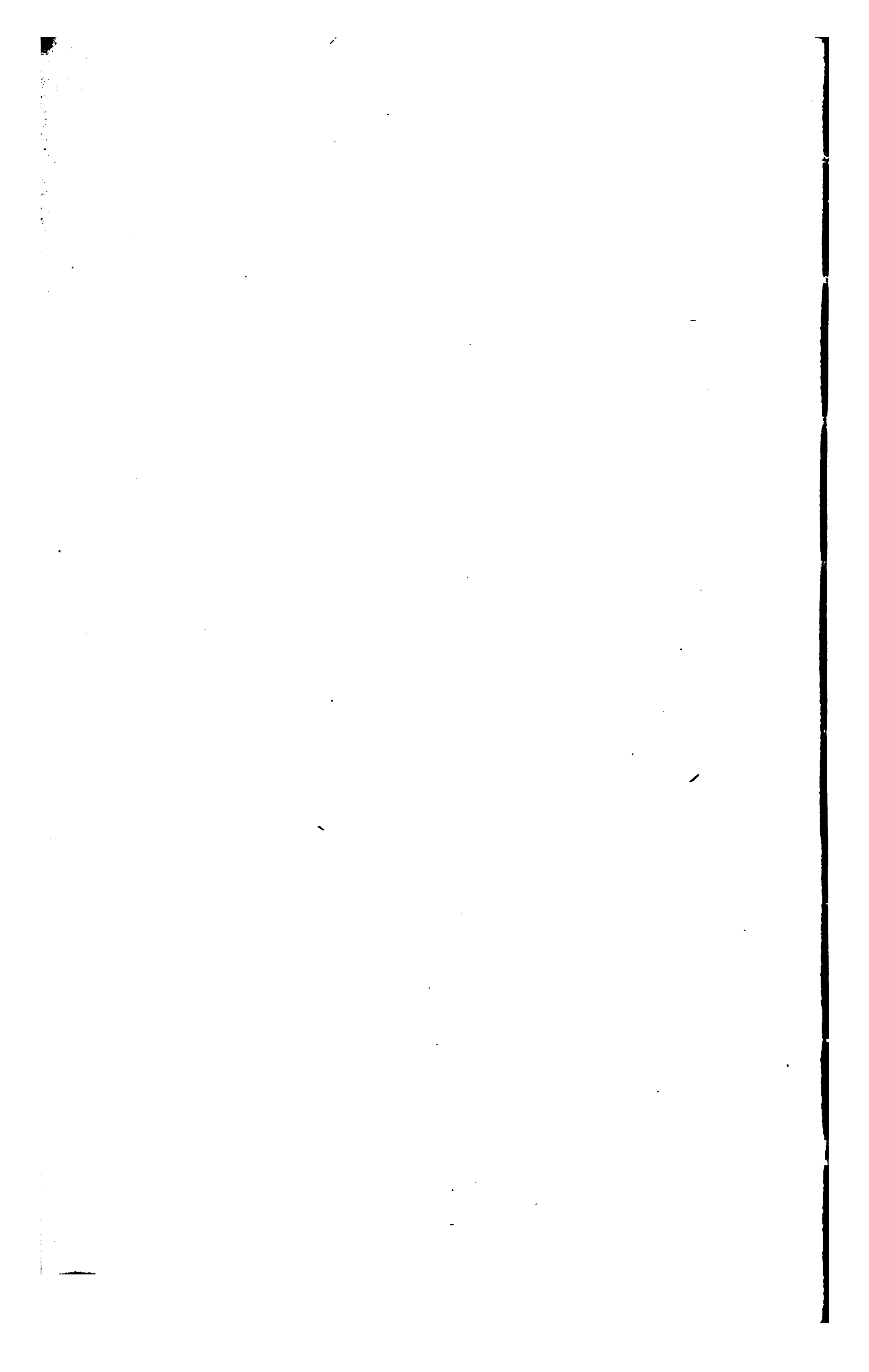
Das vorliegende Werk ist in jeder Beziehung, d. h. in sachlicher und formeller, die Arbeit Zweier, die Verantwortlichkeit aber solidarisch. In dem von mir allein geschriebenen Schlusse des Buchs, welcher überhaupt zum Titel und Gesammtgehalt einige Erläuterungen liefert, ist, soweit thunlich und von Interesse, auch gelegentlich Einiges hervorgehoben, was an neuen Theorien

ausschliesslich oder vorzugsweise dem Mitverfasser angehört. Dinge, wie die Schöpfung einer wirklichen Theorie der Gleichungen zusammengesetzter Grade, also eine Hinausführung der Gleichungslehre über den Standpunkt, auf welchem sie Abel und Galois vor einem halben Jahrhundert gelassen haben, sind auch schon äusserlich charakteristisch genug. Principiell aber entscheidender ist die Herstellung von Ausgangspunkten einer neuen Wissenschaft der Functionsanalysis, d. h. von neuen Methoden und Sätzen, durch welche die Natur aller denkbaren Functionen und zugehörigen Gleichungsumkehrbarkeiten vom Mitverfasser festgestellt worden. Wer übrigens nach Durcharbeitung unseres Buchs bezüglich der charakteristischen Punkte noch näher unterscheiden und, was die Hauptsache ist, sich sachlich über die einzelnen Neuheiten bestimmter orientiren will, kann dies thun, indem er das im Schluss Angegebene unter Aufsuchung entsprechender und ergänzender Positionen des Inhaltsverzeichnisses eingehender würdigt.

Nun noch ein paar Aeusserlichkeiten! Der Abdruck des Verzeichnisses meiner Schriften am Ende des Buchs ist insofern auch ein Bestandtheil desselben, als er bei den im Verlauf des Werks vorkommenden Anführungen die Umständlichkeiten vollständiger Titelangaben einfürallemal erspart. — Der in andern Vorreden von mir geübten und begründeten Gewohnheit gemäss habe ich auch diese in jedem Exemplar mit Federunterzeichnung versehen.

Zehlendorf bei Berlin, Ende März 1884.

E. Dühring



Inhalt.

Drittes Capitel.

Einführung wahrer Begriffe an Stelle des Unendlichkeitsaberglaubens.

Viertes Capitel.

Ausgangspunkte einer neuen Rechnung.

Fünftes Capitel.

Exacter Sinn und geregelte Methode für die Wurzeln der Einheit.

Sechstes Capitel.

Die Gleichungslösung nach der Werthigkeitsrechnung.

Siebentes Capitel.

Vollständiger Schematismus der Wurzelform der Gleichungen aller Grade.

Achtes Capitel.

Behandlung überviergradiger Gleichungen.

Neuntes Capitel.

Lösbarkeitskriterien und Lösungswege für Gleichungen einfacher und zusammengesetzter Grade.

Vierzehntes Capitel.

Weitere Anwendungen der neuen Mittel.

Fünfzehntes Capitel.

Ausgangspunkte zu einer neuen Lehre von allgemeinen Functionseigenschaften.

Erstes Capitel.

Neue Feststellung des Sinnes des Negativen.

1. Die antike Mathematik steht bei denen, welche einen feineren Sinn für die Strenge der Begriffe haben, mit Recht im Ansehen grösserer Schärfe und Klarheit als die moderne. Dies zeigte sich auch namentlich noch in der Werthschätzung, die sie im Uebergange vom 18. zum 19. Jahrhundert von Seiten eines Lagrange erfuhr. Dieser Analytiker höchsten Ranges verband mit seinen hohen schöpferischen Fähigkeiten auch ein ernstes Streben nach grösserer Klarheit und nach Wegräumung derjenigen Dunkelheiten, die ihm in der Mathematik der Neueren besonders anstössig waren. Seine Bemühungen concentrirten sich auf einen Ersatz des Begriffs des Unendlichkleinen und waren, soweit sie zutreffend ausfielen, als Vorstadien einer bessern Grundlegung der gesammten Mathematik sehr nützlich. Sie hatten aber grade das unberührt gelassen, was noch viel tiefer in die Verfassung der Mathematik und aller ihrer mechanischen, physikalischen oder sonstigen Anwendungen eingreift. Auch Lagrange hat nie empfunden, wie die Mangelhaftigkeit und Unsicherheit in den Operationen und Schlüssen der neuern Mathematik weit mehr auf falsche oder unzulängliche Vorstellungen über die fundamentalen Rechnungszeichen als auf den Mysticismus des Unendlichen zurückzuführen sei. Er hat sich an der Lösung der Räthsel, welche die gemeine Auffassung des Imaginären darbietet, nicht einmal versucht, ja den thatsächlichen Mangel hier nicht einmal zureichend gewürdigt. Die Eleganz, mit der er die Rechnung im Gebiet imaginärer Beziehungen handhabte, contrastirte mit der Enthaltung, die er bezüglich des Gebrauchs des Imaginären im sachlichen Gebiet übte. Grade weil er den Werth

völliger Strenge und Durchsichtigkeit hoch anschlug, hatte er das Bewusstsein, sich im Gebiet des Imaginären auf einem ganz anderartigen Boden zu bewegen, der nicht die gleiche Anwendbarkeit mit dem der reellen Operationen zu bieten schien. Aber obwohl diese Kluft zwischen den beiden Operationsgebieten für alle damaligen Mathematiker unüberbrückt gähnte, so hat doch selbst Lagrange nie auch nur den Versuch gemacht, den Anstoss und die Unbequemlichkeit durch eine Nachforschung über die ersten Ausgangspunkte des analytischen Getriebes wegzuräumen.

Der Vorzug der antiken Mathematik beruht positiv auf dem Sinn für strenge Begriffe und Beweise, der sich in ihr verkörpert hat. Uebrigens ist es aber ein Mangel, vermöge dessen sie noch nicht in den Fall kam, den neuern mathematischen Aberglauben und die zugehörigen Begriffsverdunkelungen an sich herantreten zu sehen. Dieser Mangel bestand in der überwiegenden Beschränkung auf Geometrie und in der Unentwickeltheit der antiken Algebra, die selbst in der Diophantischen Gestalt noch keinen abstracten Algorithmus der Operationen ausgebildet hatte. Die Algebra ist zwar, mindestens einschliesslich der Gleichungen zweiten Grades, also in ihren praktischen Hauptmitteln, bereits eine Ueberlieferung aus dem späteren Alterthum. Anders verhält es sich aber mit dem abstracten und systematischen Gebrauch der Rechnungszeichen und Buchstaben. Die Entwicklung dieser analytischen Zeichensprache mit allen ihren unwillkürlichen Consequenzen an neuen Begriffen und Wendungen ist eine Eigenthümlichkeit der Neuern. Es konnten daher auch erst die Algebraisten der neuern Jahrhunderte sein, die mit dem erweiterten Gebrauch des Subtractionszeichens der Abirrung anheimfielen, das Negative in falscher Weise zu deuten und zu verdinglichen. Indem man vom natürlichen und einfachen Sinn der Sache abkam und sich einem theils gedankenlosen theils falsch gedeuteten Spiel der Operationen überliess, gerieth man in der Analysis vom 16. bis zum 19. Jahrhundert immer tiefer in eine mechanisch äusserliche oder räthselhaft verdunkelte Handhabung der Begriffe und Gebilde hinein, die den Mathematikern gleichsam unter den Händen und ohne ihre Absicht bei der Verfolgung und Anwendung der Operationen der Buchstabenrechnung sich aufgedrängt hatten. Es entstanden auf diese Weise herkömmliche Ideenverbindungen, die besonders in der Anwendung der Analysis auf die Geometrie Dinge unmotivirt zur Geltung brachten, die

einer Nachweisung bedurften. Das erste Hauptbeispiel dieser Art ist die äusserliche Ideenassociation, welche sich zwischen dem Richtungsgegensatz auf Coordinatenlinien und dem Gegensatz von Positiv und Negativ festsetzte und einbürgerte, ohne jemals ernstlich auf Gründe, geschweige auf letzte Gründe zurückgeführt zu werden. Im Uebergange vom Analytischen zum Geometrischen blieb aber auch anderweitig die rationelle Consequenz im Rückstande oder wurde gradezu durch die Entwicklung eines ganzen Systems von Artikeln mathematischen Aberglaubens verletzt. Man verlor die Ausgangspunkte und den ursprünglichen Sinn der Operationen aus dem Auge und fiel Deutungen und Deuteleien des Negativen und des Imaginären anheim. Das 19. Jahrhundert hat den nicht beneidenswerthen Vorzug gehabt, grade jene schlechtere Aussaat voll zur Reife zu bringen und die Früchte der ersten Abirrungen als ausgewachsene Monstrositäten einzuernten. In letzterer Beziehung braucht nur an die monstrosen Gaussigkeiten erinnert zu werden, die im Antieuklidischen gipfelten, die Raumdimensionen widersinnig vermehrten und überhaupt die Mathematik durch Mysticismus und sonstige Verworrenheiten umnebelten. Diese Früchte beschränkter metaphysischer Einbildung hätten nicht reifen können, wenn nicht jene älteren Lücken und Unsicherheiten der neuern Mathematik vorhanden gewesen wären.

Es ist angenehmer, den halbwegs normalen Gang der Entwicklungen zu verfolgen als grade bei den ärgsten Ausgeburten zu verweilen. Was ein Gauss und was Nachtreter dieses Professors an abnormen Beschränktheiten und Thorheiten zu Markte gebracht haben, ist nur zum Theil als Folge jener älteren Unzulänglichkeiten anzusehen, im Uebrigen aber positiv auf die eigenartige Beengtheit und den sozusagen persönlichen Idiotismus der Betheiligten zu verrechnen. In einem erträglicheren Element befindet man sich sofort, wenn man die Entwicklung der neuern Geometrie vom 18. zum 19. Jahrhundert, also etwa von Monge und Carnot bis auf Poncelet und namentlich das hiebei fraglich werdende Verhältniss zur Analysis ins Auge fasst. In dieser Entwicklung sind schöpferische und originale Wendungen zu verzeichnen; es ist aber in ihr auch zugleich die Verlegenheit zu constatiren, in welche die geistvollsten Pfleger der Sache geriethen, wo sie durch ihre geometrischen und projectivischen Methoden dazu veranlasst wurden, eine Brücke zwischen dem Sinn der

analytischen Zeichen und den Lageverhältnissen oder sonstigen Beziehungen der räumlichen Gebilde zu suchen. Was Carnot im Anfang des Jahrhunderts unter dem Titel einer „Geometrie der Lage“ auseinandersetzte, war eigentlich nur die breite Beurkundung einer einzigen alten, aber grossen Verlegenheit, — der Verlegenheit nämlich, welche der Mangel einer gehörigen Brücke vom analytisch Negativen zum entsprechenden geometrischen Sinn negativer Coordinaten mitsichbrachte und von jenem betriebsamen Schriftsteller wohl mehr ins Licht gesetzt, aber nicht ernstlich beseitigt wurde. Bei dem durch schöpferische Eigenschaften ausgezeichneten Poncelet, der als Europäischer Hauptrepräsentant der projectivischen Geometrie anzusehen ist, zeigte sich jene Verlegenheit in eignen Versuchen und Wendungen, dem analytisch Negativen und Imaginären ähnliche geometrische Begriffe hinzuzufügen. Sein grosses Werk über die projectivischen Eigenschaften der Figuren, welches noch immer die originalste und geistvollste Beurkundung neuerer Geometrie geblieben ist, liefert zugleich die Zeugnisse dafür, in welche Schwierigkeiten und Unzuträglichkeiten der geometrischen Begriffsbildung sein Verfasser gerieth, weil er es hierin der Allgemeinheit der Analysis nachthun wollte, ohne doch auf dem Boden der Analysis selbst einen völlig geklärten Sinn der Rechnungszeichen vor sich zu haben. Grade weil Poncelet auch die Analysis einigermaassen pflegte, ist er ein vorzüglicher Typus für die Vergeblichkeit des Unternehmens geworden, in der Geometrie Klarheit und Ordnung zu schaffen, ohne zuvor in der Analysis selbst, und ohne Beziehung auf irgend welche Anwendung, mit den leitenden Grundvorstellungen ins Reine gekommen zu sein. Letzterer Mangel ist übrigens ein allgemeiner. Man hat auch in den fehlgreifenden Phantasien, Spielereien und Wörterschmiedereien über neue Combinationen oder vielmehr mit neuen Masken des Imaginären, wie sie z. B. auch von dem sonst sich etwas rationeller und gesetzter verhaltenden Irischen Astronomen Hamilton unter dem Namen einer Quaternionenrechnung ausgingen, sowie überhaupt auch allerorten, wo man eine geometrische Deutung des Imaginären unternahm, jederzeit den fundamentalen Hauptpunkt übersehen, dass man erst mit Fug und Recht an die betreffenden geometrischen Fragen herantreten kann, wenn man in der reinen Analysis selbst den Sinn der negativen und der imaginären Lösungen festgestellt hat. Man ist aber dieser Nothwendigkeit bisher so fern geblieben,

dass man sie, soweit wir aus unserer Bekanntschaft mit der mathematischen Literatur urtheilen dürfen, nicht einmal geahnt hat. Wieder und wieder ist man im Gebiet des analytisch Geometrischen auf geometrische Gründe eingegangen, um einen Sinn des Negativen und des Imaginären herauszukünsteln, der vor allen Dingen hätte erst im Analytischen selbst ganz im Allgemeinen festgestellt werden müssen, um dann je nach den geometrischen, mechanischen oder sonstigen Anwendungen seine natürliche nähere Bestimmung zu erfahren. Ja selbst in diesem Bereich des Suchens nach blos geometrischen Auslegungen der analytischen Zeichen sind es nur vereinzelte gründliche Geister gewesen, die nicht ausschliesslich an dem Imaginären hafteten, sondern einsahen, dass auch der nur anscheinend selbstverständliche Sinn des Negativen noch gar sehr der Klarstellung bedürfte. Niemand aber hat herausgefunden, dass ohne diese Vorarbeit für das Negative auch die Rolle des Imaginären ewig unklar bleiben müsste, geschweige, dass die Hauptvorarbeit und die wesentlichste Entscheidung aller Fragen bereits im rein Analytischen zu erledigen sei.

2. Die Feststellung des Sinnes der negativen und der imaginären Lösungen ist nicht blos eine Angelegenheit strenger Begriffshaltung und Consequenz, sondern auch eine praktische Frage, deren Erledigung neue fruchtbare Wendungen und Schlüsse möglich macht. Sie wirft nicht nur ein Licht auf die Vielwerthigkeit der Wurzeln, sondern gestattet auch, zur Lösung der Gleichungen von einem neuen Princip Gebrauch zu machen, welches an die verschiedenen Grade der Mehrwerthigkeit der Gleichungsglieder anknüpft. Ueberhaupt ist die strenge Beachtung der sich häufenden Vorzeichen oder mehrwerthigen Wurzelformen nach der neuen Theorie auch ein neues Grundmittel, die Operationen abzukürzen und den Gleichungen und analytischen Formen neue Schlüsse abzugewinnen. Aus dieser vorläufigen Hinweisung mag man entnehmen, dass alle Fundamente des Calcüls in Frage kommen und bis in das hinein, was Lagrange Functionenrechnung nannte, und was man mehr dem Herkommen entsprechend auch als die Rechnung mit Differentialcoefficienten bezeichnen kann, neue Folgerungsarten und veränderte Gesichtspunkte ergeben. Beispielsweise kann die Bestimmung der Maxima und Minima, namentlich der symmetrischen, hienach auf sehr einfachen Schlüssen beruhen, die unmittelbar an den Begriff der äussersten Werthe und an die mehrfache Vorzeichengestaltung anknüpfen.

Ein höchst bedeutsames Gebiet der Anwendung steckt sich aber ab, sobald man vom Analytischen auch nur den einen Schritt zum Geometrischen thut. Im Analytischen hat man es mit Grössen überhaupt zu thun, während das Wesen des analytisch Geometrischen im letzten Grunde nur nebenbei im Formelgebrauch, der Hauptsache nach aber in der Rechnung mit Raumgrössen besteht. Hieraus folgt, dass wenn ein Sinn negativer und imaginärer Lösungen für Grössen überhaupt aufgefunden ist, dieser auch sofort muss auf Raumgrössen übertragen werden können. Hiedurch wird ein Parallelismus der Geometrie zur Analysis geschaffen, der in jeglicher Beziehung Gültigkeit hat. Dieser Parallelismus ist von jener vollkommenen Art, die man schon früher als Ideal im Sinne hatte, aber nicht nachweisen konnte. Unter den Pflegern der modernen Geometrie ist oft genug davon die Rede gewesen, wie ein Princip der Allgemeingültigkeit der Analysis nicht ohne Weiteres gebraucht werden dürfe, um allgemeine Beziehungen als auch in der Geometrie vorhanden zu setzen. Dieses zweiflerische Verhalten, welches auch besonders die Zeichenconsequenz betraf, ergab eine bedenkliche Lücke in den Folgerungen, die nunmehr durch unsere fundamentalen Feststellungen vollständig ausgefüllt werden wird. Offenbar ist es ein arger Uebelstand, wenn die Analysis nicht in jeglichem Stück für ein geometrisches Gegenstück deutlich maassgebend wird. Es fehlt alsdann der Schluss von der Beziehung der allgemeinen Grössen auf die entsprechende Beziehung der Raumgrössen, also kurzweg der Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere, und dieser Mangel ist nicht blos ein logischer, sondern, wie sich zeigen wird, ein starkes Deficit an fruchtbaren und zur Vollendung der Mathematik nothwendigen Wahrheiten. Der ganze Bau der Analysis bleibt überdies im wichtigsten Punkte unsolide, solange die negativen und imaginären Lösungen keinen weiteren Sinn erhalten, als den mangelhaften, den sie bisher hatten. Betrachtete man nämlich die Analysis an sich selbst, so bedeutete eine negative Lösung nichts weiter, als dass die gesuchte Zahl oder Grösse unter den obwaltenden Umständen keine absolute Zahl oder Grösse sein könne. Nur wenn sie mit dem Minuszeichen behaftet in die maassgebende Gleichung eingesetzt werde, sei sie eine Lösung. Anstatt nun den entlegeneren Sinn dieser Beziehung und dieser eigenthümlichen Umstände aufzusuchen, hat man sich an die Thatsache gewöhnt, und mit den negativ zu setzenden

Grössen operirt, als wenn es eine eigenthümliche Art von Grössen wäre, um deren Deutung man sich erst in den Anwendungen der Analysis, aber nicht in dieser selbst zu kümmern hätte. Ja man hatte nicht einmal eine Ahnung davon, dass in den algebraischen Beziehungen selbst noch ein solcher Sinn aufzufinden wäre.

Ursprünglich haben die Algebraisten der neueren Zeit die negativen Wurzeln der Gleichungen als „falsche" Wurzeln bezeichnet. Diese Benennung zeugt für den Gedankengang. Eine Wurzel galt als nicht richtig und nicht brauchbar, weil sie keine absolute Zahl oder Grösse war. Man konnte sich Zahlen und Grössen an sich selbst nicht anders als absolut denken, und man hatte auch wesentlich Recht, hieran festzuhalten. Die Vorzeichen deuten nie und nirgend etwas Anderes an als Operationen und Operationsbeziehungen. Negativ können Zahlen und Grössen daher nur sein, insofern sie als Glieder in einem Zusammenhang von Operationen gedacht werden. In Bezug auf diesen Zusammenhang sind sie zu subtrahiren oder würden zu subtrahiren sein, wenn jener Zusammenhang die wirkliche Ausführung dieser Operation gestattete. Der erste Fehler war es daher, jene „falschen" Wurzeln Curs gewinnen zu lassen, als wenn es wirkliche Zahlen oder Grössen wären. Noch Euler im 18. Jahrhundert definirte negative Grössen als solche, die kleiner als Null wären, und überhaupt ist eine solche Auffassung auch leicht aus dem uneigentlichen Gebrauch des Kleinerzeichens zu erklären, wie wenn man aus $1 < 2$ durch Abzug von 2 auf jeder Seite $-1 < 0$ macht, und demgemäss 0, welches keine Grösse ist, doch grösser sein lässt. Hier bedeutet der fictive Algorithmus, dass noch ein positiver Summand hinzugefügt werden muss, damit aus der signirten Grösse die Null entstehe. Die Verdinglichung und Erdichtung, die in der Vorstellung einer besondern Zahlen- oder Grössenart liegt, ist aber auch aus andern Gesichtspunkten erkennbar. Der Abweg bestand und besteht darin, dass die Zahl oder Grösse als mit dem Minuszeichen zu einem besondern Wesen verschmolzen vorgestellt wurde und wird.

Anscheinend hat dieser Abweg bei den negativen Lösungen nicht so grosse Thorheiten und Räthselhaftigkeiten mit sich gebracht, wie dies bei den imaginären der Fall gewesen ist und noch ist. Dieser Anschein stammt aber nur daher, dass der Grad der Unausführbarkeit der Operationen im imaginären Gebiet ein höherer ist. Im Grunde sind die wesentlichsten Schwierigkeiten

schon in der falschen Sinnesbestimmung des Negativen belegen, und das Räthsel des Imaginären lässt sich vollständig eben nur dadurch lösen, dass der wahre Sinn des Negativen zuvor festgestellt wird. Wir lassen daher hier vorläufig die Combination des quadratischen Wurzelzeichens mit dem Minuszeichen noch ausser Betrachtung, um uns in einfachster Sonderung der fundamentalen Erklärung des Negativen zuzuwenden.

3. Das Minuszeichen hat, wo es auch immer vorgekommen sein möge, noch nie und nirgend etwas Anderes bedeutet, als eine Subtraction. Von diesem Grundsatz, dass dies in der Analysis der einzige nachweisbare fundamentale Sinn sei, gehen wir aus, und aus diesem einfachen und unmittelbaren Sinn werden sich alle andern Sinnesbestimmungen ableiten lassen. Diese letztern werden nicht dem Minuszeichen an sich selbst, sondern dem Operations- oder Gleichungszusammenhange entsprechen, in welchem es figurirt. Zunächst ist klar, dass die Subtraction bezüglich ihrer Ausführbarkeit eine Vorbedingung mehr hat, als die Addition. Zur Addirbarkeit genügt die Gleichartigkeit der Summanden, indem unbenannte Zahlen oder Grössen von gleicher Benennung aus dem Gesichtspunkt dieser gemeinschaftlichen Benennung und Art immer addirbar sind. Die Vereinigung von Einheiten und Gruppen von Einheiten ist an kein gegenseitiges Grössenverhältniss dieser Gruppen gebunden. Anders bei dem Abziehen; hier muss das Abzuziehende kleiner sein als der Minuendus; sonst kann die Subtraction nur theilweise vollzogen werden und es bleibt eine Gruppe von Einheiten übrig, die da fortgenommen werden soll, wo nichts mehr existirt, wovon sie fortgenommen werden könnte. Diese Unmöglichkeit und der Widersinn, der darin liegen würde, sie als Möglichkeit zu denken, wird dadurch angezeigt, dass vor die absolute Grösse, mit der in der angegebenen Weise operirt werden sollte, aber nicht konnte, das isolirte Minuszeichen tritt und als Erinnerung daran stehen bleibt, um welche unmöglich gewordene Operationen es sich bei der Rechnung mit dieser Grösse gehandelt hat. In dem einfachen Ausdruck $a - x$, in welchem a eine bestimmte, x aber eine unbeschränkt veränderliche Grösse vorstellt, beginnt jenseit des Punktes, wo das steigende x gleich a wird, die Unmöglichkeit, den Rechnungsansatz, der in dieser Formel zwischen absoluten Grössen vorgezeichnet ist, vollständig auszuführen. Führt man ihn theilweise aus und behält noch ein abzuziehendes y übrig,

so bedeutet die algebraische Formulirung $a - x = - y$ eben auch nichts weiter als jene Unmöglichkeit. Hier ist nun Entstehung und Begriff des Negativen völlig klar, und der Sinn der analytischen Zeichensprache bleibt correct, solange man sich nichts Weiteres hinzueinbildet. Wohl aber ist es nöthig, mit Rücksicht auf den Gleichungszusammenhang noch eine richtige Auslegung negativer Lösungen zu finden. Diese wird dann der Schlüssel nicht blos zum vollen Verständniss der Analysis an sich selbst, sondern auch zu demjenigen aller ihrer Anwendungen werden, möge es sich um Geometrie, Mechanik, speciellere Physik oder sonst ein irgend erdenkliches Anwendungsgebiet der Rechnung handeln.

Betrachten wir den allereinfachsten Gleichungstypus $x + y = a$, wo x und y unbeschränkt veränderliche Grössen, a dagegen eine während der Veränderung jener bei einem bestimmten Werth fixirte Grösse bedeutet. Solange die Buchstabenzeichen hierin nur absolute Grössen oder Zahlen vorstellen, wie dies kurzweg von allen Zahlen oder Grössen ohne Weiteres der Natur und Wirklichkeit der Dinge und unmittelbaren Begriffe gemäss gelten muss, giebt es auch keine Möglichkeit, die Gleichung zu erfüllen, wenn x oder y grösser als a gesetzt werden. Die Lösung $y = a - x$ wird in einem solchen Falle der Unmöglichkeit negativ, und das Negative zeigt hier nicht blos überhaupt, sondern in Rücksicht auf einen bestimmten Gleichungsansatz die Lösungsunmöglichkeit an. Setzen wir für den Fall, dass $x > a$ ist, nun $x - a = z$, so haben wir $y = - z$ als Anzeige, dass für y überhaupt keine absolute Grösse zu haben ist, die der ursprünglichen Gleichung $x + y = a$ genügt.

Sehen wir nun zu, was mit der ursprünglichen Gleichung $x + y = a$ vorsichgeht, wenn wir es mit der Einsetzung der negativen Lösung versuchen, indem wir $- z$ an die Stelle von y setzen. Wir erhalten alsdann $x - z = a$, worin alle Grössen wieder absolute sind. Es ist y durch z ersetzt, aber zugleich der Gleichungstypus durch die Vertauschung von Plus und Minus umgewandelt. Die Bezeichnungsart des zweiten Gliedes mit y oder z ist an sich gleichgültig. Der erhebliche Unterschied besteht in dem Zeichenwechsel. Hätten wir von vornherein $x - y = a$ gesetzt, so hätte dieser Ansatz unter denselben Umständen eine absolute Lösung $y = x - a$ ergeben. Der weitere Sinn jener negativen Lösung ist also der, dass sie erkennen lässt, wo

unter bestimmten Grössenverhältnissen in dem Gleichungsansatz selbst etwas Unmögliches inbegriffen war, und wie dieser Unmöglichkeit durch einen Zeichenwechsel in dem Gleichungsansatz abzuhelfen ist. Die negative Lösung liefert, sei es durch die Substitution, sei es durch jene unmittelbare Ueberlegung jederzeit eine neue Gleichung, die in absoluten Grössen möglich ist.

Wohl zu merken ist aber hiebei, dass dieser neue Sinn des Negativen nichts als eine specielle Eigenschaft ist, die ihm nicht unmittelbar an sich, sondern der Rolle zukommt, die es in Beziehung auf die Gleichung spielt, der es genügt. Ja von einer andern Seite betrachtet, erscheint sogar die Eigenschaft der Gleichung, vermöge deren sie nur einen einzigen Typus repräsentirt und erst durch Zeichenwechsel in einen andern verwandelt werden muss, als die entscheidende Hauptsache. Man repräsentirt nämlich von vornherein indirect und stillschweigend beide Typen zugleich, wenn man der negativen Lösung den Sinn giebt, dass die Einsetzung dieser negativen Lösung die Gleichung lösbar mache, aber eben nur durch den hiemit verbundenen Zeichenwechsel. Unmittelbar und ursprünglich bleibt es dabei, dass die negative Grösse nichts als eine zunächst absolute Grösse ist, die als unter dem Gesetz einer unmöglichen Subtraction stehend figurirt. Das Negative ist einfach die Vorstellung einer unvollzogenen und, solange es für sich isolirt gedacht wird, auch unvollziehbaren Subtraction. Eine unmöglich gewordene Subtraction $a - x$, wo also x grösser als a geworden ist, kann auch stets im Verhältniss zu ihrem Ergebniss als Gleichung behandelt, also zunächst für jede Grösse von x $a - x = u$ gesetzt werden. Alsdann ist klar, dass der Werth der linken Seite, d. h. einer Differenz sich nicht ändert, wenn von Minuend und Subtrahend gleichviel, also im speciellen Falle a abgezogen wird. Hiedurch ergiebt sich für den Unmöglichkeitsfall von x grösser als a die Gleichung $u = 0 - (x - a)$, wo $x - a$ eine absolute Grösse ist. Auf diese Weise ist die Gleichung auf die einfachste Form gebracht, in welcher an der Operation vollzogen ist, was sich vollziehen liess. Die Subtraction von Null hat den Vortheil, die fragliche und entscheidende Unmöglichkeit handgreiflich anzuzeigen, und diese Unmöglichkeit, die allem Negativen seinen Sinn giebt, muss als Leitfaden für alles Uebrige festgehalten werden. Die vorher auseinandergesetzte Umwandlung der Gleichung durch Zeichenwechsel ist nur ein zugehöriges, wenn auch freilich

für das Verständniss der Rolle des Negativen erst maassgebendes Seitenstück.

4. Bei einer Darstellung, in welcher capitelweise ein Thema in den Hauptzügen erledigt werden soll, müssen bisweilen Beziehungen und Vergleichungen vorweg angedeutet werden, deren weitere Begründung erst später nachfolgen kann. In diesem Sinne muss hier schon eine Bemerkung über den Unterschied der beiden Unmöglichkeiten platzfinden, durch welche sich das Negative und das Imaginäre kennzeichnen. Bei dem Imaginären sind zwei Operationszeichen in unvollziehbarer Weise combinirt. Die Unmöglichkeit, die in Quadratwurzel aus Minus figurirt, betrifft eine Beziehung, die zwischen den Operationsgattungen an sich selbst statthat. Es ist unmittelbar kein Verhältniss von verschiedenen Grössen zueinander, was dabei als Widerspruch sichtbar wird. Umgekehrt ist im Falle des Negativen die Operationsgattung an sich möglich und ohne Widerspruch, und es ist nur die ungenügende Grösse des Minuendus, wodurch unter den besondern Umständen die Ausführung der Operation zu etwas Unmöglichem wird. Ganz im Allgemeinen könnte negativ auch jede Grösse heissen, die subtrahirt werden soll, und für diesen allgemeineren Begriff des Negativen versteht es sich von selbst, dass es eben zwei Fälle giebt, den der vollziehbaren und den der unvollziehbaren Operation. Der letztere ist es ausschliesslich, der uns das isolirt Negative liefert, welches dem herkömmlichen Begriffs- und Sprachgebrauch entsprechend die eigentlich negative Grösse ist. Die Bezeichnungen reell und imaginär sind daher nicht schlecht; denn das Negative stellt eine an sich wirkliche Operation, das Imaginäre dagegen nur eine fictive, d. h. trotz ihrer absoluten Unmöglichkeit doch hingestellte, aber, wenn richtig verstanden, eben als unmöglich hingestellte und bezeichnete Verbindung von Operationsgattungen dar. Mit dem Unmöglichen, wenn man es eben als unmöglich setzt und behandelt, muss in Schlüssen und Rechnungen hantirt werden; sonst bleibt jeder Gedankengang in der Kindheit. Wir werden nun aber in dem folgenden Capitel für das analytisch Imaginäre und mithin für alle seine Anwendungen noch einen andern Sinn nachweisen, der sich an den Begriff des Unmöglichen anschliesst, aber dennoch ein Figuriren der betreffenden Grössen mitsichbringt, welches demjenigen der negativen Grössen im entscheidenden Hauptpunkt entspricht. Für etwa ungeduldige Leser aber, welche in die Gaussigkeiten des

Imaginären zu tief hineingerathen oder vielmehr hineinverbildet sind, sei schon jetzt gesagt, dass der wahre Weg der grade umgekehrte von dem ist, den Derjenige einschlug, der sich so oft selbst den Herrn Hofrath Gauss genannt hat. Der klare und stets wahrheitsgetreue Lagrange, der umfassendste und scharfsinnigste Analytiker der neueren Zeit, der noch heute der letzte grosse Repräsentant der gesammten Mathematik ist, hat auch darin richtigen Tact bewiesen, dass er in seinen algebraischen Arbeiten die imaginären Wurzeln als unmögliche Grössen auffasste und bezeichnete. Hierin bekundete sich noch die richtige Denkweise, und es wäre nur nöthig gewesen, die Betrachtungsart der ältern Algebraisten, welche die negativen Wurzeln als falsche bezeichneten, im Sinne der Wahrheit zu steigern und auch das isolirt Negative als die Anzeige einer Unmöglichkeit zu behandeln. Der verkehrte Weg dagegen ist der, die ungehörigen Verdinglichungen und Einbildungen noch metaphysisch, d. h. mystisch phantastisch zu übertreiben, wie es der erwähnte Gauss gradezu als sein Princip ausgesprochen hat. Auf diese Weise ist er nicht zu einem wirklich sachlichen Sinn, also auch nicht in der Geometrie zu einer wirklichen Darstellung des Imaginären, wohl aber zu einer ganz willkürlichen, mit falscher Mystik versetzten graphischen Verzeichnung desselben gelangt, wie man sie mit gleichem Recht für jegliche Gattung von Einheiten, und wären es auch Kohlköpfe und Rüben, belieben könnte. Doch davon später ausführlicher. Hier war nur zu signalisiren, dass grade die Durchführung des Gesichtspunktes der Unmöglichkeit, nicht blos für die imaginären, sondern auch für die negativen Grössen der richtige Weg, die entgegengesetzte Vorstellung aber der in die ärgsten Nebel führende Abweg ist.

Gehen wir also überall davon aus, dass wenn sich eine Grösse in isolirter Weise mit einem Vorzeichen oder mit zwei sich aufeinander beziehenden, sich aber widersprechenden Rechnungszeichen behaftet findet, dies nur den einzigen Sinn hat, auf einen Rechnungszusammenhang hinzuweisen, in welchem diese Grösse nicht absolut, sondern nur in Verbindung mit den betreffenden Rechnungszeichen figuriren soll. Die absolute Grösse ist also nach dieser Bestimmung diejenige, welcher kein Merkmal vorgesetzt ist, durch welches ihr eine besondere Rolle in einem Rechnungszusammenhange angewiesen wird. Geht sie also in einen Rechnungszusammenhang ein, so bestimmen allein die

Operationen dieses Zusammenhangs, ob sie addirt oder subtrahirt werden, oder was sonst mit ihr geschehen soll. Hat sie aber bereits ein Vorzeichen oder, was auch als Vorzeichen betrachtet werden muss, eine Verbindung von Rechnungszeichen, wie Quadratwurzel aus Minus, in isolirter Weise vor sich, so bedeutet dies, dass sich dies einfache oder zusammengesetzte Vorzeichen mit den in einem Rechnungszusammenhange, also etwa in einer Gleichung, vorgeschriebenen Operationen zu combiniren habe. Auf diese Weise kann jede Gattung Grössen, seien es Zahlen, Zeiten, räumliche Ausdehnungen, Wärmegrade u. s. w., verschiedene Signirungscharaktere erhalten. Die betreffenden Grössen bleiben an sich immer wirkliche Grössen und haben an sich selbst mit dem Unmöglichen, welches der auf sie gerichteten Operation, nämlich der unvollziehbaren oder aber widersprechend zusammengesetzten Signirung anhaftet, nichts zu schaffen. Imaginäre Linien sind daher in einem ähnlichen Sinne vorhanden, wie negative. Beide lassen sich zeichnen, weil an ihnen eben nur die absolute Linie, nicht aber das Negative und das Imaginäre als geometrische Länge entworfen wird. Das Negative wird bei ihnen als Zeichen angemerkt und hinzugeschrieben, und ebenso werden wir die imaginäre Linie, ja eine grade Linie, die sich aus einem reellen und einem imaginären Stück durch Addition oder Subtraction zusammensetzt, später bis zu jener vollständigen Evidenz begreiflich machen, mit der hier zunächst der Sinn einer negativen Linie nachgewiesen werden soll.

5. Der Ausgangspunkt von der Gleichung ist der bestimmteste und hat den Vortheil, sofort nicht blos den Begriff, sondern auch die Rolle des Negativen kennen zu lehren; denn die negative Lösung bedeutet die entsprechende Zeichenumänderung in der ursprünglichen Gleichung. Die Einführung der negativen Grössen, die sich unwillkürlich und ohne Verständniss für den wahren Sinn der Sache vollzog, bedeutet in Wahrheit nur, dass eine und dieselbe Gleichung die Rolle von mindestens zweien spielen soll. Man müsste nämlich, wenn man nur mit lauter absoluten Grössen rechnen wollte, dem einen Typus der Gleichung noch einen andern mit irgend welchen Zeichenwechseln folgen lassen. Man müsste also beispielsweise vor irgend einem Gliede Minus setzen, wo sonst Plus stand, und hätte hiemit eine neue Gleichung, die eine absolute Lösung mitsichbringt. Die Fruchtbarkeit dieses neuen Gesichtspunktes wird sich aber ganz beson-

ders bei den imaginären Lösungen zeigen; denn diese ermöglichen es, in einer einzigen Gleichung zusammenzufassen, was sich sonst an ein System verschiedener Gleichungstypen vertheilen würde.

Für die Grundlegung in den Elementen und im Interesse der einfachsten Natürlichkeit des Gedankenganges empfiehlt es sich jedoch, den Ton nicht grade auf die Vorstellung einer Gleichung zu legen, sondern überhaupt eine Abfolge von Rechnungsoperationen, also jegliche Rechnungsthätigkeit, vom Zählen und Addiren an, zum Ausgangspunkt zu nehmen. Nur muss bei jeder solchen Zusammensetzung von Rechnungsoperationen daran gedacht werden, dass sie ein Ziel oder Ergebniss haben, nämlich die Zusammenfassung der Verbindung vereinzelter Grössen als einer einheitlich bezeichneten Gesammtgrösse. Das Entstehenlassen einer Grösse durch Wachsenlassen ist ein stetiges Addiren, das entsprechende Vermindern ein stetiges Subtrahiren, — vorausgesetzt natürlich, dass es sich überhaupt um eine stetige Grössengattung handelt. Im Falle des Discreten, also etwa in der Zahlenreihe, sind aber die entsprechenden Operationen ohne Weiteres schon durch die einfachsten Rechnungsbegriffe charakterisirt. Bei der stetigen wie bei der nicht stetigen Grössenänderung besteht die Sinnesverschiedenheit dieser Aenderung in nichts weiter, als dass entweder addirt oder subtrahirt wird. Diese Additionen und Subtractionen haben aber ihre Bedeutung eben nur als Rechnungsoperationen und die ihnen entsprechenden Zeichen weisen daher auch dann, wenn sie isolirt stehen, auf die entsprechende Rechnungsthätigkeit zurück.

Haben wir daher räumliche Ausdehnungen, wie etwa Längen, die auf einer graden Linie von einem bestimmten Punkte in ihr gerechnet werden, so können die Vorzeichen Plus und Minus unmittelbar vor diese ebensogut treten, wie vor Buchstabenzeichen der Grössen. Nur versteht es sich, dass mit den gezeichneten Linien und ihren Theilen nach irgend einer Regel gerechnet werden muss, und dass nur vermöge eines solchen Rechnungszusammenhanges die beigemerkten Zeichen nicht sinnleer bleiben. Andernfalls sehen sie wie vom Himmel gefallen aus, und es fehlt jede Rechenschaft über ihren Ursprung und über die Berechtigung der Rolle, welche man sie nach der äusserlich überlieferten Schablone in Gemässheit der empfangenen Abrichtung spielen lässt. Nicht unwichtig ist es daher, sich klar zu machen, dass Buchstabenrechnung immer nur etwas In-

directes ist, also die Rechnung mit den unmittelbaren Grössen selbst das Directe und Ursprüngliche. Die Sprache ist nicht die Sache selbst, sondern nur ein Zeichen davon. Die Vorherrschaft der Buchstabensprache hat es vergessen lassen, dass die rechnende Analysis auch als etwas Unmittelbares gedacht werden kann und muss. Analytisch verfahren, heisst nach diesem tiefer gefassten Begriffe im Wesentlichen soviel als die Grössengebilde rechnend, also zunächst addirend oder subtrahirend, durch Bestandstücke darstellen. Das Rechnen ist dabei die Hauptsache, und der Umstand, dass man dazu die Kunstmittel einer besondern analytischen Sprache besitzt, zwar für die Bequemlichkeit und Tragweite der Operationen von hoher Wichtigkeit, aber gleichgültig für das Wesen des Gegenstandes an sich selbst. Mit den räumlichen Grössen wird auch ohnedies gerechnet, sobald man deren Verhältnisse zueinander nach den einfachen Operationen bestimmt, wofür das Zusammenfügen und Trennen von Längenstücken auf einer graden Linie den einfachsten Typus bildet.

Hienach nimmt es sich sonderbar aus, dass die moderne Geometrie, mit ihrem Hauptvertreter Monge, das Wesen der rechnenden Analysis grade da nicht gesucht hat, wo sie am nächsten lag, nämlich auf dem Felde der rationellen, aber anschaulichen und daher unmittelbar an den Raumgrössen operirenden Geometrie. Doch ist es an dieser Stelle nicht die Aufgabe, dieses Verhältniss und das zugehörige Entstehen einer Kluft zwischen moderner Geometrie und Analysis zu beleuchten. Unsere Aufgabe ist hier nur die, das allereinfachste Grundverhältniss festzustellen, von welchem jede Art rechnender Geometrie abhängt.

Eine Länge auf einer graden Linie kann nur dadurch negativ werden, dass sie in irgend einer Aufgabe zu subtrahiren ist. Eine einzige grade Linie, also dem gewöhnlichen Sprachgebrauch zufolge, eine einzige Coordinatenaxe genügt, um den hier fraglichen Grundunterschied festzustellen. Die Aufgabe, die zum Rechnen führt, sei die, einen beliebigen Abstand x von einem festen Punkt O zu benützen, um für den beliebigen Endpunkt dieses Abstandes die Entfernung von einem andern festen Punkt in der Linie zu berechnen. Es muss hiezu natürlich die Entfernung a der beiden festen Punkte voneinander gegeben sein. Die Linie mag zu uns oder wir zu ihr in einer Lage sein, dass

die Bezeichnung links und rechts von O einen nicht missverständlichen Sinn hat. Alsdann kann der Endpunkt des beliebigen Abstandes x auf beiden Seiten liegen und heisse demgemäss L oder R. Der zweite feste Punkt kann ebenfalls links oder rechts gegeben sein und mag demgemäss G oder D heissen. Nehmen wir erst den einen Fall, in welchem er links liegt. Alsdann ist nach Maassgabe der Anschauung der Linienstücke $GR = GO + OR = a + x$, und wenn der Punkt L zwischen G und O liegt, $GL = GO - LO = a - x$. Nennen wir den neuen zu ermittelnden Abstand x', so haben wir also für die zwei Fälle verschiedener Lage des veränderlichen Punktes auch zwei Gleichungen, nämlich $x' = a + x$ und $x' = a - x$. Soll aber die eine Gleichung, also etwa $x' = a + x$ für beide Typen zugleich gelten, so kann dies nur dadurch bestehen, dass in ihr an Stelle von x unter den betreffenden Umständen ein negatives x eingesetzt wird. Doch ist hier der Gleichungsgesichtspunkt zunächst noch Nebensache. Die Rücksicht auf einen Rechnungszusammenhang, ohne Untersuchung des Bestimmenden einer Gleichung, hat uns nur überhaupt den negativen Charakter von Linien geliefert, insofern sie einen Abstand vermindern. Das isolirt Negative hat aber seine entscheidende Eigenthümlichkeit darin, dass es aus einem Rechnungszusammenhange hervorgeht, in welchem eine Subtraction nicht vollzogen werden kann, und ausserdem auf einen solchen hinweist, in welchem die Subtraction ausführbar ist. Diese beiden Rechnungszusammenhänge oder, wenn man will, diese beiden Theile eines allgemeineren Rechnungszusammenhanges sind sorgfältig zu unterscheiden; denn sonst würde das Wesentliche, die Unmöglichkeit, nicht hervorleuchten, und man würde in Bezug auf die Linien an der gemeinen beschränkten Vorstellungsweise haften bleiben, nach welcher der Richtungsgegensatz schon eine zureichende Erklärung sein soll. Man würde bei dem alten Trödel bleiben, wonach die Negativität von Grössen schon am Beispiel der Schulden begreiflich werden soll, die immer abzuziehen sind, wenn es sich um die Bestimmung eines Vermögens handelt. So leichten Kaufs lässt sich aber ein zureichender Begriff vom isolirt Negativen nicht haben, und unser Capitel wäre überflüssig, wenn es sich nicht um eine eindringendere Sinnesbestimmung handelte.

6. Die Gleichung eines veränderlichen, d. h. beweglichen Punktes auf einer graden Linie hat den Sinn, dass der Abstand

dieses in seiner Lage veränderlichen Punktes von einem festen Punkte durch seinen Abstand von einem andern festen Punkte und durch die feste Distanz ausgedrückt wird. Es ist also überhaupt eine Gleichung zwischen a, x und x' in Frage, wenn wir die Bezeichnungen der vorigen Nummer zu Grunde legen. Liegt nach dem fraglichen Entwurf L links über G hinaus, so hat man $GL = LO - GO$ oder $x' = x - a$. Dies ist nach der Anschauung, ohne Rücksicht auf Positiv und Negativ, ermittelt. Es heisst aber auch soviel als $(a - x) = - x'$, und soll ein einheitlicher Gesichtspunkt festgehalten werden, so muss das Abziehen des x von a bestehen bleiben. Hiemit ist aber auch der Fall eingetreten, dass etwas absolut Grösseres von etwas absolut Kleinerem subtrahirt werden soll.

Demgemäss ergeben sich die links von G liegenden Abstände als isolirt negative Grössen. Aber auch diese Negativität hat nur einen Sinn, wenn man sich einen noch weiter links liegenden Punkt G_1 denkt, von dem aus alle Abstände nach rechts hin absolut bestimmbar werden; denn das negative x' bedeutet alsdann, dass x' von der neuen festen Distanz $G_1 G = a_1$ abzuziehen ist, um den Abstand $G_1 L = x''$ zu ermitteln. Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch geredet, war es also eine weitere Verlegung des Coordinatenursprungs, wodurch wir den Sinn der als zunächst unmögliche Subtraction entstandenen Negativität sichtbar gemacht haben. Ergiebt sich links von G_1 wiederum Negatives, so braucht man einen entfernteren Punkt G_2, und so fort in unbeschränkter Weise oder, wie man gewöhnlich sagt, ins Unendliche. Nimmt man von vornherein einen Punkt G_n in so grosser Ferne an, dass er allen in Frage kommenden Bedürfnissen entspricht, also über jede Entfernung hinausliegt, innerhalb deren noch Abstände in Frage kommen, so zeigt sich, dass jeder negative Abstand von irgend einem nach rechts liegenden festen Punkte die Bedeutung hat, von der Distanz des entferntesten Punktes abgezogen zu werden. So ergiebt sich dann keine Unmöglichkeit mehr, und jede zunächst unmögliche Subtraction ist als in dem neuen Zusammenhang ausführbar nachgewiesen.

Gesetzt wir hätten die entfernteren Punkte D, D_1 und so fort bis D_n rechtshin von O analog betrachtet, wie wir dies mit G, G_1 u. s. w. gethan haben, so würde sich Alles entsprechend gestaltet haben, jedoch mit einem wichtigen Unterschiede. Die maassgebende Rechnung der Abstände von dem äussersten Punkt

D_n macht die Zählung nach links hin zum herrschenden Gesichtspunkt. Diese Entfernungen sind also die absoluten oder vielmehr positiven, während es vorher umgekehrt sich gestaltete. Zählt man daher vom Punkt O nach rechts, so müssen diese Abstände das Merkzeichen — erhalten, und die Abstände von O nach links hin sind demgemäss positiv, weil sie die Entfernung des O vom Punkte D_n vermehren. Das Interessante hiebei ist, dass die Wahl von Plus und Minus zu beiden Seiten des Coordinatenursprungs O nicht mehr als willkürlich erscheint. Unser traditionelles System mit dem Negativen zur Linken setzt voraus, dass man alle Abstände, wenn man sie verändert ausdrückt, auf einen äussersten Punkt beziehe, der auch zur Linken liegt. Dies ist in der That stillschweigend oder unbewusst der Fall, indem bei einer Verschiebung des Coordinatenursprungs ebenfalls diejenige nach links als die Regel gilt.

Will man dennoch mit dem Coordinatenursprung nach rechts gehen und das Negative immer links behalten, so wird man genöthigt, entweder die absolute Zählung gleich negativ zu nehmen, also alle directen Distanzen vom äussersten Punkt negativ zu nennen, was sich auf den ersten Blick als unnatürlich, geschraubt und an sich grundlos kennzeichnet, — oder aber die Distanzen vom äussersten Punkte D_n selbst auf den äussersten Punkt G_n zu beziehen. In letzterer Weise wird, was auch auf keinem andern Wege zu vermeiden ist, der Gesichtspunkt der Rechnung vom äussersten Punkte links her der allbeherrschende, indem er zugleich bei der Verlegung des Coordinatenursprungs nach rechts wieder das Maassgebende wird. Es ist also jedesmal nur ein einziges System möglich, und wechselt man den Standpunkt der Urzählung der Abstände, indem man ihn von der einen Seite der unbeschränkten Linie nach der andern verlegt, so muss man auch die Seiten von Minus und Plus wechseln.

Wie wir von links nach rechts und nicht umgekehrt schreiben, so sind wir auch gewohnt, die negativen x auf der linken Seite von O zu setzen, d. h. also nach dem Bisherigen, alle Abstände von einem äussersten linken Punkte als absolute zu addiren. Dieses Zählen von links nach rechts ist das uns natürliche, wie ja auch in der Zahlenreihe; denn wir sind keine Hebräer. Letztere müssten, da sie von rechts nach links schreiben, Alles umgekehrt machen, wenn sie mit ihrer Eigenart auch in die Mathematik eindringen wollten. Sie müssten absolut von

der Eins nach links zählen, die negative Zahlenreihe nach rechts setzen und ebenso die beiden Theile der Coordinatenlinie vertauschen. Ihr äusserster Punkt, von dem sie Alles zählten, müsste in unbeschränkter Weite nach rechts liegen. Mit den übel angebrachten Einwendungen, dass an sich rechts und links gleichgültig sei, ist hier als mit zu oberflächlichen Trugwendungen keine Zeit zu verlieren. Nicht blos in Beziehung auf unsern Vorstellungsraum, sondern auch noch besonders in der Wirklichkeit in Beziehung auf die jedesmalige Lage unseres sehr realen Körpers haben diese Unterschiede die vollste sachliche Bedeutung.

Nehmen wir zu der einen Coordinatenlinie in der vor uns liegenden Fundamentalebene, auf der wir zeichnen, eine zweite O rechtwinklig schneidende hinzu, so ist die Rechnung der Abstände im Sinne des nach oben errichteten Loths, also von O nach dem ebenen Theil über der Linie, die sich natürlich zunächst darbietende und auch gewohnheitsmässig angenommene. Die Rechnung von unten nach oben wird sich bei der dritten Coordinatenaxe wiederholen, so dass nunmehr das System für die drei Dimensionen des Raumes völlig bestimmt ist. Was von der ersten Axe auseinandergesetzt worden ist, gilt selbstverständlich von den beiden andern. Die eine der acht Ecken des rechtwinklig getheilten Raumes ist mithin sozusagen mit positiven Kanten ausgestattet, und diese Wahl der einen Ecke vor allen andern hat ihren Grund lediglich, aber auch zureichend in unsern sonstigen Gewohnheiten des Thuns und Vorstellens. Bleiben wir jedoch bei zwei Coordinatenlinien in der Ebene, und werfen wir, ehe wir zu der allgemeinen Grundaufgabe zurückkehren, einen Blick darauf, wie es sich mit der Zählung der Winkelabstände im einfachsten Falle ebener Polarcoordinaten verhalte. Hier ist die Gewohnheit die, den Leitstrahl sich von der positiven Axe im positiven Quadranten, und dann in diesem Sinne weiter, drehen zu lassen. Dies ist nur eine natürliche Folge der oben gekennzeichneten Festsetzungen für das rechtwinklige Coordinatensystem. Die Linksdrehung ist also hier ein nothwendiges Zubehör. Es würde zu weit führen, Derartiges noch in Complicationen zu verfolgen. Es ist genug, dass sich die innere Systematik von Dingen ergeben hat, die sonst als zufällig betrachtet werden.

7. Nicht blos im gewöhnlichen Unterricht, sondern auch überhaupt in der mathematischen Literatur werden die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen, also beispielsweise der

Cosinus, nicht weiter erklärt, als durch die Hinweisung auf die allgemeine, empirisch erprobte Correspondenz von Richtungsgegensatz und Vorzeichengegensatz. Dies heisst, eine gemachte Beobachtung äusserlicher Art mittheilen, aber den Grund dieser Erfahrungsthatsache auf sich beruhen lassen. Es versteht sich, dass hiebei zunächst die Cosinuslinien in Frage sind. Die Vorzeichen der Cosinus als unbenannter Zahlen sind erklärt, sobald diejenigen der Cosinuslinien es sind; denn man hat nur durch den absolut genommenen Radius zu dividiren, um die Function als unbenannte Zahl zu erhalten. Von einer rein analytischen Begriffsbestimmung der Cosinus sehen wir hier ab; aber auch in einer solchen ist das Vorzeichen bisher noch nicht auf einen letzten Grund zurückgeführt worden. Ueberhaupt liegt das Gebiet der rein analytischen Definition aus nichts als allgemeinen Grössengleichungen, denen gegenüber geometrische Grössen etwas Zufälliges sind, noch sehr im Argen, insofern nämlich dabei ernsthaft und ohne Erschleichungen die Forderung zu erfüllen ist, dass die geometrischen Begriffe nicht stillschweigend die Unterlage bilden, also nicht ein logischer Cirkel begangen werde. Jedoch dies noch gar sehr der Klärung bedürftige Gebiet braucht, wie gesagt, hier nicht in unsere Erörterungen hineingezogen zu werden, da der an dieser Stelle in das Auge gefasste Hauptzweck dies nicht mitsichbringt. Wir sagen also einfach, dass die Vorzeichen der Cosinusdimensionen nicht zureichend, ja in der Hauptsache gar nicht erklärt werden. Eine negative Cosinuslinie ist eine unter Umständen abzuziehende Länge. Warum, wird nicht gesagt; ja damit die Frage nicht entstehe, wird nicht einmal das Dass in den Elementen formulirt. Es werden den Functionen die Vorzeichen angeheftet, als wären diese Vorzeichen vom Himmel gefallen, und man fügt mehr als Merkzeichen denn als Grund hinzu, dass beispielsweise die Cosinuslinie des stumpfen Winkels, also eines Winkels im zweiten Quadranten, auf der Axe in entgegengesetzer Richtung gezählt werde. Die Umstände aber, dass es sich bei jeder negativen Grösse um ein eventuelles Subtrahiren handeln müsse, und dass dieser Gesichtspunkt ihr erst einen Sinn gebe; alsdann aber, wie hier das Subtrahiren zu denken sei, — diese Dinge bleiben ausser dem Gesichtskreise. Auch konnten sie in der That in ihn nicht eintreten; denn es fehlte bisher an einer völlig bewussten Grundlegung für diese ganze Gattung Fragen. Wir

unsererseits haben nichts nöthig, als unsere obigen Ergebnisse anzuwenden. Wir beziehen alle Abstände auf den gekennzeichneten, äusserst entfernten Punkt, machen so den algebraischen Sinn des Negativen auf der Coordinatenaxe kenntlich und fügen bezüglich der Cosinuslinie nichts weiter hinzu, als dass eben auch sie ein auf diese Weise zu behandelnder und demgemäss algebraisch zu signirender Abstand ist. Indem der Winkel von der positiven Axe aus wächst, zeigt sich das Bekannte für die verschiedenen Quadranten, erklärt sich aber erst aus dem letzten Grunde nach Maassgabe unserer allgemeinen Ableitung der Coordinatenvorzeichen. Besonders hervorzuheben ist nur noch, dass die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen demgemäss nur im Hinblick auf einen anderweitigen Rechnungszusammenhang einen Sinn haben. Der nächste Grundtypus dieses Rechnungszusammenhangs ist aber irgend eine Verlegung des Coordinatenursprungs, sei es in der einen Axe oder sonstwohin.

Auf die Form einer Gleichung kann man jeglichen Rechnungszusammenhang bringen, indem man die Reihe der Operationen ihrem Ergebniss gleichsetzt. In unserm Begriff ist nun die Gleichung auch da vorhanden, wo sie nicht ausdrücklich als solche hingestellt wird. Sich denken, dass ein Abstand aus zwei andern Abständen hergeleitet werde, heisst seine Grösse doppelt, nämlich das eine Mal unmittelbar, das andere Mal aber durch eine Rechnung, also etwa als Summe oder als Differenz, vorstellen. Wie einfach also auch ein Rechnungszusammenhang sein möge, in jedem Fall kann man eine Gleichung ansetzen, und die negativen Linien haben einen Sinn eben nur in Beziehung auf eine solche Gleichung. Die Gleichung kann unmittelbar geometrisch sein oder aber durch Uebergang zu allgemeinen Grössenzeichen bereits abstracter formulirt sein. In beiden Fällen enthält sie den Kern der Sache, und die analytische Sprache thut eben nichts, als das absondern, was rein der Rechnung mit Grössen überhaupt angehört. Der Algorithmus der Operationen, also hier besonders die algebraische Combinationsart der Vorzeichen, muss als festgestellt vorausgesetzt werden, und zwar als frei von allem Mysticismus; denn es handelt sich dabei um nichts als um logische Folgen der Begriffe vom Addiren und Subtrahiren. Beispielsweise wird die Nothwendigkeit, dass das Minus des Minus Plus ist, am Abziehen einer Differenz nachgewiesen und hiemit ist auch der Beweis auf seinen letzten Grund

zurückgeführt. Derartiges setzen wir als nebelfrei voraus, obwohl man es in neuster Zeit auch hat umnebeln wollen. Hienach können wir also mit voller Sicherheit einen rechnenden Gleichungszusammenhang als Schlüssel zum Sinn der Vorzeichen handhaben, mag dieser Zusammenhang nun unmittelbar vorliegen oder erst zu suchen sein, mag er rein geometrisch oder aber bereits analytisch ausgedrückt werden. Man erinnere sich nämlich immer wieder, dass Addiren und Subtrahiren Begriffe sind, die nicht erst durch die analytische Zeichensprache, ja nicht einmal erst durch die Arithmetik ihr Dasein erhalten haben. Diese Grundbegriffe waren vielmehr schon überall vorhanden, wo man Grössenstücke vereinigte oder trennte, mochte es sich nun um Linien, Gewichte oder sonst etwas Quantitatives handeln.

8. Auch abgesehen von einfachen Gleichungen für die Beziehung verschiedener Coordinatenursprünge muss es immer irgend eine Gleichung sein, in welcher sich der Zeichensinn der trigonometrischen Functionen bethätigt. Ein typisches Beispiel hiefür ist der erweiterte Pythagoreische Satz. Er lautet für das spitzwinklige Dreieck bekanntlich $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,cos\,\gamma$. Der spitze Winkel liegt im ersten Quadranten. Geht man in den zweiten, so wird der Winkel stumpf und sein Cosinus negativ. Hätte man nun nicht von vornherein signirte Cosinus, d. h. nähme man die den Cosinuslinien entsprechenden Stücke immer absolut, wie in der antiken Elementargeometrie, so müsste man noch eine zweite Gleichung ansetzen. Bezeichnet ac den absoluten Cosinus, so wären also die beiden Gleichungen erforderlich $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,ac\,\gamma$ und $c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\,ac\,\gamma$. Dieses Beispiel ist darum so lehrreich, weil man dabei sieht, wie die Unterordnung unter besondere Coordinaten die Sache wohl deutlicher macht, aber nicht nothwendig ist. Dem beschränkten Geist zufolge, den die ganze antike Geometrie, namentlich aber die Euklidische Elementargeometrie, athmet, hätte man die Cosinusfunction zu vermeiden, also, entsprechend $b\,cos\,\gamma$, nur von einem Abschnitt zu reden, der durch ein Loth vom Endpunkt des Schenkels b auf a gebildet wird, und dann das doppelte Rechteck aus dem Schenkel a und dem Abschnitt auf ihm als Abzug oder Zusatz zu den Kathetenquadraten als Merkmal der Erweiterung des Pythagoreischen Satzes nachzuweisen. Nicht einmal von Projection dürfte man reden; denn dieser Ersatz für die Cosinuslinie $b\,cos\,\gamma$ wäre schon zu modern und brächte so-

fort eine Lehre von den Vorzeichen der Projectionen mit sich. Man hat also, um nicht mit Rechnungsanspielungen modern vorzugreifen, die Subtraction oder Addition handgreiflich geometrisch für die zwei Fälle des spitzen und des stumpfen Winkels besonders zu zeigen. Diese Umständlichkeiten aber sind es, die einfürallemal abgethan werden, wenn man die Lage nach Maassgabe von Coordinaten zu einem durchgängigen Bestandtheil jeglicher Geometrie macht. Dies ergiebt nicht etwa eine besondere Geometrie der Lage, sondern jede systematisch behandelte Geometrie, sei sie noch so elementar, hat diesen Gesichtspunkt aufzunehmen. Andernfalls müht sie sich nur mit irgend einem antiken Ersatz ab, der im Grunde einen Theil des modernen Gesichtspunktes in embryonischer und verhüllter Weise schon enthält, ihn aber nicht zum Bewusstsein bringt, geschweige den ganzen Gesichtspunkt als eine leitende Regel hinstellt.

Jedoch auch die moderne Geometrie, im weiteren Sinne des Worts modern, also die der neuern Jahrhunderte, welche eine analytische Behandlung zur Hauptvoraussetzung hat, aber auch die mehr anschauliche Phase im Sinne Monges und seiner projectivischen Nachfolger einschliesst, — diese Geometrie der Neuern hat sich ebenfalls nicht auf die letzte Richtschnur der in ihr als erprobt geltenden Vorzeichenrollen besonnen, und ist daher auch nicht im Stande gewesen, zu völlig sichern Anhaltspunkten zu gelangen. Sie hat sich im Gebiet der Vorzeichen, sowie bezüglich des Parallelismus von Analysis und Geometrie eigentlich nur tappend bewegt. Sie ist nicht einmal im Stande gewesen, die durchgängige Correspondenz beider Gebiete ohne zweiflerische Beimischung zu behaupten, geschweige sie als ausnahmslos zu erweisen. Grade Poncelet, der nach Monge unter den mehr anschaulichen Geometern des 19. Jahrhunderts der geistreichste Schriftsteller gewesen ist, hat sich in der fraglichen Beziehung nur unsicher und tastend verhalten können.

Unsere Ausführungen gelten zugleich einer systematischen Grundlegung der ganzen Mathematik und einer Klarstellung des Zusammenhangs ihrer Theile, und dieser Umstand ist mindestens ebenso wichtig, wie die zugehörige Aufstellung handgreiflich neuer Wahrheiten. Es ist aber aus diesem Grunde auch einige Geduld nöthig, welche bei den Elementen verweilt; denn die Elemente sind hier leider noch nicht Schultrivialitäten, sondern erst festzustellende Principien, die alles Weitere

beherrschen. Nehmen wir als nächstes typisches Beispiel die Gleichung der graden Linie in der Ebene nach rechtwinkligen Coordinaten. Die Linie möge, das sei die bestimmtere Vorstellung, die beiden positiven Axentheile schneiden. Wir haben nun nach Bezeichnungen, die sich jeder Kenner der üblichen Darstellungen ohne Weiteres auslegen wird, herkömmlich die Geichung $y = a - \beta x$. Diese Gleichung soll allgemeingültig sein, ist aber unmittelbar nur eine Gleichung für den ersten Quadranten und bleibt dies, solange y und x als absolute Grössen genommen werden. Die grade Linie liegt aber ausserdem noch im zweiten und vierten Quadranten, und für jeden dieser beiden Fälle brauchen wir eine neue Gleichung, nämlich $y = a + \beta x$ und $-y = a - \beta x$.

Diese drei Gleichungen werden zureichend durch die erste repräsentirt, sobald man x und y stillschweigend auch als möglicherweise negativ voraussetzt. Das leitende Princip kann in der Geometrie und in jeder andern Anwendung der Analysis kein anderes sein als in der Analysis selbst. Es besteht nämlich darin, dass eine einzige Verbindung von Operationen an absoluten Grössen als maassgebende Gleichung hingestellt wird, und dass man sich eine besondere Aufstellung der übrigen Gleichungen erspart, indem man die Buchstaben eventuell auch negative Werthe vorstellen lässt. Durch die Geometrie wird dieser Sachverhalt nur besonders anschaulich; übrigens ist er ein, wenn auch bisher unausgesprochenes Grundprincip aller Analysis. Ausserdem sei bemerkt, dass wir grade auf die Gleichung ersten Grades eingehen mussten, weil aus ihr das Negative in der einfachsten Weise entspringt, da bereits jede unvollziehbare Subtraction eine Gleichung in sich schliesst, deren Unbekannte, wenn sie absolut gesetzt wird, eben als absolute Grösse unmöglich ist. Demgemäss verwandelt sich die Gleichung durch die negative Lösung in eine andere, wenn man nämlich das substituirte Minuszeichen im Rechnungszusammenhange zu einem gewöhnlichen Operationszeichen macht, d. h. die ihm zugesellte Grösse als absolute fungiren lässt.

Im Beispiel der Coordinaten auf einer Axe ist es an sich willkürlich, welche Seite vom Ursprung man als absolut nehme. Was nicht willkürlich ist, sind nur unsere, wie oben gezeigt, wohlbegründeten Gewohnheiten. Anderweitig giebt es aber Fälle, wo auch die Natur der Dinge jede Wahl ausschliesst. Die Zeit

als Grösse kann nur in einem einzigen Sinne addirt werden, da man zwar vielen Widersinn, aber, wie es scheint, doch noch keine rückwärts fliessende Zeit zu Markte gebracht hat. Die Seite des Negativen in der Zeitlinie ist daher immer bestimmt, weil alle Abstände in der Zeit, wo man auch den Ursprung für die Zählung setzen möge, dadurch unter einen Gesichtspunkt kommen, dass man sie auf einen äusserst entfernten, über alle fraglich werdenden Grössen hinausliegenden Punkt der Vergangenheit bezieht. Die Zeitgrösse addirt sich in der Natur nur in einer Richtung, und es wäre daher von vornherein eine Kopfstellung, von einem äussersten Punkt der Zukunft Alles rückwärts zählen zu wollen, ganz abgesehen von der Unausführbarkeit. Ein anderes Beispiel für die natürliche Vorzeichnung des Positiven sind die Wärmegrade, und zwar nicht erst seit man einen absoluten Nullpunkt festsetzt. Ueberhaupt kann die Veränderung einer Thermometerskala in eine andere den Sinn des Negativen recht einfach lehren, indem sich hiebei für Jedermann zeigt, wie die Kältegrade nichts weiter als abzuziehende Wärmegrade sind.

Aus allem Bisherigen begreift sich auch, dass jedwede Grössengattungen dafür empfänglich, wenn auch nicht immer grade praktisch dazu geeignet sein müssen, als selbständige Negativitäten zu fungiren. Auch können sie demgemäss allesammt Veranlassung zu unmöglichen Subtractionen geben. Jede so entstehende negative Grösse ist an sich eine wirkliche absolute Grösse, die aber in Beziehung auf einen bestimmten Rechnungszusammenhang (nicht also etwa in Beziehung auf jede beliebige Rechnung, in der man sie brauchen will), die Eigenschaft hat, verbunden mit dem Subtractionszeichen eingesetzt werden zu müssen. Wollte man etwa, um auf der Axe die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, die zu beiden Seiten des Coordinatenursprungs liegen, die positive und die negative Abscisse nach Maassgabe ihrer Vorzeichen addiren, also in absoluter Weise die Differenz bilden, so käme dieser handgreifliche Widersinn daher, dass man das Negative als überhaupt negativ, also als unter allen Umständen subtractiv genommen hätte, während es doch nur ein Rechnungs- oder Gleichungszusammenhang von bestimmter, angebbarer Gattung ist, im Hinblick auf den das Minuszeichen einen Sinn hat. Die herkömmliche Ideenverknüpfung mit dem Richtungsgegensatz hat eine Auffindung des wahren Sinnes erschweren müssen, wie dies jede blos empirische

Schablone in ähnlichen Fragen überall thut. Um so wichtiger ist es, zu dem Aufschluss zu gelangen, dass auch die Imaginarität jeder Grössengattung eigen sein kann, und dass sie im Hauptprincip keinen wesentlich andern Sinn hat und im Gebrauch grundsätzlich nicht mehr zu scheuen und zu beschränken ist, als ein Operiren mit negativen Grössen.

Zweites Capitel.

Aufschluss über den analytischen und sonstigen Sinn des Imaginären.

1. In der Analysis hat sich das Imaginäre auf keine wesentlich andere Weise eingefunden, als das Negative. Wie letzteres in der Rechnung sich einstellte, sobald eine unmögliche Subtraction in Frage kam, so ist auch das Imaginäre nichts als eine weitere Complicirung dieser Unmöglichkeit; denn es läuft in allen Fällen darauf hinaus, dass eine Quadratwurzel aus dem Negativen als unmögliche, d. h. unvollziehbare Operationsverbindung stehen bleibt. Man kann diese Verbindung des Quadratwurzelzeichens mit dem Minuszeichen wiederum als ein neues Vorzeichen betrachten, welches vor Grössen tritt, an denen die Wurzelausziehung bereits vollzogen ist. Demgemäss würde dieses aus zwei Bestandtheilen zusammengesetzte Vorzeichen nichts sein, als das Negative, aber unter dem Zeichen der Quadratwurzel. Es würde eine Subtraction bedeuten, deren Vollziehung erst in Frage kommen könnte, sobald durch eine Quadrirung die entsprechenden Umstände wiederhergestellt wären. Die Einheit unter das Wurzelzeichen zu setzen, ist hienach nicht blos überflüssig, sondern auch eine Gewohnheit, welche die Aufmerksamkeit von dem Kern der Sache ablenkt. Grade sie ist besonders Schuld daran, dass man schon die Fragestellung über das Imaginäre verfehlt, nämlich für die Quadratwurzel aus der negativen Einheit einen besondern Sinn gesucht hat, so dass die Angelegenheit, unter den Händen von Leuten wie Gauss, schliesslich gar in das Mystische und Absurde verfahren worden ist.

Um sich selbst an den erforderlichen Grad von Abstraction zu

gewöhnen, mag man sich das Wurzelzeichen mit dem Minuszeichen in einem Zuge geschrieben denken. Hiedurch hat man auch ausserdem noch den Vortheil, zugleich anzudeuten, dass sich das Wurzelzeichen nicht auf die nachfolgende Grösse erstreckt, sondern sich nur auf das Minuszeichen bezieht und mit diesem zusammen gleichsam eine Vorbemerkung zur beistehenden absoluten Grösse vorstellt. Alsdann ist eine Wurzel nicht weiter auszuziehen; denn diese Operation ist an der absoluten Grösse entweder vollzogen oder wenigstens selbständig angezeigt oder auf reelle Weise vollziehbar. Was übrigbleibt, ist nur der reine Widerspruch zwischen dem Quadratwurzelzeichen und dem Minuszeichen. Das isolirt Negative war aber auch schon ein Widerspruch; denn es bedeutete die unausführbare Abziehung von Null. Wenn man also ein neues zusammengesetzteres Vorzeichen von reichhaltigerem Widerspruch einführt, so ist dies im Wesentlichen nur die Fortsetzung der alten Wendung. Unmöglich war das Negative; unmöglich ist auch das Imaginäre; nur gleichsam die Constitution beider Unmöglichkeiten ist verschieden. Alle Rechnung mit dem Imaginären ist, um sie, was bisher nicht geschehen ist, logisch richtig zu kennzeichnen, eine Durchführung des Gedankenganges durch das Unmögliche. Ebenso verhält es sich aber auch mit dem isolirt Negativen und nur die eingewurzelte Gewohnheit hat dies verkennen lassen. Im indirecten Beweise wird noch mit ganz andern Unmöglichkeiten operirt; aber Niemandem ist es eingefallen, die Setzung des Unmöglichen als unmöglich von vornherein als ein unentbehrliches und fruchtbares Mittel zu betrachten, um in den Gedankenoperationen ohne Hindernisse weiter zu kommen. Von einer solchen allgemeinen Form der Gedankenbewegung ist die Rechnung mit dem Imaginären ein specieller Fall.

Die Grössen, die dem erwähnten Imaginärzeichen folgen, sind gradeso etwas Wirkliches, wie die Zeichencombination selbst etwas Unmögliches vorstellt. Sie sind auch nicht weniger wirklich, als diejenigen Grössen, welche dem isolirten Minuszeichen folgen; denn was sich daran als unmöglich darstellt, ist nicht die Grösse, sondern die zugehörige Operation. Hieraus folgt mit einem Schlage, dass, was für die Analysis von Grössen überhaupt gilt, auch für jede Grössengattung gelten muss. Es folgt also speciell, dass es imaginäre Linien in einem ähnlichen signitiven Sinne giebt, wie negative. Ja noch mehr! imaginäre Grössen haben, wo sich das Bedürfniss einstellt, nicht blos als geometrische,

sondern auch als mechanische und als physikalische, ja überhaupt in jedem Gebiete der Rechnungsanwendung einen Sinn. Sie sind nämlich gemeine wirkliche Grössen, die aber in Bezug auf einen Rechnungszusammenhang mit gewissen Vorbemerkungen versehen sind, die wir sämmtlich Vorzeichen nennen wollen.

Wurzelminus (nicht etwa Wurzel aus Minus), ist der am nächsten liegende Ausdruck für das neue zusammengesetzte Vorzeichen. Die Gaussische Bezeichnung der imaginären sogenannten Einheit, d. h. von $\sqrt{-1}$, mit i, die in Deutschland schon stark in Gebrauch ist, und auch anderwärts mit unterläuft, steht aber gradezu der schärfer denkenden Abstraction im Wege. Sie verschmilzt, was wenigstens für das erste rechte Verständniss getrennt gehalten werden muss. Allerdings hat sich $\sqrt{-1}$ als abgelöster Factor schon in den frühern Jahrhunderten unwillkürlich, ja maschinenmässig in der Rechnung eingefunden; aber es ist doch nur der Mangel an höherer Abstraction gewesen, der bisher die Schuld trug, dass die Eins aus $\sqrt{-1}$ nicht ferngehalten, bei der nachfolgenden Grösse belassen, und, wo diese Grösse etwa selbst nichts weiter als die Einheit ist, nach statt unter dem Wurzelzeichen gesetzt wurde. Die wahre imaginäre Einheit in unserm Sinne ist nicht $\sqrt{-1}$, sondern $\sqrt{-}\,1$. In der That ist so erst die imaginäre Einheit der positiven und negativen analog; denn sie ist nur auf diese Weise in derselben einen Dimension dargestellt, während sie sich sonst nur in ihrem Quadrat unter dem Wurzelzeichen vorfindet. Die richtig gedachte imaginäre Einheit ist eben nichts Anderes als die absolute Einheit, versehen mit einem blossen Rechnungsvorzeichen. Schon der Sinn für Homogeneität nöthigt dazu, die Einheit wie jede andere Grösse zu behandeln.

2. Hätte man, als man fast maschinenmässig zu den negativen Grössen gelangte, von vornherein besser aufgepasst und sich gehörige Rechenschaft von dem gegeben, was bei der Hantirung vorging, so wären alle Einbildungen abgeschnitten gewesen. Hiezu gehörte aber auch mehr Ehrlichkeit gegen sich selbst und gegen Andere, als sich gemeinhin vorfindet. Man wäre sonst bei dem Begriff und der Benennung falsche statt negative Wurzeln länger geblieben und hätte sich an diesem Begriff schliesslich genauer orientiren können. Statt dessen thaten Unachtsamkeit, Unredlichkeit und autoritär maschinenmässige Ueberlieferung das

Ihrige, um eine falsche Verdinglichung der negativen Grössen als besonderer Wesenheiten herbeizuführen. Wo der Meister etwa sich noch eines unrichtigen Gedankens enthalten hatte, übernahm der Schüler das Ding schon wie einen wissenschaftlichen Handelsartikel. Das Minuszeichen wurde mit den Grössen so verschmolzen vorgestellt, als wenn solch eine Verbindung ein Ding für sich wäre. Auf ähnliche Weise gerieth man durch Missdeutung des durch den Algorithmus maschinenmässig aufgedrungenen Imaginären zu jenen Chimären, die dann wiederum die Ursache von ebenfalls chimärischen Problemen wurden. Es war schon eine falsche Aufgabestellung, nach dem vorgeblichen Dinge $\sqrt{-1}$ zu fragen. Jeder solcher Frager hat damit, wie wir jetzt klar nachweisen können, seine Unkunde und seinen Mangel an Urtheil blosgestellt. Nie wäre $\sqrt{-1}$ ein Räthsel geworden, wenn man von vornherein den sichern Weg klarer Begriffe festgehalten hätte. Statt dessen ist man bald in einen mathematischen Aberglauben gerathen, bezüglich dessen nur so klare Geister, wie ein Lagrange, in einer unbetheiligten Zurückhaltung verblieben. Aber auch dieser wirklich hohe mathematische Denker ging in diesem Punkt nicht auf die ersten und einfachsten Begriffe zurück. Er begnügte sich damit, keinen Widersinn zu colportiren und sich ohne weitere Erklärungen auf den Algorithmus der Rechnung zu beschränken. Auch hielt er den Ausdruck unmöglich bei den Wurzeln noch fest, was doch wenigstens nach einer Seite hin dem Wesen des Imaginären entsprach. Falsche Wurzeln anstatt negative und unmögliche Wurzeln anstatt imaginäre, — diese Ausdrücke der ältern Algebraisten waren Zeiger zum richtigen Wege, und man hat dieser Ueberlieferung sowie dem Umstande, dass noch ein Lagrange wenigstens den Ausdruck unmögliche Wurzeln beibehielt, es zu danken, dass sich die hier vorgelegte Klarstellung der Sache auch mit einer historischen Anknüpfung erläutern kann.

Einem so klaren und grossen Mathematiker, wie Lagrange es war, konnte es nie einfallen, danach zu fragen, was $\sqrt{-1}$ eigentlich wäre; denn dies hat man stets gewusst, und nur der Aberglaube hat dahinter noch ein Gespenst gewittert. Solchen Aberglauben erbte beispielsweise auch dieser Gauss, dem er wahlverwandt war, und der ihn auf seine Weise noch mehr zur Mystification der noch untergeordneteren Mathematiker ausprägte.

Da holte er z. B. die schon früher dagewesene Einbildung von der geometrisch zu verstehenden mittleren Proportionale wieder hervor, und behauptete auf eigne Rechnung, dass, weil die Proportion $(-1): \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : (+1)$ statthat, also die imaginäre Einheit die mittlere Proportionale zwischen der negativen und der positiven ist, darum auch geometrisch eine Länge auf der Ordinatenaxe die imaginäre Länge sei, nämlich die mittlere Proportionale zwischen negativer und positiver Abscisse. Dies ist nun eine köstliche Phantasie, in der sich noch obenein der ganze Trug der negativen Linie miteingeheimst findet. In der That ist es hochkomisch, eine negative mit der positiven Abscisse multipliciren zu wollen, da schon der blühendste Unsinn zu haben ist, wenn man sie zueinander auch nur addirt. Nach dieser Art von Logik wäre nämlich die Länge zwischen dem Endpunkt der negativen und demjenigen einer gleichen positiven Abscisse ganz unverdrossen Null. Um aber die Sache wieder ernst zu nehmen, was allerdings Angesichts dieser Gaussigkeiten schwer ist, so erinnern wir daran, wie die Minus- und Pluszeichen der Abscissen sie nicht zu besondern Wesenheiten machen, die in jeder beliebigen Rechnung als negative und positive Grössen figuriren dürften, — sondern dass es immer ein bestimmter Rechnungszusammenhang ist, auf den sich die Vorzeichen beziehen, und in welchem allein sie ihre Gültigkeit haben. Ueberdies kann man von vornherein leicht absehen, dass die $-x$ und die $+x$ der Axe nie gleichzeitig in derselben Gleichung, d. h. also nie gleichzeitig in demselben Rechnungszusammenhang, sondern das eine Mal ein $+x$ und das andere Mal ein $-x$ vorkommen. Sie kommen niemals in gegenseitige Rechnungsberührung, also weder in gegenseitige Addition, noch Multiplication, noch sonst eine Operation zwischen ihnen beiden. Uebrigens strauchelt jenes geometrische Stückchen von der mittleren Proportionale für jeden einigermaassen Denkenden und Achtsamen bei jedem ersten Schritt, in welcher Richtung er auch geschehe. Im Kreise ist bekanntlich ein Loth auf den Durchmesser die mittlere Proportionale zwischen dessen durch dasselbe abgetheilten Stücken. Bei den Coordinatenaxen wird künstlich blos die Einheitslänge zugelassen, die wenigstens absolut genommen die mittlere Proportionale zwischen denselben absoluten Einheitslängen ist, die auf der Abscissenaxe nach rechts und links aufgetragen sind. Was über dieses Selbstverständliche

hinaus will, ist Widersinn und geräth sofort ins Stocken. Nirgend ist sonst eine wirkliche Ordinate auf natürliche Weise zu sich darbietenden Stücken auf der Abscissenaxe als mittlere Proportionale in Beziehung zu bringen, auch wenn man von den Vorzeichen noch absehen wollte. Das System der Vorzeichen selbst aber wird sofort verwirrt, wenn man dieselbe Ordinatenaxe, die sonst die gewöhnlichen positiven Ordinaten vorstellt, nun mit einem Male dazu stempelt, wegen ihrer lothrechten Lage zur Abscissenaxe das charakteristisch Imaginäre zu enthalten. Dieser doppelte Beruf der Ordinatenaxe, der aus nichts als ihrer lothrechten Richtung folgen soll, ist zu viel des Guten. Der Umstand, dass man auf ihr reelle Ordinaten zählt, hat mit dem Senkrechten nichts zu schaffen. Ebensowenig hat aber die Zählung wirklich imaginärer Ordinaten, deren natürliche Existenz wir zum ersten Mal zeigen werden, einen wesentlichen Zusammenhang mit dem Lothrechten. Das ganze Phantasiestückchen aber, in aller seiner Unlogik, ist nur dadurch entstanden, dass sich Maschinenhaftigkeit im Calcül mit mystischen Neigungen gattete, und so das Monstrum von Unproblem erzeugte, nach welchem sozusagen das Seelengespenst von $\sqrt{-1}$ gefunden werden sollte.

3. Das erwähnte Unproblem hat sich immer in einer niedern Sphäre, nämlich nur unter den Mathematikern von nebelhaften Vorstellungen bewegt. Die klaren Geister haben sich nie damit abgegeben. Sie verzichteten lieber auf Auslassungen, als dass sie durch Stellung so thörichter Aufgaben eine Lücke, die auch sie empfanden, auf Ausfüllung mit mystischen Absurditäten angewiesen, geschweige selbst damit decorirt hätten. Doch ist, nachdem sich autoritäre Trossführer, wie Gauss, gefunden haben, der Tross ziemlich gross geworden. Ja die Trossmeinung gehört augenblicklich noch, und zwar nicht blos in Deutschland, zu den herrschenden Ansichten. Eine Welttour hat aber dieser Aberglaube doch noch nicht in dem Sinne gemacht, dass er ganz und ohne Abzug überall eingebürgert wäre. Was sich wirklich eingebürgert hat, ist eine weniger schuldige Sache, nämlich die graphische Veranschaulichung einer aus dem Reellen und dem Imaginären gemischten Grösse, für welche Gauss sich als Täufer illustrirt hat, indem er so ein Ding complex nannte. Schade nur, dass er zu seiner Erfindung des i, also sozusagen des Tüttels auf dem Imaginären, nicht auch noch das c hinzugefügt,

und so noch etwas mehr für die mathematische Kurzschrift und Schnellsprache geleistet hat!

Wenn wir von der graphischen Veranschaulichung einer imaginär gemischten Grösse reden, so ist dies eigentlich schon zu viel gesagt. So etwas ist noch nicht einmal geleistet worden; man hat sich eben nur die reellen Einheiten auf der Abscissenaxe, und die imaginären auf der Ordinatenaxe aufgetragen. Auf diese Weise hat man beide Bestandtheile einer gemischten Grösse geometrisch für sich markirt, wie man etwa Temperaturen als Abscissen und Spannungen als Ordinaten verzeichnet. Hier aber möchte man lieber, damit der Geist der Sache gründlichst klar werde, als anderweitiges Beispiel gleich eine nach bestimmten Regeln veranstaltete Zusammengehörigkeit von jedesmal einer gewissen Anzahl Rüben mit einer correspondirenden Anzahl Kohlköpfen zum Typus nehmen. Das wäre gleich das schönste Argument für die Function einer complexen Grösse; denn eine Rüben- und eine Kohlkopfgrösse sind zusammen so complex, wie man es für die imaginäre Grösse eines Gauss und die zugehörige entsprechend grosse Erfindung nur irgend wünschen kann. Also nur frisch Rüben in horizontaler Lage und Kohlköpfe in vertical aufrechter Position, wie Letzteres der Autorität gebührt, und eine neue Geometrie der Position, nämlich der rechtwinkligen, ist gleich der antieuklidischen im Eie fertig! Nur ist beim Gebrauch dieses Musterbildes einige Vorsicht zu empfehlen, damit die neue Geometrie der Lage, deren Name an sich von älterem, nicht grade immer schlechtem Klang ist, nicht als Kohlkopfgeometrie sichtbar werde.

Wenn der Aberglaube zum Humor herausfordert, so ist das nicht seine übelste Eigenschaft. Im Gegentheil wird seine ernsthafte Widerwärtigkeit dadurch ein wenig gemindert. Der Schade aber, den er im fraglichen Fall angerichtet, ist nur zu ernsthaft sichtbar. Im Kinderspiel ist nach den Bedürfnissen des Calcüls der graphische Entwurf als blosses Hülfsmittel für die Analysis entstanden. Man wusste den Lauf von Functionsargumenten, dessen Kenntniss man in der Algebra brauchte, nicht ohne die Krücke der Geometrie darzustellen, und da man zu einer wirklichen Construction imaginärer Grössen nicht vordrang, so machte man sich die gemischte Grösse so vorstellig, als wenn sie in zwei Stücke zerfiele, die nur um die Ecke eines rechten Winkels herum als zwei völlig ungleichartige Wesenheiten eine

Art Zusammenhang haben könnten. Ein der sogenannten Complexen, also dem Reell plus Imaginär, entsprechender Punkt wurde ganz willkürlich dadurch bestimmt, dass er das Reelle zur Abscisse und das Imaginäre, als eine Anzahl imaginärer Einheiten vorgestellt, zur Ordinate haben sollte. Bezeichnen wir in unserer Art, da *i* schon für die imaginäre Einheit in Anspruch genommen ist, die imaginär gemischte Grösse mit *re.* + *im.*, so sollte dieser zweigliedrige Ausdruck nach Gauss in der angegebenen graphischen Darstellung nicht blos den Weg um die Ecke des rechten Winkels, sondern auch absurder Weise gradeswegs die Entfernung zwischen dem Ursprung der Coordinaten und dem bestimmten Punkt, also die Hypotenuse zu der Kathete *re.* und der Kathete *im.*, ausdrücken. Derartiges an Widersinnigkeiten wurde im Dunkeln orakelt. Tappend und täppisch zugleich kamen so autoritär mystische Ungereimtheiten zu Markte. Der Hauptschade aber, den sie anrichteten, bestand weniger in der Fortpflanzung des Unsinns, als in der Verbrämung jenes graphischen Hülfsmittels mit dem trügerischen Schein einer Bedeutung für die Geometrie. Jeder wirkliche Fortschritt zum Verständniss imaginärer Linien musste da aufgehalten werden, wo jene Dinge autoritär maassgebend einen Eindruck machten. Freilich waren Leute, welche, wie Cauchy, in so etwas hängen bleiben konnten, auch übrigens nicht danach beschaffen, einen solchen Fortschritt zu bewirken. Schon die graphische Darstellung allein führte vom bessern Wege ab; denn sie zertheilte von vornherein unnatürlich, was der Regel nach in eine Linie zusammengehörte, — nämlich die beiden Bestandtheile des Complexen. Eine gemischte Grösse ist eben eine, und das Zeichen der algebraischen Summe kein nichtssagendes Symbol von schattenhaftem Scheincharakter, dessen unmittelbare und eigentliche Bedeutung man ungestraft ignoriren oder gar leugnen dürfte.

Alles kommt darauf an, eine blos graphische Veranschaulichung als willkürlich empirischen Nothbehelf der Analysis zu verwerfen, dagegen in der Geometrie eine wirkliche Construction des Imaginären zu zeigen. Freilich ist Letzteres, wie wir schon angedeutet haben, nur ein Theil der verstandesmässigen Sinnesbestimmung imaginärer Grössen, aber grade derjenige Theil, mit welchem man sich wenigstens annähernd zu dem Niveau herablassen kann, auf welchem sich die bisherigen Fragen und vorgeblichen Lösungen gehalten haben. Wir werden die imaginär gemischten Linien wie die rein imaginären

nachweisen und zwar in einem analogen Sinne, wie die negativen Linien. Die Zerlegung des Zusammengesetzten in das Einfache und der Ausgang vom Einfachen sind aber wissenschaftstheoretisches Grundgesetz, und demgemäss kann der Sinn der gemischten Grösse nicht eher dargethan werden, als bis derjenige der rein imaginären festgestellt ist. Letzteres muss zuerst analytisch und erst dann geometrisch geschehen; denn auch im rein Analytischen fehlt es noch gar sehr an Klarheit und auch an den erforderlichen positiven, d. h. etwas Neues setzenden Gedanken.

4. Jegliches Imaginäre führt auf das aus quadratischen Beziehungen entstehende Imaginäre als auf seinen einfachsten Bestandtheil zurück. Das einfachste Imaginäre, und zwar ohne reellen Beisatz, ergiebt sich daher aus einer einfachen Form der ungemischten quadratischen Gleichung, nämlich $z + y^2 = a$. Hier sind alle Grössen als absolut gesetzt, und z soll die unabhängige Veränderliche sein. Nebenbei bemerkt, braucht man unter Veränderung nicht nothwendig stetige Veränderung zu verstehen. Letzteres würde der Allgemeinheit der Analysis Eintrag thun. Veränderung einer Grösse im allgemeineren Sinne ist auch vorhanden, wenn man ihr verschiedene von einander getrennte Werthe giebt. Setzt man nun für z einen Werth grösser als a, so ist die Lösung $y = \sqrt{a - z}$ in dem gewöhnlichen Sinne, nämlich insofern eine absolute oder negative Grösse verlangt wird, unmöglich. Auch sieht man hiemit, dass eine Differenz unter dem Quadratwurzelzeichen, in welcher der Subtrahendus durch irgend eine Veränderung grösser wird als der Minuendus, das vorher Reelle imaginär werden lässt. Die Constitution der Formel bleibt dabei ganz dieselbe; überhaupt kann man es ihr und den Buchstaben nicht ansehen, ob man es mit dem Reellen oder dem Imaginären zu thun habe. Die richtige Auffassung ist demgemäss die, dass man jederzeit eine Allgemeinheit vor sich habe, welche den reellen und den imaginären Zustand der Grössenverhältnisse als besondere Artungen umfasst. Der Algorithmus, d. h. der Inbegriff der Rechnungsoperationen ist für Beides identisch, und es gehört zu den komischen Erscheinungen unserer Zeit, dass man durch Gauss auch noch darauf gerathen ist, die Gültigkeit und den analytischen Sinn des gewöhnlichen Algorithmus für Operationen mit sogenannten complexen Grössen noch erst aus der erwähnten graphischen Darstellung erweisen zu wollen. Für den Analytiker wird eine imaginäre Grösse erst dadurch sichtbar,

dass Thatsachen oder Festsetzungen über Grösser und Kleiner vorliegen. Andernfalls hat er keine Veranlassung, den allgemeinen Operationen, die ohne Unterschied für jeglichen Fall gelten, eine specielle Wendung zu geben.

Die fragliche specielle Wendung besteht nun darin, dass die unmögliche Differenz in eine mögliche umgekehrt, d. h. gleichzeitig — 1 als Factor herausgenommen, die Wurzel aus der absoluten Grösse ausgezogen oder als ausgezogen angedeutet und hiedurch eine absolute Grösse hergestellt wird, die nur noch den Factor $\sqrt{-1}$ vor sich hat. Unter der oben gemachten Voraussetzung erhält man also bekanntermaassen $y = \sqrt{-1} \times \sqrt{z-a}$. Hier ist $\sqrt{-1}$ die imaginäre oder, wie man auch dem älteren Sprachgebrauch entsprechend sagen kann, die unmögliche Einheit. Die Zahlentheorie oder sogenannte höhere Arithmetik hat den Ausdruck imaginäre Einheit am einseitigsten verwerthen können, weil in jenem Gebiet die Einheit nur als Zahl in Frage ist. Anderwärts hätte man schon an der Verdoppelung der Grössendimension Anstoss nehmen sollen, die entsteht, wenn man sich etwa verleiten lässt, das 1 in $\sqrt{-1}$ als benannte Grössengattung, also beispielsweise als Linieneinheit, nehmen zu wollen. Letzteres ist jedenfalls nur dann möglich, wenn man den folgenden Ausdruck $\sqrt{z-a}$ seiner Benennung entkleidet und zur abstracten Zahl stempelt. Dies ist aber wiederum unnatürlich und nur in der Zahlentheorie gleichgültig, aus welcher sich Gauss' Vorstellungen herschrieben. Die imaginäre Einheit ist also naturgemäss abstracte Zahleneinheit, und die oben erwähnte Gaussische Graphik auch in dieser Beziehung schief gerathen, da sie Linieneinheiten zu verzeichnen meint, in der That aber nur Zahleneinheiten, symbolisirt durch Linienstücke, behandelt.

Wir denken uns also $\sqrt{-1}$ als unbenannte Zahlengrösse und belassen die Grössengattung bei der absoluten Grösse selbst. Dies geschieht unter Voraussetzung des alten, in gewissen Richtungen unwillkürlich entstandenen Herkommens, $\sqrt{-1}$ als Factor herauszuheben und nicht, wie wir es für das vollere Verständniss angezeigt halten, in der Abstraction noch weiter zu gehen, und $\sqrt{-}$ ohne Einheit als blosses Operationsvorzeichen in der früher näher angegebenen Weise vor die absolute Grösse zu setzen. Es ist $\sqrt{-1} = \sqrt{-}\ 1$, und man kann daher auch schreiben

3*

$y = \sqrt{-\sqrt{z} - a}$. Es wird indessen hier auf diesen Unterschied der Bezeichnung nur Werth gelegt, weil er die Natur der imaginären Grösse angemessener verständlich macht. Uebrigens kann auch $\sqrt{-1}$ selbst als Vorzeichen gelten, wie wir denn Ursache haben werden, in der später zu entwickelnden Werthigkeitsrechnung sämmtliche Einheitswurzeln gleich Plus und Minus als eine neue Art Vorzeichen oder Vorbemerkungen der Grössen zu behandeln. Hier geht uns jedoch noch nicht diese weittragende Ausdehnung der gesammten Analysis, sondern nur erst die Grundgestalt des Imaginären an. Auch das Gaussische i kann insofern als Vorzeichen figuriren, als man sich bei ihm herkömmlich keine Rechenschaft davon giebt, ob es eine abstracte Zahl oder eine benannte Einheit vorstellen solle. An einer Zeichensprache, die bereits in einem gewissen Umfange besteht, ohne zwingenden Grund ändern zu wollen, wäre ebenso kleinlich als misslich, und der Regel nach ohne Aussicht; denn jede Sprache leistet das Ihrige dadurch, dass die Mehrzahl ihrer Zeichen bereits Curs hat und daher ohne Weiteres verstanden wird. Neue Hinzufügungen werden nur im Einzelnen platzgreifen und, wo gesunde Verhältnisse obwalten, nur im Anschluss an ein wirkliches Bedürfniss allgemein durchdringen. Allerdings haben sich auch in dieser Beziehung schon viel Verkehrtheiten geltend gemacht, wenn sie künstlichen Einfluss hatten; aber übrigens bleibt das Naturgesetz jeder Sprache doch mächtig. Wir werden daher nicht den geringsten Werth darauf legen, durchgängig bessere Zeichen und Ausdrücke zu gebrauchen, sondern möglichst die Sprache reden, die unmittelbar und ohne weitere Erklärungen verstanden wird. Nur insoweit die Begriffe durch die mit den herkömmlichen Zeichen gewohnheitsmässig verknüpften falschen Vorstellungen und Vorstellungsbeimischungen der Verkennung ausgesetzt bleiben würden, ist für den Zweck der Klarstellung der Gebrauch anderer Ausdrücke und Zeichen, namentlich einleitungsweise, unumgänglich.

5. Wie wir bezüglich der Entstehung des Negativen dargethan haben, dass der Ausgang von einer Gleichung gleichbedeutend ist mit dem von einer Operation, so lässt sich bezüglich des Imaginären ebenfalls hervorheben, dass die Operation $\sqrt{a - z}$ das Wesentliche ist und den Begriff der Gleichung schon einschliesst. Was nämlich durch die Combination der beiden

Operationen, Subtraction und Wurzelausziehung, gefunden werden soll, braucht nur selbständig gedacht und mit einem besondern Buchstaben bezeichnet zu werden, damit auch eine ausdrückliche Gleichung hervortrete. In Gedanken war diese Gleichung schon immer vorhanden; denn man unterschied das zu Findende von dem unausgeführten Operationssystem. Das Wesen der Sache ist nun dies, dass sich die Operationen nur theilweise ausführen lassen und dass als Residuum das Vorzeichen $\sqrt{-}$, als eine in sich selbst unvollziehbare Combination und gleichsam als ein Index der Unmöglichkeit, übrigbleibt. An das Analogon bei dem isolirt Negativen braucht nur erinnert zu werden. Die Subtraction war dort auch nur theilweise unmöglich, indem sich bis zur Grösse des Minuendus immer abziehen und dieser sich so auf Null bringen liess. Das Imaginäre existirt überhaupt nur, weil sich eine unmögliche Differenz einfindet.

Wie nun eine negative Lösung bedeutete, dass durch eine absolute Grösse der Gleichung nur genügt werden kann, wenn die Gleichung nicht bleibt, was sie ist, sondern gewisse Wechsel der Vorzeichen erfährt, so hat auch die imaginäre Lösung denselben entsprechenden Sinn. Die Vorbemerkung vor der absoluten Grösse, welche (—) oder $\sqrt{-}$ oder, dem Herkommen gemäss, $\sqrt{-1}$ lautet, zeigt an und ist gleichsam das Gesetz dafür, welche Aenderungen der Vorzeichen in der Gleichung vorgenommen werden müssen, damit eine absolute Lösung möglich sei. Im obigen typischen Beispiel $z + y^2 = a$ bedeutet die imaginäre Lösung $y = \sqrt{-}\sqrt{z - a}$, wenn wir $\sqrt{z - a}$ als die absolute Grösse ins Auge fassen und etwa mit v bezeichnen, offenbar $z + (\sqrt{-})^2 v^2 = a$, d. h. kurzweg $z - v^2 = a$. Nimmt man nun die bei den Negativen bereits gewohnheitsmässige Wendung, derzufolge die zum Minuszeichen gehörige absolute Grösse mit demselben Buchstaben bezeichnet wird, wie die allgemeine und noch unbestimmte Grösse der Gleichung, — fährt man also fort, die absolute Grösse in der Imaginären ebenfalls y zu nennen, so hat man $z - y^2 = a$.

Auf diese Weise hat sich, wie schon bei den Negativen, hier wiederum gezeigt, dass man zwei Gleichungen statt einer brauchen würde, wenn man die signirten, d. h. die mit Vorzeichen versehenen Grössen umgehen, also dieselben fraglichen Beziehungen in lauter absoluten Grössen formuliren wollte. Unter Voraus-

setzung imaginärer Grössen findet der Vorzeichenwechsel nicht, wie bei den Negativen, vor einer einfachen, sondern vor einer quadratischen Grösse statt. Die signirten Grössen sind hienach das Mittel, in einer Gleichung die Wechsel der gewöhnlichen Vorzeichen hervorzubringen. Um vor einem Quadrat Plus in Minus übergehen zu lassen, muss man die einfache Grösse imaginär setzen. Ein Uebergehen von Plus in Minus ist aber sonst etwas ganz Geläufiges, und es hört auch in dem Falle nicht auf, dieselbe sachliche Bedeutung zu haben, wenn dieser Uebergang an einer quadratischen Grösse vollzogen wird. Dieser Umstand ist jedoch nur für diejenigen hervorzuheben, die noch einer besondern Brücke bedürfen, um sich die volle Wirklichkeit des Quantitativen der imaginären Grössen durch Anknüpfung an bereits geläufigere Vorstellungen klarzumachen.

Die beiden Gleichungen $z + y^2 = a$ und $z - y^2 = a$ verwandeln sich gegenseitig ineinander, wenn man y imaginär setzt. Man kann also jede zur Hauptgleichung machen, und die andere nur als einen besondern Fall jener Ausgangsgleichung betrachten. Die Zusammenfassung zweier Gleichungen zwischen absoluten Grössen in eine einzige, in welcher y den allgemeinern Sinn einer zeichenveränderlichen Grösse hat, ist der entscheidende Vortheil. Um Irrungen in den Begriffen vorzubeugen, bemerken wir, dass herkömmlich in einer Gleichung, in welcher etwa die Abscissen mit x bezeichnet werden, x eine doppelte Bedeutung hat. Es soll nämlich, wenn man kurzweg die maassgebende Gleichung ins Auge fasst, das x alle Abscissen, sowohl die positiven als die negativen, in sich begreifen und als Buchstabe auch vorstellen. Dies ist auch nöthig, damit eine einzige Gleichung Alles umfasse. Wenn man nun aber sagt, man mache $x = - x$, so ist dies nur dann kein Widersinn, wenn x zugleich eine allgemeine und eine specielle Bedeutung haben kann. Die allgemeinere Bedeutung ist die Vorstellung der fraglichen Grössenart überhaupt, nämlich der Abscissen überhaupt, die speciellere aber ein bestimmter Fall jener Art.

Um sich recht deutlich zu machen, um welche, leicht zu übersehende Begriffsunterschiede es sich handelt, setze man als allgemeine Gleichung $z + w^2 = a$. Hier soll die Wurzel w zugleich die absoluten und die signirten Werthe vorstellen. Versteht man nun unter t eine absolute Grösse, so kann zunächst $w = + t$ oder $w = - t$ sein, welche Fälle uns hier bei dem

Imaginären jedoch nicht vorzugsweise angehen. Ausserdem hat es aber die beiden imaginären Werthe, indem t das imaginäre Vorzeichen erhält. Verkürzen wir letzteres, d. h. $\sqrt{-}$ zu einem einfacheren Zeichen, in welchem von dem Wurzelzeichen der aufrechte Strich beibehalten, das Minuszeichen aber oben im rechten Winkel darangeschrieben wird, — ein Zeichen, welches sich als Γ am leichtesten drucken lässt, und das wir auch Imaginär oder im. lesen können, so haben wir $w = \Gamma t$, und zwar positiv und negativ imaginär, also $w = + \Gamma t$ und $w = - \Gamma t$. Hiedurch wird es nun auch recht deutlich, wie die verschiedenen Grössen t schon rein analytisch und ganz im Allgemeinen als absolut existiren und wie die zwei Gleichungen $z + t^2 = a$ und $z - t^2 = a$ zwei besondere Fälle der allgemein formulirten Gleichung $z + w^2 = a$ sind. Die Begriffe von w und von t sind dadurch verschieden, dass w die Zeichenveränderlichkeit einschliesst, während t sie ausschliesst, d. h. immer eine wirkliche absolute Grösse ist.

Kehren wir nun zu der herkömmlichen, nicht durch besondere Buchstaben unterschiedenen Art zurück, so ist klar, dass, in der Gleichung $z + y^2 = a$, y sowohl den allgemeinen Sinn, den wir mit w unterschieden, als auch den speciellen, den wir mit t bezeichneten, haben soll. Hat hienach, um uns kurz auszudrücken, y den Sinn w, so hat die Gleichung $z + y^2 = a$ den Sinn der allgemeinen Hauptgleichung $z + w^2 = a$. Hat y dagegen den Sinn t, so hat die Gleichung $z + y^2 = a$ den speciellen Sinn $z + t^2 = a$. Sie repräsentirt alsdann von sich selbst auch einen besondern Fall, ohne dass der Buchstabe geändert wird. Dies darf so wenig Anstoss erregen, dass es vielmehr ganz dem Sinne veränderlicher Grössen gemäss ist; denn überhaupt repräsentirt in der Analysis eine Veränderliche x in jedem bestimmt fixirten Falle auch zugleich stillschweigend einen bestimmten Werth x_n. Es ist daher nur eine analoge Ausdehnung, wenn man diese Doppelrolle der Buchstaben nicht blos auf verschiedene absolute Grössenwerthe, sondern auch auf die Signirungsunterschiede der Werthe anwendet. Hienach hat man also auch ein volles Recht, zu sagen, dass y in dem speciellen Sinne, nämlich als absolutes y, immer existire. Da letzterer Satz ein rein analytischer ist und auf Grössen überhaupt geht, so ist beispielsweise eine geometrische Existenz des in speciellem Sinne genommenen y als einer durch Zeichnung nachweisbaren Grösse nur eine Folge des

rein analytischen Sachverhalts. Auch kann man nicht oft genug daran erinnern, dass der Sinn des Imaginären vor Allem im Analytischen zu entscheiden war, wo man bisher noch nicht einmal eine Frage geahnt, geschweige eine Antwort gegeben hatte.

6. Ehe wir zum gemischt Imaginären, dem sogenannten Complexen, übergehen, ist nun erst für das rein Imaginäre die entscheidende geometrische Anwendung nachzuweisen. Die Mittelpunktsgleichung des Kreises in rechtwinkligen Coordinaten $x^2 + y^2 = r^2$ ist das geometrische Fundamentalbeispiel, welches der vorher behandelten Gleichung $z + y^2 = a$ entspricht. Ja jene Gleichung ist noch mehr als blos Beispiel; sie ist der einfachste Ausgangspunkt, der aufgefunden werden kann, und das Muster für alle übrigen Fälle, in denen das geometrisch Imaginäre kenntlich gemacht werden soll. Nimmt man x als die unabhängige Veränderliche und lässt es grösser als den Radius werden, so kann man nach der durch die Gleichung gegebenen Constructionsregel einen Kreispunkt nicht mehr bestimmen. Analytisch erhält man als Ordinate desselben ein imaginäres $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, wobei wir der Einfachheit wegen von den nach unten liegenden, also negativen Ordinaten vorläufig absehen und zunächst überhaupt nur den ersten Quadranten des Kreises, oder vielmehr den Raum zwischen den beiden positiven Coordinatenaxen ins Auge fassen. Der fragliche Kreispunkt ist also auf reelle Weise unmöglich oder, was dasselbe heisst, als eigentlicher Kreispunkt unmöglich. Die gesuchte Ordinate ist eine imaginäre Linie, deren Endpunkt man natürlich auch imaginär nennen muss. Als eigentliche Kreisordinate ist sie eine Absurdität, d. h. nicht vorhanden.

Wohl aber kann man die Constructionsregel, die hier versagt, dennoch soweit als möglich festhalten, also an ihr das Ausführbare zur Ausführung bringen und das Unausführbare als Solches in ungemischter Weise kenntlich machen. Beides geschieht auf folgende Art. Da sich $\sqrt{r^2 - x^2}$ durch Construction eines rechtwinkligen Dreiecks mit einer Kathete x und einer Hypotenuse r bei $x > r$ als geometrischer Widersinn nicht mehr ausführen lässt, so construire man $\sqrt{x^2 - r^2}$. Letzteres geschieht, indem die Abscisse x als Hypotenuse genommen und von deren Endpunkt eine Tangente an den Kreis gezogen wird. Analytisch ist nun $\sqrt{r^2 - x^2} = \Gamma \sqrt{x^2 - r^2}$. Substituiren wir nun in den analytischen Ausdruck die gefundene Linie, so haben wir diese

Linie mit dem imaginären Vorzeichen als die Lösung. Richten wir diese Linie nun noch als Ordinate auf, was wir nach der allgemeinen Constructionsregel müssen, und nennen wir die absolute Ordinate, wie dies bei dem Unterschied von Positiv und Negativ ja immer geschieht, ebenfalls y, so haben wir $\sqrt{-}\, y$ als richtige construirte Ordinate. Der Endpunkt derselben ist ein Hyperbelpunkt; denn die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ist vermöge der abgeänderten Constructionsregel thatsächlich in die specielle Form $x^2 - y^2 = r^2$, d. h. in die Gleichung einer Hyperbel übergegangen. Vervollständigen wir die Construction nach unten, so erhalten wir ein negativ imaginäres y und überhaupt einen vollständigen Hyperbelzweig. Dieselbe Erweiterung des Kreises nach der Seite der negativen x ausgeführt, liefert uns den andern Zweig der gleichseitigen Hyperbel. Auf diese Weise ist durch eine einzige Gleichung ein Doppelgebilde gegeben, welches weder ausschliesslich Kreis, noch ausschliesslich Hyperbel, sondern beides zusammen ist. Die Ordinaten der Hyperbel sind imaginär und mit dem Vorzeichen Γ ebenso zu signiren, wie man sonst mit dem Vorzeichen der Negativität signirt.

Auch geometrisch ist principiell die Sache dieselbe, wie bei dem Negativen. Die Möglichkeit der Signirung einer Linie mit Minus hat, wie im vorigen Capitel erörtert, darin ihren Grund, dass bei der Zählung der Abstände aus einem gemeinsamen Gesichtspunkt die in der entgegengesetzten Richtung gezählten im Rechnungszusammenhange abzuziehen sind. Die Signirung einer Linie mit dem Imaginärzeichen schreibt sich aber daher, dass ein gemeinsamer Gesichtspunkt der Construction ein Verhältniss mitsichbringt, vermöge dessen in dem maassgebenden Rechnungszusammenhange nicht die Linie, sondern das Quadrat der Linie abzuziehen ist. Setzen wir Γy in die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ein, ganz analog, wie man ein $-y$ einsetzt, so erhalten wir eben die neue Form $x^2 - y^2 = r^2$, und es zeigt sich, dass die Imaginarität der Ordinate reeller Weise darin besteht, dass ihr Quadrat abzuziehen ist. Diese Eigenschaft ist jedoch bereits eine Folgerung; denn unter andern Umständen figurirt die Ordinate mit ihrem Imaginärzeichen in der Rechnung eben auch unmittelbar, ohne dass eine Auflösung in das Reelle überall erfolgt. In unserm typischen Muster- und Fundamentalfall ist die Kreisgleichung das durchgängig Maassgebende, aber in dem erweiterten Sinn, dass in der Veränderlichkeit der y nicht blos die $-y$,

sondern auch die Γy miteinbegriffen sind. Eine solche Wendung ist eine erhebliche Erweiterung der geometrischen Analysis, wie es überhaupt eine Erweiterung der Analysis des Veränderlichen ist, grundsätzlich und überall die Grössen von vornherein als in allen Zeichen gemeint vorzustellen und sie so das weiteste Gebiet der möglichen Werthe und Beziehungen durchlaufen zu lassen.

Man sieht, dass nur dann die Hyperbel eine imaginäre Ordinate erhält, wenn sie, um auch einmal in einem logischen Kunstausdruck zu reden, unter die Kreisgleichung subsumirt wird. Andernfalls ist an ihr nichts Besonderes und ihre Ordinate reell. Es ist also nur diese Beziehung auf einen gemeinsamen Gesichtspunkt, was die Hyperbel sozusagen zu einem imaginären Kreise macht, falls man nämlich jedes der Kreisgleichung entsprechende Gebilde auch Kreis zu nennen fortfahren will. An sich ist die fragliche Hyperbelordinate nicht imaginär, sondern unsignirt. Erst die Beziehung auf das über den Radius hinausgewachsene x giebt ihr den imaginären Charakter.

7. Das Vorangehende enthielt die erste wirkliche und rationelle Construction des Imaginären, wenn man den Ausdruck Construction, der auch schon bei dem Negativen nicht der allerbeste ist, überhaupt gelten lässt. Eigentlich wird nämlich nicht das Analytische construirt, sondern umgekehrt zunächst immer erst das Geometrische analysirt. Freilich kann man alsdann von einer so gewonnenen Gleichung ausgehen und für jegliches Verhältniss, welches man zwischen den Grössen der Gleichung rein analytisch statuirt, danach fragen, was ihm in den geometrischen Beziehungen entspreche. Hier kann sich nichts ergeben, was nicht eine Parallele hätte. Grössen, Rechnungszeichen und isolirte Vorzeichen, — Alles hat auch in der Geometrie seinen Sinn. Macht man einen Entwurf, wie wir ihn von der Kreisgleichung ausgehend zum Kreise über diesen hinaus verzeichnet haben, so ist dies freilich ein Construiren, aber ein solches, bei welchem doch die maassgebende Gleichung erst aus dem Kreise gewonnen war, ehe sie und der Kreis selbst in das Imaginäre hinein erweitert wurden.

Wären wir dagegen von der gleichseitigen Hyperbel und ihrer reellen Gleichung $x^2 - y^2 = r^2$ ausgegangen, so hätte uns schon der Uebergang von einem Zweige zum andern den Gedanken eines Zwischenkreises mit imaginärer Ordinate nahegelegt, — vorausgesetzt nämlich, dass wir überhaupt den Sinn einer wirk-

lich zu zeichnenden imaginären Linie concipirt gehabt hätten. Andernfalls wäre es wohl, wie in früheren Auffassungen, dabei geblieben, dass die Hyperbel bei einem $x < r$ durch das Imaginäre geht oder, wie man auch wohl, ohne etwas Näheres vorzustellen, gesagt hat, imaginär wird. Es bedeutete Letzteres nichts Anderes, als dass in der Gleichung das $y = \sqrt{x^2 - r^2}$, also imaginär und in dem alten Sinne mithin geometrisch unbrauchbar würde. Wir haben die Brauchbarkeit gezeigt und so auch den Parallelismus von Analysis und Geometrie vervollständigt oder vielmehr die allseitige Gültigkeit und Stetigkeit der geometrischen Analysis dargethan.

Am natürlichsten und unwillkürlichsten ergiebt sich hienach die geometrische Rolle des Imaginären, wenn man von vornherein von der reellen gleichaxigen Hyperbel ausgeht. Da indessen die Hyperbel stets im Allgemeinen und nicht ohne besondern Grund für den Specialfall der Gleichseitigkeit betrachtet wird, so hätte man auf eine Zwischenellipse und deren imaginäre Ordinate kommen müssen. Hier ist aber nicht Alles gleich einfach übersichtlich und namentlich hätte sich auf diesem Wege die entscheidende Wendung für die geometrische Sinnesfeststellung des Imaginären weniger leicht ergeben. Wo man sich aber nicht einmal im rein Analytischen über den Sinn und die Rolle des Imaginären, als eines Mittels zur Ersparung besonderer Gleichungen, klar geworden war, — wo man also, wie bisher, blos witterte, anstatt zu denken, da konnte alle natürliche Nähelegung der Sache bezüglich der allgemeinen Hyperbel nichts helfen. Nachdem das Grundverhältniss aber einmal gefunden ist, dürfte es aus gewissen Gesichtspunkten am erspriesslichsten sein, von der Gleichung der reellen Hyperbel auszugehen. Hier haben auch die Exponentialfunctionen ihren geometrischen Ansatzpunkt, und das Imaginäre bei ihnen, bei den trigonometrischen Functionen, sowie bei den weiteren Transcendenten, also namentlich bei den elliptischen Functionen, wird sich in unserm natürlichen System in einem bisher ungekannten Zusammenhange daran anschliessen.

Nur analytisch kann es auffallen, wenn man als Ausgangsgleichung $x^2 - y^2 = r^2$ nimmt, statt $x^2 + y^2 = r^2$ zu wählen. Indessen kommt diese Anstossnahme nur von der algebraischen Gewohnheit her, die Grössenzeichen immer durch das positive Rechnungszeichen zu verbinden, und dabei auf die Abänderung der Gleichungen durch die Einsetzung negativ signirter Grössen

zu rechnen. Will man es durchaus, so kann man ja auch $x^2 + w^2 = r^2$ und zwar in dem Sinne schreiben, in welchem wir oben $z + w^2 = a$ erörtert haben. Alsdann sind $+ y^2$ und $- y^2$ zwei Specialwerthe von w^2, und man kann ebensogut mit dem einen wie mit dem andern Fall den Anfang machen. Besser ist es aber, auch hier nicht mit einem imaginären Kreis, wie man nach der allgemeinen Gleichung die Hyperbel nennen müsste, anzufangen, sondern von vornherein $x^2 - w^2 = r^2$ zu schreiben, wobei dann der erste Werth von w ein absolutes y, die Hyperbel ihrem gewöhnlichen Sinne nach das Ausgangsgebilde, der Kreis aber, der die beiden Hyperbelscheitel berührt, das zugehörige Zwischengebilde wird.

Brauchen wir die Bezeichnung w für die Ordinaten, so liegt hierin ausdrücklich markirt, dass in der fraglichen Verbindung gleichseitige Hyperbel und Kreis nicht zwei, sondern ein einziges Gebilde sind. Denn w ist die allgemeine Ordinate des Gesammtgebildes. Gehen die Werthe von w aus y in Γy über oder umgekehrt, so ist dies etwas Analoges, wie wenn man innerhalb des Kreises aus einem Quadranten in den andern übergeht. Letzteres geschieht durch das Negativwerden der Abscissen oder Ordinaten; jenes aber durch das Imaginärwerden der Ordinaten. Auch braucht man nicht blos im Falle des Imaginären, wenn man dies entbehren will, eine andere Gleichung, sondern auch im Falle des Negativen kann die Gleichung für alle Quadranten nicht dieselbe sein, sobald man auch nur eine Coordinate nicht vom Mittelpunkt, sondern beispielsweise von der Peripherie aus zählt. In einer Scheitelgleichung des Kreises kommen nämlich Coordinaten nicht blos im Quadrat, sondern auch in der ersten Dimension vor und wird daher an ihnen der Zeichenwechsel sichtbar, der sich bei der gewöhnlichen Gleichung unter den Quadraten verbirgt. Wollte man sich also ohne Negatives behelfen, so würde man jedenfalls mehr als eine Gleichung, unter allgemeineren Coordinatenvoraussetzungen sogar vier, also für jeden Quadranten eine eigne Gleichung brauchen.

Die Einheitlichkeit des Doppelgebildes zeigte uns, dass der Ausgang von der Hyperbel der natürliche ist. Von der Hyperbel her ergiebt sich nämlich nur ein einziger Zwischenkreis, während umgekehrt zum Kreise, wenn man sich die Coordinatenaxen gedreht denkt, für jede zwei rechtwinklig aufeinanderstehende Durchmesser als Axen eine zugehörige Hyperbel vorhanden ist.

Auf diese Weise kann jeder Punkt des Kreises Scheitel eines Hyperbelzweiges sein, der mit dem Kreise unter dieselbe Gleichung gehört. Hätten wir y zur unabhängigen Veränderlichen genommen, so wäre x imaginär geworden, und es hätte sich, statt sonst seitlich, nun nach oben und unten je ein Hyperbelzweig ergeben. Jedoch gehört diese neue Hyperbel nicht auch noch zum Gesammtgebilde, sondern beruht schon auf einer Veränderung bezüglich der Coordinatenaxen, da ja die Axe der unabhängigen Veränderlichen eine andere geworden ist. Es ist nicht mehr y gegen x, sondern x gegen y imaginär, und das Imaginäre besteht wie das Negative stets in einer Beziehung, nämlich wie jenes im Gegensatz zum Positiven, so dieses im Rechnungsverhältniss zum Reellen. Es ist Γy gegen y durch Vermittlung von x imaginär, während $-x$ gegen x dadurch negativ ist, dass beide Abstände durch Vermittlung eines andern festen Abstandes auf einen äusserst entfernten Punkt zur Seite der $-x$ bezogen werden. Eine dritte Grösse ist also hier die Vermittlung; sie ist aber eine Constante. Bei dem Imaginären ist es die unabhängige Veränderliche selbst, durch welche das neue Verhältniss vermittelt wird. Hienach bleibt es dabei, dass dem Kreise bei Coordinaten von gleichem Sinn immer nur eine einzige Hyperbel entspricht. Jeder Hyperbelarm liegt zwar innerhalb eines halben Rechten, gehört aber nichtsdestoweniger zum ganzen Quadranten.

8. In unserm Ausgangstypus hat sich das rein Imaginäre offenbar nur als Ordinate ergeben können. Hiemit ist aber den dunkeln Witterungen, es bestehe das Wesen imaginärer Linien im Lothrechten, kein Vorschub geleistet. Solche Wahrnehmungen und Witterungen sind schon darum Früchte des Missverstandes, weil auch die reelle Ordinate gegen die Abscisse senkrecht steht. Uebrigens hätten wir aber auch nur nöthig gehabt, innerhalb einer einzigen Axe zwischen zwei Distanzengattungen x und y unsere ursprüngliche Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ zur Norm zu machen und diese auf derselben Linie in das Imaginäre fortzusetzen, so hätte von keinem Senkrechten mehr die Rede sein können. Auf dieser einen Linie hätten wir alsdann vom Nullpunkt der Zählung zwei Punktereihen, in welchen ein Punkt der einen auf einen correspondirenden Punkt der andern auf Grund einer anfänglichen Normdistanz r bezogen wird. Ist auf dieser Linie x grösser als r geworden, so hat auch ein Γy vom Ursprung her begonnen und die imaginäre Punktereihe entspricht

einer von $x = r$ anfangenden reellen. Beide erstrecken sich unbeschränkt. Auch sind die zweiten zusammengehörigen Reihen diejenigen, welche ohne Imaginäres unmittelbar durch die Gleichung $x^2 - y^2 = r^2$ bestimmt sein würden. Doch nicht der Inbegriff dieser Einzelheiten und Analogien, sondern der Umstand, dass hier die imaginäre Punktereihe oder Linie mit der reellen gar keinen Winkel bildet, ist es, was gegenüber den Gaussischen Missvorstellungen vom Lothrechten interessirt.

Der wahre Grund, warum eine rein imaginäre Linie, falls sie überhaupt die zugehörige reelle unter einem Winkel schneidet, dies gemeiniglich im rechten Winkel thun wird, lässt sich nach unserm System angeben. Dieser Grund ist aber, wie wir später in der Werthigkeitsrechnung sehen werden, keineswegs allein für die Imaginären vorhanden. Hier mag jedoch nur der Sonderfall des Imaginären ins Auge gefasst werden, da von dem andern Falle vor unserer Werthigkeitsrechnung nicht einmal der Begriff vorhanden sein konnte. Das imaginäre y kann in der unmittelbarsten Weise nur als Wurzel einer reinen quadratischen Gleichung existiren. Die einfachste, geometrisch mögliche Gestalt einer solchen Gleichung ist aber die Gleichsetzung von y^2 mit der Differenz zweier Quadrate; denn nur vermittelst des Negativen kann auch das Imaginäre entstehen. Hiemit haben wir aber immer die Pythagoreische Bezeichnung als maassgebend für die Construction; es wird also die Sache stets so eingerichtet werden können, dass Γy auf einer der reellen Linien senkrecht steht. Wie wenig es aber nöthig habe, Ordinate zu x zu sein, lässt sich nachweisen. Wenn es daher als Ordinate auf x senkrecht steht, so thut es dies nicht, weil es imaginär ist, sondern weil es von vornherein zu einer rechtwinkligen Ordinate gemacht ist.

Setzen wir fest, dass ein beliebiges Dreieck zur Basis x, zur linken Seite die Constante r und zur dritten Seite y habe, und sehen wir zu, welche Curve durch die obere Spitze des Dreiecks beschrieben werde, wenn die veränderlichen Seiten ihre Werthe unbeschränkt, und nur an die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ gebunden, durchlaufen. Ueber die Beschaffenheit des Dreiecks ist in Beziehung auf Rechtwinkligkeit von vornherein nichts festgesetzt, sondern Derartiges erst aus der Gleichung zu entnehmen. Von $x = 0$ bis $x = r$ hat es den rechten Winkel rechts an der Basis, und die Dreiecksspitze beschreibt einen Kreisquadranten. Von $x = r$ unbeschränkt weiter wird die Seite y nicht nur imagi-

när, sondern hört auch auf, senkrecht zu x zu stehen. Sie steht nun zu r senkrecht, und die Spitze des Dreiecks, welches nun an der Spitze rechtwinklig ist, beschreibt den vorigen Quadranten des Kreisumfangs, aber in entgegengesetzter Richtung mit unbeschränkter Annäherung an den letzten Punkt, ohne diesen jedoch jemals zu erreichen. Letzteres stimmt auch ganz wohl zum Anfang, denn es war auch ein eigentliches Dreieck erst vorhanden, als x, statt 0 zu sein, irgend einen Grad von Grösse hatte. Dies jedoch nur nebenbei, da die in dieser Beziehung erforderliche vollständige Klarstellung erst in dem Capitel über das sogenannte Unendliche mit Rücksicht auf die ausnahmslos stetige Fortsetzung der Functionen gegeben werden kann. Im jetzigen Zusammenhang ist nur das Nichtlothrechte der Kathete Γy gegen die Hypotenuse x von Interesse, und übrigens das ganze Beispiel auch als Typus einer nicht zwischen Coordinaten statthabenden Imaginarität eine Vorbereitung für spätere Darlegungen.

Auf r stand Γy im eben gekennzeichneten Dreiecksfall senkrecht, weil dies die Pythagoreische Beziehung, die in der Gleichung vorgeschrieben ist, so mitsichbrachte. Gauss aber hatte bei seiner willkürlichen graphischen Darstellung rechtwinklige Coordinaten nicht aus irgend einem besondern Grunde gewählt, sondern sie so genommen, weil eben *re.* und *im.*, ja komischerweise *re.* + *im.*, d. h. Kohl und Rüben, um die Ecke eines rechten Winkels herum aneinandergereiht und aufgeschichtet werden sollten. Wie wenig Sinn und Verstand diesem Verfahren beiwohnte, zeigte sich nicht blos unmittelbar in der Sache selbst, sondern auch noch darin, dass man später unfähig blieb, die Uebertragung des Imaginären in die dritte Dimension zu bewerkstelligen. Die graphische Procedur, vermöge deren jede beliebige reell und imaginär gemischte Grösse durch die Lage eines Punktes symbolisirt und der Lauf einer solchen bivariabel gesetzten Grösse sichtbar werden sollte, hat thatsächlich nicht aufhellend, sondern verdunkelnd gewirkt. Sie hat vom natürlichen Wege ferngehalten, so dass man vermöge dieser Ablenkungen bei einem empirischen Surrogat der Analysis stehen blieb, anstatt das Imaginäre wirklich in der Geometrie nachzuweisen.

9. Sobald man mit drei Dimensionen, also mit Körpern zu thun hat, versagt die Gaussische Imaginarität als angebliche mittlere Proportionale zwischen Abscissenstücken unangenehmer Weise den Dienst, was auch von einzelnen professoralen

Anhängern der Gaussischen Herrlichkeiten ausgesprochen wurde. Wir aber sind hier nicht im Mindesten in Verlegenheit. Wie wir früher, um die einfachste geometrische Imaginarität zu erhalten, vom Kreise ausgingen, so haben wir jetzt die Kugel und zwar mit ihrer Mittelpunktsgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ zu Grunde zu legen. Zunächst wird hier z imaginär, wenn $x^2 + y^2$ grösser als r^2 gemacht wird. Bezeichnet man $\sqrt{x^2 + y^2}$ mit ϱ, so ist ϱ die Hypotenuse eines in der Ebene der xy liegenden rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten x und y sind. Legt man nun durch ϱ und z eine Ebene, so schneidet diese die Kugel in einem grössten Kreise, der wiederum den horizontalen grössten Kreis in der Ebene der xy schneidet. Letzterer Durchschnittspunkt wird nun der Ansatzpunkt für den Scheitel einer in jener Ebene der ϱz zu entwerfenden Hyperbel mit imaginärer Ordinate, sobald man ϱ über den Werth r hinaus wachsen lässt. Es hat nämlich der verticale Schnittkreis die Gleichung $\varrho^2 + z^2 = r^2$. Seine Fortsetzung in die Hyperbel ergiebt also $z = \Gamma \sqrt{\varrho^2 - r^2}$. Dies ist unser früheres Doppelgebilde. Dreht man es mit der Ebene um die Axe der z, so beschreibt der Kreis unsere Kugel, die zugehörige Hyperbel aber eine in sich zusammenhängende Fläche, welche die Kugel in der ganzen Ausdehnung des Umfangs des horizontalen grössten Kreises berührt und so gleichsam umkränzt. Diese Fläche ist das einschalige gleichaxige Hyperboloid mit der Gleichung der Kugel und entsprechend imaginärer Ordinate z. Als reelles, d. h. hier selbständiges Gebilde würde es zur eignen Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = r^2$ haben. Nach unserer Erweiterung der Analysis durch den gehörigen Gebrauch des Imaginären sind aber die Kugel und das gleichaxige Kranzhyperboloid, wie man es in seiner Zugehörigkeit zur Kugel nennen könnte, ein einheitliches Gebilde auf Grund einer und derselben Gleichung.

Hiemit ist es aber noch nicht genug. Bisher hatten wir x und y als die unabhängigen Veränderlichen zusammengefasst. Jetzt lassen wir x für sich allein grösser als r werden. Alsdann muss $\sqrt{y^2 + z^2}$ imaginär sein. Bezeichnen wir diese Wurzel im Allgemeinen mit η, legen durch η und x eine Ebene, und ergänzen deren grössten Kreis, wo er die Axe der x schneidet, durch eine Hyperbel, so ist $\Gamma\eta$ deren Ordinate. Drehen wir das so gewonnene Gebilde mit seiner Ebene um die Axe der x, so

entsteht ein zweischaliges Hyperboloid, dessen Längsaxe die Axe der x ist. Es hat, wie das andere, zu seinen drei Axen drei Durchmesser der Kugel, und liegt zu beiden Seiten derselben im Raume des Kranzhyperboloids. Es hat zwei imaginäre Coordinaten, Γy und Γz. Seine reelle Gleichung würde $x^2 - y^2 - z^2 = r^2$ sein. Sie geht, wie man sieht, aus der Kugelgleichung oder, besser gesagt, aus der allgemeinen Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ hervor, indem man y den Werth Γy und z den Werth Γz giebt.

Sie geht aber auch, was noch interessanter ist, aus der reellen Gleichung jenes gleichaxigen einschaligen Hyperboloids $x^2 + y^2 - z^2 = r^2$ hervor, indem man y imaginär werden lässt, also von der reellen Coordinate y zu Γy übergeht. Auf diese Weise gesellt sich zum einschaligen Hyperboloid das zweischalige unter einer und derselben Gleichung. Beide verhalten sich zueinander als reelle und imaginäre Fläche. Dies ist vorläufig, ehe man sich an die Einheitlichkeit des gesammten Kugel- und Hyperboloidgebildes und an die Betrachtung der Kugel als Zwischenkugel gewöhnt haben wird, von entscheidender Wichtigkeit. Hier nämlich ist es handgreiflich, dass nur die Anwendung des Imaginären in dem von uns aufgeklärten Sinne dazu führt, der Einheitlichkeit des Namens Hyperboloid Rechnung zu tragen. Nach dem Herkommen haben die beiden Hyperboloide zwei Gleichungen, und müssen als zwei verschiedene Flächen gesondert behandelt werden. Nach unserm neuen System sind sie zwei Ausläufer einer und derselben Fläche, die man als Gesammthyperboloid oder vollständiges Hyperboloid bezeichnen kann. Der Uebergang von einem Ausläufer zum andern des Gesammthyperboloids ist hienach nur durch das Imaginärwerden einer Ordinate, in unserm Fall y, möglich, wenn man für das Hyperboloid überhaupt eine reelle Gleichung ansetzt.

Es versteht sich, dass, wie bei Kreis und Hyperbel die letztere einen natürlichen Ausgangspunkt bilden konnte, so auch hier das Hyperboloid als Hauptsache angesehen und die Kugel als stetige Uebergangsvermittlung gelten kann. Diese hat alsdann zwei imaginäre Ordinaten, wenn man nämlich vom zweischaligen Theil des Hyperboloids ausgegangen und demgemäss erst noch das Kranzhyperboloid zu passiren gehabt hat. Wäre man vom Kranzhyperboloid und dessen Gleichung ausgegangen, so hätte man auf der einen Seite zur Kugel und auf der andern

zum zweischaligen Hyperboloid überzugehen gehabt, und jedes dieser beiden Ergänzungsgebilde hätte eine imaginäre Coordinate erhalten. Das Natürlichste ist selbstverständlich, dass man nicht von der Mitte, sondern bei dem einen Ende, also mit der Gleichung $x^2 - y^2 - z^2 = r^2$ als allgemeiner Gleichung beginnt. Man sieht alsdann, dass man gleichsam den Ringraum des Hyperboloids nicht stetig passiren kann, ohne zwei imaginäre Coordinaten und hiemit die imaginär bestimmte Kugel als Ausfüllung der anscheinenden Stetigkeitsunterbrechung zu erhalten. Nennt man die Räume zwischen den zwei Theilhyperboloiden etwa Falten, so ist der Uebergang aus dem zweischaligen Hyperboloid in diese Falten nicht möglich, ohne dass eine Coordinate imaginär wird. Es sind also drei Räume in Frage, der zweischalige, der faltige und der Kugelraum. Der Weg durch diese drei ist in der einen wie in der andern Richtung immer davon begleitet, dass im zweiten eine und im dritten zwei Coordinaten imaginär werden. Aehnliches würde zu sagen sein, wenn wir anstatt des gleichaxigen das allgemeine Hyperboloid genommen und dazu das Zwischenellipsoid entworfen hätten, oder umgekehrt, statt von der Kugel, vom Ellipsoid ausgegangen und zu dessen imaginärer Ergänzung, dem dreiaxigen Gesammthyperboloid mit seinem Kranz- und seinem zweischaligen Ausläufer, gelangt wären.

10. Für das reine, d. h. ungemischte Imaginäre sind die bisherigen Ausführungen insoweit genügend, als nicht die Rolle in den transcendenten Functionen in Frage ist. Obwohl sich nun diese Rolle eng an das bisher Festgestellte anschliesst und das vollere Licht über die grosse Tragweite unserer Aufschlüsse verbreitet, so wird doch erst ein selbständiges späteres Capitel der gehörige Ort dafür sein. Hier richten wir die Aufmerksamkeit nur auf die einfachsten Grundgestalten und haben nunmehr das gemischte Imaginäre, also Grössen von der Form *re.* + *im.* analytisch und geometrisch ins Auge zu fassen. Auch diese Grössen betrachten wir hier nur ganz im Allgemeinen, ohne Rücksicht darauf, ob beispielsweise das reelle Glied des Binoms *re.* + *im.* blos eine Constante ist oder nicht, oder ob, was sogar der wichtigste Fall werden wird, die Glieder trigonometrische oder anderweitig transcendente Functionen sind. Uns ist hier nur die binomische, also gleichsam doppelgesetzliche Gestalt von Erheblichkeit. Vermöge dieser Binomie findet sich zu einer reellen Grösse eine imaginäre algebraisch addirt, und wenn auch über die wahre Entstehung

und den entlegenen Grund dieser binomialen Zusammensetzung erst in unserer Werthigkeitsrechnung ein neuer und weittragender Aufschluss gegeben werden kann, so mag doch hier schon erwähnt werden, dass diese binomialen Grössen weiter reichen als das Imaginäre. Der von Gauss für eine Summe des Reellen und Imaginären beliebte Ausdruck complex ist nicht nur sehr äusserlich, sondern widersteht auch einem natürlichen Geschmack. Noch ist er, ausser in Deutschland, nicht sonderlich verbreitet, und wenn auch nicht allzuviel darauf ankommt, dass ein erforderlicher Kunstausdruck ungeschickt und unschön gewählt ist, so ist doch im gegenwärtigen Stadium noch keine Nothwendigkeit vorhanden, einen solchen trotz erheblicher Mängel in einem Zusammenhang besserer und feinerer mathematischer Gedanken zu gebrauchen.

Es ist nämlich überhaupt die Zusammenfassung des Imaginären mit dem Reellen zwar nicht unerheblich; allein wichtig ist auch das Markiren der Wahrheit, dass in solchen binomisch ungleichartigen Verbindungen die Imaginarität nicht in der Summe selbst, sondern in dem einen Gliede derselben liegt. Dort hat das Imaginäre seine Gesetze für sich, wie überall, und die Vorsetzung eines reellen Summanden ändert nichts an diesen selbständigen Gesetzen. Der Ausdruck complex wird nun thatsächlich so verstanden, als bezeichnete er neben dem rein Imaginären eine besondere Gattung. Dieser Begriff ist jedoch, wie sich später, und namentlich in den Grundlagen der Werthigkeitsrechnung, zeigen wird, schief angelegt und daher ein Hemmniss klarer Einsicht. Wir bleiben daher bei dem Imaginären als der maassgebenden Gattung und betrachten die Mischungen als etwas Hinzukommendes, wodurch nur in besondern Fällen etwas charakteristisch Zusammenzufassendes entsteht.

Gehen wir anstatt von der Mittelpunktsgleichung des Kreises von einer Scheitelgleichung und zwar derartig aus, dass die Ordinaten um einen Radius nach unten gerückt werden, so haben wir an Stelle von $x^2 + y^2 = r^2$ die veränderte Gleichung $\xi^2 + (\eta - r)^2 = r^2$. Hier ist $\eta - r = y$, und wird also mit y imaginär. Wir haben also im reellen Stadium $\eta = r + y$, und im imaginären Gebiet, d. h. in der Hyperbel, $\eta = r + \Gamma y$, oder, wenn wir für y seinen Werth setzen, $\eta = r + \Gamma \sqrt{\xi^2 - r^2}$. Obwohl ξ der Grösse nach gleich x ist, so haben wir es doch besonders bezeichnet, theils der Ebenmässigkeit wegen, theils,

weil die Axe der ξ eine andere Lage hat als x, und man sich in derartigen Untersuchungen von vornherein gewöhnen muss, speciell auch auf die Lage der Gebilde zueinander genau und in jeder Beziehung zu achten. Doch dies nur nebenbei, um Missverständnissen vorzubeugen. Die Hauptsache ist hier, dass die Ordinate η erst reell gemischt ist, und dann in der Hyperbel zu einer imaginär gemischten wird.

Analytisch bedeutet die Ersetzung einer reell binomischen durch eine imaginär binomische Grösse, ganz wie sonst, einen Zeichenwechsel vor dem Quadrat und die Entstehung einer neuen Gleichung, wenn man nämlich letztere als selbständiges reelles Gebilde betrachtet. Es ist daher hier nichts wesentlich Neues zu lernen, was sich auf das Imaginäre als solches bezöge; denn Derartiges ausspinnen hiesse, in der veränderten Verbindung Alles wiederholen, was schon bei dem rein Imaginären gesagt ist. Was sich aber für ungleichartige Binome an eigenthümlichen Folgerungen ergiebt, ist im Allgemeinen von der Anwesenheit des Imaginären unabhängig, und muss daher vor Allem für reell binomiale Grössen dargethan werden. Letztere Einsicht gehört aber zu den neuen Grundsäulen unseres mathematischen Gebäudes, und eine vorweggenommene Erörterung hier im Vorbeigehen wäre der Bedeutung der Sache nicht angemessen.

Eine imaginär binomische oder, in der andern Bezeichnung, eine sogenannte complexe Grösse, beispielsweise also eine imaginär binomische Linie, ist nunmehr ein sonnenklarer Begriff und definirt sich sehr einfach. Sie ist eine Grösse, also beispielsweise Linie, wie jede andere, nur dass sie durch Addition oder Subtraction aus zwei Stücken zusammengesetzt wird, die in Rücksicht auf den Rechnungszusammenhang verschieden, nämlich nach Maassgabe der Signirung, zu behandeln sind. Das Imaginärzeichen ist, wie das isolirte Minuszeichen, auch hier wiederum nichts als eine Vorbemerkung vor der wirklichen Grösse, damit diese in ihren Rechnungsbeziehungen das gelte, was sie zu gelten hat.

Es wäre daher zur Erläuterung eines Hauptpunkts auch einmal nicht unzweckmässig, dem Imaginärzeichen in binomer Verbindung gleich den Sinn zu geben, dass es das vorangehende algebraische Additionszeichen mitumfasst. Man würde alsdann ohne Zweideutigkeit, d. h. ohne Besorgniss vor der Verwechselung mit einer Multiplication, kurzweg $r\,\Gamma y$ schreiben können. Diese Erweiterung des Sinnes, vermöge deren die drei einfachen

Zeichen als ein zusammengesetztes Rechnungszeichen verschmolzen und das Imaginärzeichen von der Grösse gelöst, also aus einem Signirungszeichen in ein unmittelbares Operationszeichen verwandelt wird, — diese Wendung macht recht klar, wie es schliesslich nur absolute Grössen sind, die zueinander in Beziehung stehen. Auch ist hiebei gleich zu bemerken, dass die Linien oder sonstigen Grössen, welche die Bestandtheile des Binoms bilden, sich in Wirklichkeit als reelle addirt oder subtrahirt finden müssen, wie dies ja auch in der reell binomischen Zusammensetzung genau ebenso der Fall ist. Das Imaginäre ändert hier nichts an der realen Zusammenfassung durch Addition, sondern besagt nur, dass die Grösse in der Rechnung nicht als ein reelles Ganze, sondern unter besonderer Signirung ihres einen Stücks zu gebrauchen ist.

Nach Maassgabe der bisherigen Voraussetzungen sieht man, wie in der Geometrie das Imaginäre entweder zu den beiden äussern oder den beiden innern Seiten des Reellen zu liegen kommt, je nachdem man für die Wechselseitigkeit der Beziehungen den reellen Ausgangspunkt auf der innern oder äussern Seite nimmt. Auch hier ist, wie bei dem durch das Negative markirten Richtungsgegensatz, der bestimmte Weg einer einzigen Gewohnheit einzuschlagen. Doch davon später, sobald die Vorbereitungen zur nähern Bestimmung und Anwendung des in diesem Capitel Gegebenen getroffen sein werden. Es fehlt nämlich noch viel, um die zugleich einfachsten und allgemeinsten Gesichtspunkte zu gewinnen. Namentlich darf die ganz willkürliche einseitige Abhängigkeit des y von x nicht ausschliesslich maassgebend bleiben, sondern muss einer Form weichen, in welcher x und y wirklich ohne Unterschied und völlig auf gleichem Fuss gelten. Dies wird dann auch auf diejenigen imaginären Binome, welche zwei Veränderliche enthalten, ein neues Licht werfen und sie als wichtige Formbezeichnungen einheitlicher Linien zum ersten Mal kennen und gebrauchen lehren. Im Uebrigen werden aber die vorher angedeuteten Beziehungen der Signirungszeichen zur geometrischen Lage einen besondern Kreis von Einsichten bilden müssen; denn die sogenannte Geometrie der Lage ist bisher nicht viel mehr als dem Namen und einem noch unklaren Begriff nach vorhanden gewesen. Ein deutlicher Sinn für diesen Namen und demgemäss auch eine geziemende Ausfüllung werden erst mit unsern Grundlegungen möglich. Die Skizze einer ernst-

haften Geometrie der Lage gehört zu unserer Aufgabe, ist jedoch nicht die Hauptsache. Um der letzteren willen haben wir hier auf Ausführungen über Ellipse, Ellipsoid, schiefe Coordinaten, Polarcoordinaten und sonstige Transformationen verzichtet. Derartiges wird sich von selbst verstehen, sobald die weitern Grundmittel gewonnen sind. Wir verlassen daher vorläufig das zwar principiell erledigte, aber übrigens noch unerschöpfte Thema des Imaginären, um die wahrlich nicht minder klärungsbedürftigen Umnebelungen des sogenannten Unendlichen zu lichten und später nach Vorführung einer Werthigkeitsrechnung und einer neuen Gestalt der Algebra zu eigenthümlichen geometrischen Consequenzen des Imaginären, nämlich zu dem Imaginativen, zu gelangen.

Drittes Capitel.

Einführung wahrer Begriffe an Stelle des Unendlichkeitsaberglaubens.

1. Jedes Gebiet, in welchem sich Verstand und Phantasie bethätigen, hat seinen Aberglauben. Die Mathematik macht hievon keine Ausnahme. In ihr aber können die falschen Erdichtungsgebilde, sobald sie einmal als solche erkannt sind, bestimmter sichtbar gemacht werden, als irgendwo sonst. Nicht aller Aberglaube, der sich in der Mathematik breitmacht, stammt deswegen auch aus der Mathematik. Man muss vielmehr unterscheiden. Die Verdinglichungen des Negativen und des Imaginären, die wir in den vorigen Capiteln weggeschafft haben, waren Hauptbeispiele einer Superstition, die rein auf dem Boden der Mathematik selbst erwachsen ist und an der anderweitige und allgemeine Neigungen und Gewohnheiten des Vorstellens nur einen secundären Antheil haben konnten. Betreten wir aber das Gebiet des sogenannten Unendlichen, so befinden wir uns nicht nothwendig gleich mitten in eigentlicher Mathematik, sondern treffen die Irrthümer und entsprechenden Schwierigkeiten bereits in den Gesammtauffassungen der Welt an. Alle Begriffe vom Sein, in denen ausdrücklich Zeit und Raum mitfiguriren, sind

auch nach Seite des Unendlichkeitsaberglaubens verdorben worden. Vor der Mathematik erscheint also die Seins- und Weltlogik oder vielmehr die an deren Stelle tretende Zerrbildlichkeit als die fehlgreifende Instanz. Der Trug, der sich hier einmal festgesetzt hatte, konnte, wo er sich auf mathematischem Boden von Neuem erzeugte, dort um so festere Wurzeln treiben und um so ungenirter ausdauern. Beide Gebiete stärkten einander im Aberglauben an das Unendliche. Der Ruf von Sicherheit, den die Mathematik von ihren bessern Bestandtheilen her genoss, deckte nicht nur in ihr selbst während der neuern Jahrhunderte das Unwesen des Unendlichen, sondern trug auch dazu bei, die Alchymie des Denkens, d. h. die Metaphysik, noch länger am Leben zu erhalten.

Wer die Unendlichkeitsvorstellungen falscher Art aus der Mathematik hinausschafft, thut hiemit auch zugleich denjenigen Schritt, durch welchen alles übrige Denken von dem Unendlichkeitsalp befreit werden kann. Der umgekehrte Weg ist nicht im gleichen Maasse entscheidend; denn wenn nicht in der Mathematik selbst aufgeräumt ist, so bleibt die scheinbar festeste Position uneingenommen. Ueberdies giebt es aber kein Gebiet, welches neben der Fähigkeit, in vollstem Maasse geklärt werden zu können, auch zugleich die Eigenschaft hätte, in entsprechendem Maasse anschaulich zu sein. Eine reine begriffliche Schematik, wie sie der Sachlogik angehört, hat ihre erste anschauliche Station in der Mathematik. Hier finden sich die wesentlichen Begriffe angewendet und gleichsam mit einem Stoff verwachsen, der selbst über allen Zweifel erhoben werden kann. Der praktische Ausgangspunkt müsste also unter allen Umständen in der Mathematik genommen werden, auch wenn es sich nicht unmittelbar um diese selbst, sondern überhaupt um gehöriges Denken und wahres Wissen handelte. Auch ist die logische Abfolge und sozusagen Rangordnung der Gedanken nur scheinbar eine andere; denn näher zugesehen, lässt sich auch im Allgemeinen nichts Bestimmtes denken, was nicht auch diejenigen Grundzüge an sich trüge, die auch in der eigentlichen Mathematik in Frage kommen. Letzterer Wissenszweig wurzelt in einem allgemeinen Denken, in welchem sich Nothwendigkeiten vorfinden, welche man mit Unrecht für specifisch mathematisch zu halten pflegt. Beiden Gebieten sind auch gegenständliche Thatsachen gemeinsam, die sich nicht trennen, d. h. nicht aus dem einen in das andere verweisen lassen. Ein Beispiel und Grundtypus solcher

Gemeinsamkeit ist nun eben Alles, was sich auf die leitenden Begriffe von einem Unendlichen bezieht.

Giebt es eine richtige Mathematik, so giebt es hiemit auch zugleich eine richtige Seinsvorstellung. Begriffe von der zeitlichen und räumlichen Unbeschränktheit, sowie von der wirklichen Grössenbegrenztheit müssen in der Mathematik in absolut maassgebender Weise erledigt werden, wenn diese Wissenschaft selbstgenugsame Sicherheit haben und nicht blos etwas Relatives oder Formelles oder sonst eine Art Wind sein soll. In letzter Instanz zeigt sich übrigens auch immer, dass die äussersten Fragen und zugehörigen Antworten, wenn sie nur genau und in gehöriger Abstraction formulirt werden, eine und dieselbe Gestalt erhalten, gleichviel, ob man sie auf dem Boden der Seinsschematik oder auf demjenigen der Mathematik aufsucht. Die Denker von Elea, wo sie sich, wie unter ihnen namentlich Zeno, mit dem Uebergang von einem ausdehnungslosen Punkte zum andern und mit einer Unendlichkeit von Zwischenstationen beschäftigten, hantirten mit ihren Begriffen genau in demselben Gebiet, in welchem sich nach länger als zwei Jahrtausenden, nämlich seit dem 17. Jahrhundert, die neuern Mathematiker, und zwar zunächst die berühmtesten, mit Fehlgriffen bethätigt haben.

Es kommt aber noch ein anderer Gesichtspunkt hinzu, aus welchem sich das allseitig Wohlthätige einer Beseitigung grade des mathematischen Unendlichkeitsaberglaubens ermessen lässt. Die Anwendungen der falschen Unendlichkeitsbegriffe in der Mathematik sind reichhaltiger und verwickelter, als irgend ein anderweitiger Gebrauch oder vielmehr Missbrauch. Wer daher auf dem mathematischen Boden gelernt hat, jenen Trug fernzuhalten und in bessern Begriffen zu denken, dem wird es keine besondere Mühe mehr kosten, sich auch anderwärts ehrlich und wahr zu halten. Würde nur im Allgemeinen das Unredliche, Widersinnige und daher Unwahre der fraglichen Fictionen blosgestellt, so bliebe die specialistische Mathematik als scheinbare Instanz übrig. Auch vollziehen sich die erforderlichen Consequenzen sowenig von selbst, dass die thatsächlichen Anfechtungen, solange sie im Allgemeinen verharren, so gut wie nichts nützen. Das Schwerste besteht nicht darin, Wahrheiten in ihren einfachen Keimgestalten kenntlich zu machen, sondern den ganzen Weg des Schaffens bis zur Frucht zurückzulegen.

2. Der mathematische Aberglaube an das Unendliche hat seine Geschichte und zwar vornehmlich eine neuere Geschichte, deren markirt hervortretende Züge seit den letzten Jahrzehnten des 17. Jahrhunderts besonders sichtbar werden. Diese Geschichte reicht bis auf die Gegenwart, und das 19. Jahrhundert hat die nicht beneidenswerthe Thatsache aufzuweisen, dass in dem metaphysisch umnebelten Kopfe des Herrn Hofrath Gauss, wie sich dieser Göttinger Professor anonym selbst am liebsten nannte, der Unendlichkeitsaberglaube zu wahrlich seltsamen Früchten auswuchs. Unter diesen Früchten stehen die gradlinigen Dreiecke, deren Winkelsumme kleiner als zwei Rechte werden soll, obenan, und das ganze Zerrbild, welches antieuklidische Geometrie heisst, hängt hiemit innig zusammen. Alle diese Thorheiten und Geistesverrückungen, die in Gauss statthatten, und die er dann zum vollständigeren Ausbrüten auf andere subalternere Geister vererbte, hätten nicht entstehen können, wenn der Unendlichkeitsaberglaube nicht der Schemel dazu gewesen wäre. Nimmt man noch den benachbarten Unsinn der ebenfalls von Gauss inaugurirten vieldimensionalen Räume hinzu, so wurzelt ein grosser Theil der Herabwürdigung, welcher der heutige Zustand der Mathematik durch die vorwiegend üble Seite des Gaussischen Einflusses anheimgefallen ist, in dem mathematischen Köhlerglauben an das Unendliche.

Sieht man aber von diesen regelwidrigen Auswüchsen ab und lässt man jene eigentlichen Ungeheuerlichkeiten bei Seite, die im 20. Jahrhundert wohl nur noch als curiose Gestörtheitsfälle in Erinnerung gebracht werden dürften, so zeigt sich ein wissenschaftlich ernster zu nehmendes Bild. Es ist dies das Bild der Unsicherheit und Unklarheit der Vorstellungen der grössten Mathematiker. Das Unendlichkleine ist ein Aberglaube, der ihnen allen gemeinsam ist, und die Rechenschaft davon ein Trug, dem sie alle unterliegen und huldigen, und den sie ihrerseits ausüben, indem sie ihn auf Andere, und zwar meist unter Verhehlung ihres bessern Gefühls der Unzulänglichkeit und Unklarheit, übertragen. Der einzige Lagrange macht eine berühmte Ausnahme, aber auch nur dadurch, dass er wenigstens seiner Abneigung gegen den metaphysischen Trugbegriff einen indirecten Ausdruck gab, indem er ihn durch ein ganzes Werk hindurch umging, anstatt ihn gradeswegs aus der Wissenschaft hinauszuwerfen. Auch scheint vor ihm der Engländer Landen eben

auch nicht weitergekommen zu sein, als um durch einen Umweg auszuweichen. Nun ist Lagrange nicht blos der bis jetzt umfassendste Repräsentant der gesammten modernen Mathematik, bei welchem sich diese Wissenschaft in der universellsten und rationellsten Weise durchgearbeitet findet, sondern er ist auch derjenige, der moralisch am meisten in Frage kommt, weil er den meisten Wahrheitssinn und die wenigsten Vorurtheile, ja von den gemeinen Vorurtheilen, die sich aus dem religiösen Regime in die Mathematik verpflanzten, gar keine hatte. Allerdings ist es in der ganzen Geschichte der Mathematik bisher beispiellos geblieben, dass Jemand aus allgemein menschlichem Hass gegen Wahrheitswidrigkeiten oder, mit andern Worten, aus Begeisterung für das Heil, welches die Ausrodung der Wurzeln der Unwahrheit unter den Menschen mit sich bringen muss, den Augiasstall der Mathematik zu säubern unternommen habe. In diesem Sinne sind die Mathematiker nie Enthusiasten gewesen und haben ihre eigne Wissenschaft nie aus dem Gesichtspunkt desjenigen Reformationsdranges aufgefasst, der die höheren, ja erhabensten menschlichen Angelegenheiten für geschädigt ansieht, wenn sich Aberglaube und sittlicher Trug in mathematischen Begriffen umtreiben dürfen. Wohl aber sind die Mathematiker oft im Gegentheil Fröhner auch des gröberen Aberglaubens gewesen und sie sind noch heute am allerwenigsten dazu gemacht, sich irgend einem verstandeswidrigen Unfug energisch zu widersetzen. Ihre Abstractheit macht sie unempfänglich für volleres Geistesleben und ähnelt häufig der Blasirtheit gegen alle übrigen Geistesinteressen.

Es ist daher verhältnissmässig um so werthvoller, in Lagranges Verhalten wenigstens einen solchen Fall vor sich zu haben, der in der Richtung auf das Reformatorische liegt, wenn bei ihm auch nicht ausdrücklich die moralische Seite der Sache betont und auch nicht eine directe Reinigung, sondern nur eine indirecte Verbesserung der höhern Mathematik ins Auge gefasst ist. Lagranges Position ist hienach nur ein Vorstadium für Entscheidenderes, gleichsam eine Doppelstellung, die mit dem einen Fuss noch auf dem Boden der alten Unbegriffe stehen bleibt, während sie mit dem andern bereits auf einen festeren Stufenbau aufsetzt.

Unter den namhaften Mathematikern seit Lagrange, welche in Vergleichung zu ihm sämmtlich nur als mehr oder minder epigonenhafte Subalternitäten erscheinen, die verdienstvollsten,

wie Abel und Galois, nicht ausgeschlossen, ist nun aber keiner, der in Beziehung auf die Handhabung der Unendlichkeitsbegriffe auch nur den reformatorischen Standpunkt jenes wahrhaften Förderers der Analysis ernsthaft unterstützt hätte, und dieser Standpunkt lag doch selbst erst auf einer Nebenhöhe und nicht bei dem Ziele auf dem Gipfel. Im Allgemeinen ist sogar die Signatur des 19. Jahrhunderts gegenüber Lagrange, wie in den meisten sonstigen Beziehungen, eine reactionäre. Man fällt nämlich wieder vollständiger in den Cultus des metaphysischen Unendlichkleinen zurück, über den Lagrange zwar nicht völlig erhoben, von dem er aber doch wenigstens auf einen Seitenweg abgelenkt hatte. Das kennzeichnendste Hauptbeispiel für diese Reaction ist unter den Analytikern der katholische Legitimist und Jesuitenlehrer Cauchy gewesen, der seine Verstandeswidrigkeiten in die Form einer recht streng seinwollenden Skepsis, nämlich einer gegen den Verstand selbst gerichteten Zweifelsucht hüllte, und im Uebrigen bei seinen Uebungen im Calcül echt akademisch von allerlei Tischen zehrte, ohne die Rechnungen zu zahlen und die Wirthe zu nennen, bei denen er gespeist hatte. Was bei Gauss nur eine Ausnahme war, war nämlich bei diesem Cauchy Regel, und dieser sollte immer genannt werden, wo es sich um das Beispiel eines nicht blos rückläufigen, sondern auch widerwärtig hinterhaltigen Gedankenganges handelt. Selbstverständlich bestärkte er den an sich rückläufigen Tross durch schlechte Wendungen in den metaphysisch verdorbenen Begriffen vom Unendlichkleinen, indem er sich obenein die Miene gab, hier besondere Untersuchungen angestellt zu haben. Was andere Namen, besonders auf deutschem Boden, wie beispielsweise den Juden Jacobi und den Professor Dirichlet anbetrifft, so sind ihre Begriffe in dem alten vorlagrangeschen Fahrwasser verblieben, und sie haben ihr Theil zur Reaction ebenfalls beigetragen.

Die gangbaren Lehrbücher und Curse brauchen kaum erwähnt zu werden; sie sind das Schulecho der jeweilig tonangebenden Matadore oder noch weniger als das. In Beziehung auf unsere Frage zehren die bessern allerdings von einer älteren, kritisch seinwollenden, aber ebenfalls vorlagrangeschen Tradition. Es ist dies in der Begründung der Differentialrechnung die vorgebliche Grenzmethode, die in den Newtonschen ersten oder letzten Verhältnissen ihren Typuskeim, in d'Alembert aber ihren akademischen Promotor gefunden hat. Sie geht von fixirten endlichen

Differenzen, d. h. von irgendwie grossen Grössenstücken aus, um diese dann immer kleiner werden und schliesslich an einer Grenze verschwinden, aber wohl gemerkt, nicht streng Null werden zu lassen. Die gebrauchtesten Lehrcurse der Pariser Polytechnischen Schule, wie früher der von Navier und später der von Sturm, etabliren das Unendlichkleine recht handgreiflich hart an der Grenze, womit dann der ganze Trug von Neuem statuirt ist und der Ausgang von einem fixirten endlichen Grössenstück als Ueberflüssigkeit hervortritt, — vorausgesetzt nämlich, dass man bereits richtige Begriffe zur Verfügung hat, um sie an solche Darstellungen als Maasse anzulegen. In der That ist von d'Alembert nichts logisch Durchgreifendes ausgegangen. Dieser Mathematiker wünschte zwar radical zu verfahren, ermangelte aber der Tiefe und eines hinreichenden Wahrheitssinnes. So ist denn auch die Grenzmethode nicht von der Metaphysik emancipirt, sondern nur die Verlegung des metaphysisch Falschen in einen weniger scheinbaren Hintergrund. Auch erklärte sich Lagrange mit Recht gegen die Grenzmethode, wenn er es auch aus einem Grunde that, der seiner Abneigung gegen sie eben nur einen Ausdruck gab, ohne deren Hauptfehler zu treffen. Er wollte nämlich den Begriff der Grenze nur da gelten lassen, wo offenbar etwas Festes einer sich unbeschränkt annähernden Veränderung gegenübersteht, wie etwa der Kreis eine Grenze gegen die mit unbeschränkt zu steigernder Seitenzahl einzuschreibenden und umzuschreibenden Vielecke bildet. Dagegen sollte die Tangente eines Punktes keine echte Grenze der durch denselben Punkt gehenden Secanten sein, weil man mit diesen Secanten noch über die Tangentenlage hinausgehen kann. Dieser Einwand trifft offenbar nicht den Hauptpunkt; denn die Tangente wird eben nicht als unüberschreitbare Grenze, sondern als bestimmte feste Position, auf die man die Annäherungen und Entfernungen auf beiden Seiten beziehen kann, in Anschlag gebracht. Der Fehler der Grenzmethode liegt eben darin, dass sie thatsächlich nicht zur Grenze selbst gelangt, sondern sich mit etwas Zweideutigem an oder vielmehr vor derselben, ja mit einer Ungereimtheit zufriedenstellt, die eben das Unendlichkleine und den zugehörigen metaphysischen Trug trotz aller Proteste noch einschliesst. Lagrange aber konnte hierauf nicht sein Augenmerk richten; denn er selbst hat, wenn auch widerwillig, das Unendlichkleine als eine Hypothese beibehalten, und es war daher keine Inconsequenz, dass er auch in der zweiten

Auflage seiner Analytischen Mechanik, die der Functionentheorie um circa 15 Jahre nachfolgte, diese Hypothese und nicht etwa blos die Differentialsymbolik beibehielt. Von den Aufsätzen im ersten Bande der Turiner Miscellaneen an bis zur fraglichen zweiten Auflage, mit der er nicht mehr fertig wurde, hat Lagrange jene Hypothese als gleich den Untheilbaren conventionell brauchbar conservirt. Der Fortschritt in seinem Geist, der im Revolutionsjahrzehnt seinen Höhepunkt erreichte, hat nur darin bestanden, dass er diese Hypothese als eine, die unmittelbar nicht sicher genug wäre, ansehen lernte, und dass er sich neben ihr zur Befestigung dessen, was conventionell auf ihr beruhen sollte, noch einen andern klareren und von jeder metaphysischen Hypothese unabhängig seinsollenden Weg bahnte. Einige Stellen in seiner Mechanik und zwar in deren zweiter Auflage lehren handgreiflich, wie auch in seinem Geiste bezüglich des Unendlichkleinen noch Dunkelheit genug bestehen geblieben war, um ihn an einer unmittelbar exacten Auffassung der Differentialien und deren sachlicher Gegenstücke in der Anwendung zu hindern.

3. Um die vorangehenden geschichtlichen Hinweisungen durch speciellere Nachweisungen ergänzen zu können, muss unser Entwurf der richtigen Begriffe vorangehen; denn nur mit ihrer Hülfe lässt sich das Falsche zutreffend beurtheilen. Es sei daher zunächst an einen doppelten Gegensatz erinnert, den man bisher nicht gekannt hat. Man war zwar stets genöthigt gewesen, Null und das Unendlichkleine zu unterscheiden; aber man hat im Unendlichgrossen nichts Entsprechendes von einander getrennt, ja nicht einen entfernten Begriff davon gehabt, dass eine solche Unterscheidung überhaupt möglich, geschweige dass sie unumgänglich wäre. Die Tangente des Winkels von 90° ist eine unbegrenzte Linie, gleichwie die zugehörige Secante. Diese thatsächliche Unbegrenztheit ist nun aber etwas Anderes, als jene Schrankenlosigkeit des Wachsens, die bei der Tangente statthat, wenn man sich den Winkel, zu dem sie Tangente sein soll, unbeschränkt an 90° annähern lässt, dergestalt dass noch immer ein Unterschied gegen 90° stattfindet, diese Differenz aber nach Null hin beliebig klein gemacht werden kann. Unter letzterer Voraussetzung ist die Kleinheit der Winkeldifferenz nicht an irgend eine feste Grösse gebunden, über welche hinaus sie etwa nicht kleiner werden dürfte, d. h. das Kleine, welches man setzen will, ist nicht begrenzt, sondern unbegrenzt. Es hat zur Grenze 0,

ist nur ein anderer Ausdruck dafür, dass es überhaupt keine Grössengrenze habe; denn 0 ist keine Grösse, sondern die Abwesenheit der Grösse. In diesem Sinne hat man aber das Unendlichkleine nie gefasst, sondern man hat es verdinglicht als ein bestehendes und gegebenes Etwas, welches kleiner wäre als jede angebbare Grösse. Thatsächlich kleiner als jede angebbare Grösse ist aber nur Null. Es widerspricht dem Begriff der Grösse, jenseit aller möglichen annehmbaren Grössen zu liegen. Was Grösse sein soll, muss unter allen Umständen, wo es auch vorausgesetzt werde, eben eine bestimmte vorlegbare Grösse haben. Es kann nicht zugleich Grösse und Nichtgrösse sein; die metaphysische Fiction der Mathematiker nahm aber ein solches Unding an.

Zwischen Null und irgend einer Grösse, so klein sie auch sein möchte, soll es nach jener, noch heute curshabenden Fiction ein Mittelding geben. Dieses Mittelding soll nicht Null, aber auch nicht eine sehr kleine Grösse sein, die man beliebig annehmen mag; sondern es soll jenes Letzte sein, was man über alle Grade annehmbarer Kleinheit hinaus vorauszusetzen habe. Welchen Grad von Kleinheit man auch setze, nie erreicht man den fraglichen metaphysischen Zwitter von Null und Grösse; aber im Wolkenkukuksheim der Mathematiker existirt er doch; denn sie selbst haben ihn mit der Metaphysik gezeugt, und er ist ihnen sogar selbst als ein sehr zeugungsfähiges Wesen erschienen. Fruchtbar an Unsicherheiten und Thorheiten ist nun diese Fiction allerdings gewesen; zeugungsfähig war aber nicht sie, sondern das Wahre, was in und trotz ihrem Nebel sich, wenn auch getrübt, mit der Unwillkürlichkeit der Natur geltend gemacht hat.

Nach Allem, was sich in die Vergangenheit zurück absehen lässt, ist eine sehr alte Redensart daran schuld, dass in den neuern Jahrhunderten der Aberglaube entstanden ist, durch welchen jene Fiction des Unendlichkleinen geschaffen wurde. Der Ausdruck „kleiner als jede angebbare Grösse“ kann unter Umständen einen leidlichen Sinn haben. Dies ist der Fall, wenn man ihn nicht für etwas Thatsächliches, irgendwie fertig Bestehendes, sondern in einem ganz andern, sprachlichen und logischen Zusammenhang braucht, wo er sich auf unsern Willen bezieht, etwas immer kleiner vorauszusetzen, als irgend eine Grösse, die wir jeweilig angeben mögen. Wir überspringen damit im Voraus unsere eigne Satzung und durchlaufen gleichsam mit einem Blick alle

bis zur Null hin setzbaren Grade der Kleinheit. Dieser eine Blick ist allerdings nur der Ueberschau der räumlichen Bewegung zu danken, und der falsche Schein, der hineingemischt wird, berichtigt sich, sobald man nur fest an den weit klareren arithmetischen Begriffen hält. Wenn man zwischen Eins und der Null Brüche einschaltet, so kann man sich allerdings, in das Unbeschränkte des Zählens hinein, einen Inbegriff aller Einschaltbarkeiten im Voraus denken. Dieser Inbegriff ist aber nur die Vorwegnahme einer unendlichen Häufung, gleich der Häufung der Zahlen in der unbeschränkten Zahlenreihe. Er ist ein Begriffsrahmen für die Voraussetzung einer nie zu vollendenden Thätigkeit. Wer aber hiebei das nie zu Vollendende als vollendet setzen wollte, würde sich nicht nur mit seiner eignen Satzung in Widerspruch setzen, sondern auch zugleich die Ungereimtheit begehen, gegen das Gesetz der bestimmten Anzahl zu verstossen. Alles der Zahl nach als thatsächlich vorhanden Gesetzte kann eben nur in bestimmter Anzahl dasein. Eine unendliche Zahl als etwas Gegebenes oder fertig Gebbares ist ein Unbegriff, d. h. ein in sich selbst unwahrer, haltloser und unmöglicher Begriff. Auf dieses unser Gesetz der bestimmten Anzahl baut sich eine ganze Weltauffassung und eine Berichtigung der bezüglich des Zeit- und Rauminhalts falschen Weltbegriffe auf; doch hier geht uns zunächst nur das rein Mathematische an sich selbst an. Hier leistet jenes Gesetz genug, indem es aus der Anschauung der Bewegung die künstlich hineingebrachten Verstandeswidersprüche fernhält.

Sagt man kleiner als jede angebbare Grösse, so hat dies einen Sinn nicht als Thatsächlichkeit, sondern als Möglichkeit. Es werde irgend eine noch so kleine Grösse gegeben, und es ist, unter Voraussetzung der unbeschränkten Theilbarkeit, möglich, eine noch kleinere zu setzen. Jener kleine Winkelabstand gegen 90^0 wird, indem man dem beweglichen Radius nacheinander verschiedene Lagen giebt, nach rein mathematischer Anschauung jeden Grad von Kleinheit annehmen können; ebenso jeder Linienabstand, wenn man dem beweglichen Punkt zum festen immer nähere Lagen giebt. Wenn daher, der gewöhnlichen Vorstellung von einer absolut stetigen Bewegung gemäss, alle Lagen durchlaufen werden, so gewinnt es den Anschein, als wenn auch alle Grade der Kleinheit thatsächlich durchlaufen sein müssten. Die Bewegung erscheint hier als die Zauberin, die das Unendliche über-

brückt und vollendet, also einem Widerspruch und einer Ungereimtheit zur Wirklichkeit verhilft. Der Eleatische Zeno hat deshalb sie selbst als ungereimt, als täuschend und als einen blossen Schein angeklagt, der nicht wahrhaft existire. Anstatt aber bis zu der Narrheit fortzuschreiten, das ganze Sein der Bewegung zu leugnen, hätte man besser in den eignen Verstand greifen und dort die Voreiligkeiten, Künstlichkeiten und Fehler aufsuchen sollen, mit denen man sich zuerst den Begriff der Bewegung verdorben hat. Sinne, sinnliche Anschauung und Vorstellung sind an dieser Verderbniss nicht schuld, wohl aber ist die Verschulung der Begriffe die Ursache, an die jenes Widerspruchsraffinement sich zu hängen vermochte. Die Setzung unendlich vieler getrennter Punkte in der Ausdehnung ist immer nur eine Möglichkeit und nie eine vollendete Thatsache. Von zwei unmittelbar aneinanderhängenden Punkten haben wir aber schlechterdings keinen Begriff. Ausdehnungslose Punkte, um die es sich im strengen mathematischen Denken nur handeln kann, fallen entweder zusammen; oder aber sie haben eine Lage, in der sie nicht zusammenfallen, und alsdann haben sie auch eine bestimmte, als angebbar zu denkende Entfernung. Auch hängt diese Art Nothwendigkeit nicht etwa von einer erst zu untersuchenden volleren Wirklichkeit der Dinge, sondern von der Beschaffenheit und Thätigkeit unserer Begriffe und unseres Begreifens selbst ab. Eine stetige Folge von ausdehnungslosen Punkten, von denen der eine da anfinge, wo der andere aufhörte, ist daher selbst ein unzulässiger Unbegriff. Ueberhaupt ist die mathematisch curshabende Stetigkeitsvorstellung ein verkappter Unendlichkeitsbegriff von der falschen Art. Wir haben daher nur die Möglichkeit der Setzung unbeschränkt vieler discreter, d. h. unterschiedener oder getrennter Punkte, aber nie an sich das thatsächliche und vollendete, also innerhalb einer Linie fertig vorliegende Gesetztsein solcher Punkte zuzulassen. Ebensowenig dürfen wir zwei, geschweige unendlich viele Punkte statuiren, die unmittelbar an einander hingen. Die Continuität hilft hier gar nichts; ihr Begriff ist gleich dem Unendlichkeitsbegriff von falschen Hineinlegungen freizuhalten, und alsdann lässt sie sich nur begrifflich als diejenige Ursache bestimmen, vermöge deren die unbeschränkte Einschaltbarkeit von ausdehnungslosen Punkten möglich ist. Sie selbst wird also nur durch einen Unendlichkeitsbegriff definirt, aber wohlgemerkt durch einen richtigen, der, wie

Notice the contrast between D. & Renouvier, D. appealing to the "cause" & Ren. to the

jeder wahre Unendlichkeitsbegriff, nur ein Möglichkeitsbegriff ist. Im Uebrigen wird aber die erfahrungsmässig zu kennzeichnende Stetigkeit nicht in Beziehung auf ausdehnungslose Punkte, sondern immer in Beziehung auf Elemente von irgend welcher Grösse zu bestimmen sein.

4. Beliebt man die Redensart, es wachse eine Grösse durch Stufen, die kleiner seien als jede angebbare Grösse, so liegt hierin derselbe Widerspruch, den wir vorher signalisirt haben. Nur ist diese Form desselben etwas verfänglicher. Man kann sich nämlich das stetige Wachsen nicht genauer, d. h. in einzelnen Stationen, vorstellen, wenn man es nicht unwillkürlich durch einen discreten Zuwachs bestimmter kleiner Elemente vor sich gehend denkt. Alsdann bekümmert man sich nicht darum, ob und wie innerhalb jedes kleinen Incrementes selbst noch ein Wachsen stattfinde oder vorzustellen sei. Man lässt dies vorläufig auf sich beruhen. Kommt man aber in den Fall, die kleinen Zuwachsungen selbst als durch Wachsen entstandene Grössen zu untersuchen, so hindert rein mathematisch nichts, sie wiederum aus noch kleineren Elementen zusammengesetzt zu denken, und so fort ohne irgend welche Beschränkung. In der Wirklichkeit physikalischer Dinge können und müssen freilich Schranken vorhanden sein; aber im Reiche mathematischer Begriffe geht uns zunächst nur deren eigne Consequenz und Widerspruchsfreiheit etwas an. Hier sehen wir, dass die als stetig gedachten Grössen eben ohne Stufen wachsen. Von Stufen und Graden ist nur da zu reden, wo man selber welche setzt, und insoweit dies geschieht und maassgebend ist, giebt es eben keine Stetigkeit mehr, die im streng geometrischen Sinn so heissen dürfte. Stetige Grössen wachsen also an sich selbst gar nicht durch Stufen, sowie sie auch nicht als aus nachweisbaren Bestandtheilen, die an sich vorhanden wären, zusammengesetzt gedacht werden dürfen. Wir setzen in ihnen Abtheilungen und unterscheiden Stücke, aber an sich sind diese Grenzen in ihnen nicht vorhanden. Es ist vielmehr nur unsere Willkür, welche die fraglichen Einschnitte macht. Hieraus sieht man, dass der Stetigkeitsbegriff, also in erster Linie der Begriff von der Stetigkeit der räumlichen Ausdehnung, ein Unendlichkeitsbegriff ist, aber richtig gefasst, nur ein solcher, welcher die Möglichkeit des unbeschränkten Setzens von Grenzen, aber nicht das unendlich zahlreiche Gesetztsein solcher Grenzen und Punkte einschliesst.

Die reine Mathematik hat in der hier fraglichen Beziehung

keine weitere Aufgabe, als sich mit den von ihr selbst gesetzten Begriffen in widerspruchsfreier Uebereinstimmung zu halten. Hiezu hat sie sich nur vorzusehen, in die Begriffe Mehr hineindenken zu wollen, als erforderlich ist. Die ganze kritische Arbeit an den verfehlten Begriffen besteht also darin, diese der falschen Phantasien zu entkleiden, oder von vornherein an die Stelle völliger Fehlbegriffe rationelle Conceptionen zu setzen. In der That bleibt von dem metaphysischen Unendlichkleinen nach einer solchen kritischen Arbeit eigentlich gar nichts übrig; denn den Gedanken, dass man von einer mathematisch gedachten Grösse zwei Stücke und von jedem Stück wiederum zwei Stücke machen und so unbeschränkt fortfahren könne, — diesen Gedanken der unbeschränkten Zerlegbarkeit in Stücke oder Theile, welche in jedem besondern Fall noch kleiner gemacht werden können, als irgend eine für diesen Fall gegebene kleine Grösse, diese Idee wird man doch wohl nicht für die seit Jahrhunderten curshabende Conception des Unendlichkleinen ausgeben wollen! Unter dieser Voraussetzung wäre nämlich die metaphysische Verdinglichung nicht mehr vorhanden; es gäbe nur einen Begriff von der Unbeschränktheit in der Verkleinerung, wie es andererseits einen giebt von der Unbeschränktheit in der Vergrösserung.

Stellt man positiv die verstandesmässigen Begriffe hin, und zeigen sich diese auch als genügend, sowie als zuverlässig und bequem brauchbar, um alle mathematischen Operationen an sich selbst damit zu vollziehen und alle praktisch physikalischen Untersuchungen damit anzustellen, so besitzt die Wissenschaft daran nicht nur Richtigeres, sondern auch Mehr, als je von den früheren Halbbegriffen trügerischer Mischung geleistet wurde. Man gehe also bezüglich des Unendlichkleinen davon aus, dass an seine Stelle eine Grösse zu setzen ist, die im Rechnungszusammenhange jeden Grad der Kleinheit repräsentiren darf und eventuell auch soll. Handelt es sich beispielsweise um eine Längenausdehnung, so kann diese Grösse je nach Umständen ein Milliontel Millimeter oder aber eine Sonnenweite sein. Wesentlich ist nur, dass diese jeweiligen Bestimmungen, die man in der Vorstellung grade ins Auge fasst, nicht die Hauptsache ausmachen, sondern dass diese in dem Gedanken besteht, dass an Stelle dieser, im Rechnungszusammenhange in Beziehung auf andere Grössen verhältnissmässig klein gewählten Grössen noch kleinere treten können, und zwar dergestalt, dass der Kleinheit durch den Rechnungs-

zusammenhang und durch die Natur der Aufgabe keine Schranke gesetzt ist. Angenommen, eine klein gewählte Länge sollte in der reinen Mathematik nach willkürlicher Satzung oder könnte in der Physik nach der Natur der Aufgabe nicht kleiner als ein Milliontel Millimeter werden, so wäre die Grössengattung, der sie angehört, z. B. irgend eine Distanz, die man sich verändern lässt, nicht unbeschränkt verkleinerungsfähig. Hiemit aber fehlte dieser, ich sage ausdrücklich endlichen, Grösse die Eigenschaft, vermöge deren sie nach dem herkömmlichen Jargon, aber in unserm rationellen Sinne, unendlich klein heissen dürfte. Wir aber werden vorläufig, und um die verschiedenen Gedanken auch durch verschiedene Wörter zu unterscheiden, lieber sagen, unbeschränktklein. Das Unbeschränktkleine, welches hienach den verstandesmässigen Begriff an Stelle des verstandeswidrigen Unendlichkleinen vorstellt, ist eine bestimmte endliche Grösse, der jedoch die Eigenschaft wesentlich ist, ohne Schranken kleiner gesetzt werden zu können. Sie ist aber keine veränderliche Grösse, wie man das Unendlichkleine auch neuerdings fälschlich definirt hat; denn sie stellt stets einen ganz bestimmten Grad der Kleinheit vor, der im Rechnungszusammenhange consequent und constant festgehalten werden muss. Unter den übrigen Graden der Kleinheit kann man allerdings wählen; aber stets muss man, nach einmal vollzogener Wahl, den Kleinheitsgrad durch das ganze System der davon abhängigen Operationen festhalten. Denkt man sich also eine Grösse aus unbeschränktkleinen gleichen Theilen zusammengesetzt, so heisst dies soviel als man wählt willkürlich sehr kleine Elemente von irgend welchem bestimmten Grade der Kleinheit und vergisst dabei nicht, dass diese Wahl eine gegen Null hin schrankenlose gewesen ist, und dass sie auch auf jeden andern, noch kleineren Werth hätte fallen können. Ja sie kann durch einen solchen und durch viele solche jeden Augenblick ersetzt werden, wenn man gleichsam die Basis, auf der alles Uebrige in den Operationen beruht, einmal oder öfter ändern will, was dann aber durchgängig für alle weiteren Abhängigkeiten geschehen muss.

Schon der Umstand, dass man einen unbeschränkt kleinen Zuwachs constant macht, ist nichts Nothwendiges, sondern die Folge einer bestimmten Wahl des Arrangements, nach welchem man sich eine Grösse zusammengesetzt oder wachsend denken will. Die Kleinheit des jeweiligen Elements, welches man als

jeweilig letztes repräsentatives Bestandstück der Grösse vor Augen hat, ist beliebig, aber in der einzelnen Vorstellung, wo klar gedacht wird, nie nebelhaft schwankend, sondern völlig bestimmt. Das Unbeschränktkleine ist hienach zunächst das Kleine überhaupt, aber mit der Eigenschaft gedacht, dass für seine Kleinheit nach Null hin eine unbeschränkte Wahl offen steht. Es ist jederzeit eine bemessene Grösse; aber das Zeichen dieser Grösse ist zugleich mit der Erinnerung behaftet, dass es in einer gegen Null hin unbeschränkten Weise jegliche noch kleinere Grösse vorstellen dürfe, falls nur dieser noch kleinere Werth alsdann auch durch den ganzen Rechnungszusammenhang festgehalten wird. Die Unbeschränktheit ist daher nicht in der kleinen Grösse, die etwa unter dem Zeichen dx oder als kleine geometrische Länge vorliegen soll, irgendwie verkörpert, sondern nur ein Gedanke, der zu dieser an sich bemessenen, ja man kann dem Sprachbrauch zum Trotz sagen, endlichen Grösse hinzugesellt wird. Dieser Gedanke besteht aber in nichts Anderem, als dass diese kleine Grösse Repräsentant nicht blos für ihren eignen, sondern für jeglichen Grad der Kleinheit sein soll. Differentiale sind also kleine Differenzen, deren Kleinheit gegen Null hin ohne Schranke angesetzt werden kann und soll. Sogenannte endliche Differenzen oder, wie wir lieber sagen würden, beschränkte Differenzen, würden aber im exacten Sinne nur diejenigen sein können, für welche nach Seiten der Verkleinerung hin eine feste Grenze gezogen ist. Der strenge Gegensatz gegen das Unbeschränktkleine ist das Beschränktkleine. Gemeiniglich versteht man aber unter endlichen Differenzen nach der einen wie nach der andern Seite, gegen das Kleinere wie gegen das Grössere, festbestimmte Grössen. Unter dieser Voraussetzung macht es sich aber nur um so komischer, wenn man das $\triangle x$ als sogenannte endliche Differenz dennoch immer kleiner und kleiner werden lässt, um dann schliesslich hart vor Null im Reiche des Grössenverschwindens und der Grössennebel bei einem unendlichkleinen dx Halt zu machen und in dieser unergründlichen Tiefe infinitesimal Anker zu werfen. Es versteht sich, dass es allein verstandesmässig ist, von vornherein eine beliebige kleine Differenz zu betrachten und sie mit dx zu bezeichnen, aber zugleich hinzuzufügen, dass diese Bezeichnungsweise anzeigen soll, wie die Wahl oder Setzung der Kleinheit dieser Differenz als gegen Null unbeschränkt zu verstehen sei.

5. Es sei hier gleich vorangeschickt, dass die Differentialrechnung nach unserm rationellen Begriff vom Unbeschränktkleinen eine Annäherungsrechnung ist, aber wohl zu merken, eine Rechnung nicht überhaupt der Annäherung im gewöhnlichen Sinne, sondern der unbeschränkten Annäherung. Jegliche Rechnung mit dem Unbeschränktkleinen hat die Eigenthümlichkeit, dass ihre Beziehungen und Ergebnisse nicht überhaupt Functionen des Kleinen, sondern des Unbeschränktkleinen sind. Demgemäss liefern sie da, wo man anstatt der unbeschränkten Annäherung an Null die Null selbst ins Auge fasst, zu diesem wirklichen und echten Grenzfall auch nicht blos Annäherungen überhaupt, sondern unbeschränkte Annäherungen. In dieser Correspondenz verschiedener unbeschränkter Annäherungen an den Fall, wo die Basis der Operationen hinterher mit Null vertauscht wird, liegt das Wesen der Infinitesimalrechnung. Jener Nullfall ist die Norm, an welcher die Abweichungen gemessen werden, und die Kleinheit dieser Abweichungen ist unbeschränkt.

Wollte man aber den Nullfall gar nicht besonders in Frage bringen, so könnte man auch sagen, dass Grössen von unbeschränkter Kleinheit in allen Functionen, d. h. in allen Abhängigkeiten, in die sie eingehen mögen, Grössen von entsprechender Eigenschaft mitsichbringen können, und dass diese entsprechende Eigenschaft es ist, mit der unmittelbar gerechnet wird. Der Umweg durch den Nullfall, d. h. das Rechnen mit den echten Grenzen selbst, ist durch Lagrange zum Kanon gemacht, darf aber deswegen nicht uneingeschränkt kanonisirt werden. Der Nullfall tritt nämlich erst dann praktisch ein, wenn durch die Division zweier unbeschränkt kleiner Grössen eine Grösse entsteht, welche nicht mehr zur Gattung der als Hülfsmittel dienenden Theilgrössen gehört. Dieser Differentialquotient ist allerdings meistens nicht rein eine solche Hauptgrösse, sondern enthält als Zusatzbeimischung noch eine unbeschränktkleine Grösse. Letztere fällt aber für den reinen Nullfall fort und wird übrigens auch sonst als für den Rechnungszusammenhang unerheblich nicht abgesondert in Anschlag gebracht. In der überlieferten gemeinen Differentialrechnung confundirte man eben beide Bestandtheile des Differentialquotienten, weil man sie nicht kannte, denn die Nebel des Unendlichkleinen liessen derartige strenge Unterscheidungen nicht aufkommen.

Lagranges i, d. h. sein Increment zu x, ist nichts Anderes,

als ein Unbeschränktkleines in dem von uns dargelegten rationellen Sinne. Lagrange kam aber nicht darauf, dem dx keinen andern Begriff als seinem i beizulegen, und dieses unzureichende Verhalten rührte daher, dass er noch nebenbei die Hypothese des gewöhnlichen Unendlichkleinen duldete und die übeln Schatten davon in seinem Geist nie ganz loswurde. Hätte er die völlige Uebereinstimmung seiner Zuwachsungen i und o mit rationell zu denkenden unbeschränktkleinen Differenzen dx und dy eingesehen, so würde er auch seine Notation der abgeleiteten Functionen nur als ein ergänzendes Hülfsmittel eingeführt und $f'x$ statt $\frac{dy}{dx}$ nur da geschrieben haben, wo es sich wirklich um die Unterscheidung des Nullfalls von demjenigen unbeschränktkleiner Grössen handeln sollte. Um mit den Begriffen und Zeichen von Lagranges Functionentheorie und Functionenrechnung praktisch in der Anwendung auf Geometrie, Mechanik und Physik auszukommen, muss man mit den i und o, sowie vielen ähnlichen, neu zu bezeichnenden Hülfsgrössen in entsprechender Weise verfahren und rechnen, wie mit den dx oder dy oder andern isolirten, d. h. noch nicht zu Quotienten verbundenen Differentialen in der eigentlichen Infinitesimalrechnung.

Eine Ausmerzung der Rechnung mit Grössenbestandtheilen, deren Kleinheit unbeschränkt gesetzt wird, ist nach dem Vorangehenden nicht möglich. Ein blosses Zurücktretenlassen jener Grössenbestandtheile und ein vorherrschendes Verlegen der Rechnung auf die echten Grenzfunctionen, welche für den Nullfall gelten, ist aber auch erst möglich, nachdem man durch die Zurüstung der unbeschränkt kleinen Hülfsgrössen gewisse Ergebnisse und Begriffe bereits gewonnen hat. In der wirklichen Zergliederung der zu untersuchenden Gegenstände muss man immer mit den kleinen Hülfsgrössen beginnen, und kann diesen erst den Abschied geben, nachdem sie ihre Dienste gethan haben. Bei Lagrange sind, wie gesagt, die Incremente i und o jene unbeschränkt kleinen Hülfsgrössen, und diese figuriren auch in allen Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. Sie sind die echten Unbeschränktkleinen, und es ist schade, dass sie nicht gleich mit einer andern Notation vertauscht und als elementare Differenzen von beliebig zu steigerndem Kleinheitsgrade eingeführt wurden. Der Grund dieses entscheidenden Mangels ist bereits angegeben.

Die unbeschränkte Approximationsrechnung, welche Differen-

tialrechnung heisst, bleibt eine unumgängliche Form der Untersuchung und des Rechnens; denn man braucht durchaus nicht die Absicht zu haben, in irgend einer Gattung von Beziehungen aus dem eigentlichen Grössengebiet herauszutreten und statt mit Grössen mit Nullen rechnen zu wollen. In der Null verschwindet stets die fragliche Grössengattung, und wo nichts ist, da ist auch nichts zu erkennen. Wenn die arithmetische Form $\frac{0}{0}$ dennoch einen Sinn hat, so ist dieser wenigstens kein unmittelbar ersichtlicher, sondern nur ein mittelbar festzustellender. Die Erschliessung dieses Sinnes setzt voraus, dass man die Grössen zu Hülfe nehme, die in jenem Quotienten zu Null geworden sind. Eigentlich hat auch jede von beiden Grössen eine Zusammensetzung, vermöge deren sie sich in einen festen Coefficienten und eine Hülfsgrösse zerlegen lässt. Werden nun die Hülfsgrössen zu Null, so heisst dies soviel, als dass man von ihnen abstrahirt, und es bleibt der verständliche Bruch aus den Coefficienten übrig. Dieser verwandelt sich nur dann in die nichtssagende Form $\frac{0}{0}$, wenn man jeden Coefficienten mit seiner Null wirklich multiplicirt, und aus solchen Verdeckungen der nothwendigen Zergliederung stammen die unbestimmten Nullquotienten. Alle Differentialquotienten verwandeln sich aber in die Form $\frac{0}{0}$, sobald man die unbeschränkt verkleinerungsfähigen Differenzen aufgiebt und den Sprung zum echten Grenzfall ausführt. Dieser Sprung besteht, näher betrachtet, darin, die kleine Grösse durch Theilung und Wegnahme nicht blos unbeschränkt zu verkleinern, so dass noch immer ein Rest von ihr bleibt, sondern sich endlich einmal zu entschliessen, sozusagen in einem letzten Act auch diesen Rest selbst wegzunehmen. Ich nenne dies absichtlich einen Sprung; denn in dem einen Falle bleibt man im Unbeschränktkleinen, im andern springt man im eigentlichen Sinne des Worts von der existirenden Grösse zum Grössennichts hinüber.

6. Sichtlich ist es das, was man sich unter Exhaustion der Alten denkt, was mit seinen logisch unzulänglichen Wendungen die Ursache geworden ist, dass sich auch die Neueren nicht recht zu fassen wussten, mochten sie nun durch oder, wie Lagrange theilweise, ohne die absurde Fiction des Unendlichkleinen ihre Schlüsse machen. Schon der Name Erschöpfung der Grössen ist

etwas Ungenaues; denn in der That wird keine Grösse dadurch erschöpft, dass man vom jedesmaligen Rest immer wieder ein Stück wegnimmt, ohne jemals den ganzen Rest auf einmal fortzuthun. Wie auch das Gesetz der Grössenverminderung beschaffen sein möge, man kann auf dem bezeichneten Wege immer nur eine Convergenz gegen die stets jenseits bleibende Null, aber nicht Null selbst erreichen. Aber erst in letzterem Fall wäre die Grösse wirklich, d. h. vollständig, ausgeschöpft. Wenigstens heisst es gegen allen Sprachgebrauch und die ihm zu Grunde liegenden gesunden Begriffe verstossen, wenn man ein Gefäss ausgeschöpft nennen und als ausgeschöpft ansehen will, solange noch ein Rest seines Inhalts darinist. Der Begriff der Exhaustion ist daher, wenn auch nicht ganz, so doch nahezu so trügerisch, wie derjenige des Unendlichkleinen. Er bedeutete ungefähr ebensoviel, wie die Ausmessung von Grössen durch Einheiten oder Einheitstheile, mit denen sie nicht messbar sind. Man misst und will zu Ende ausmessen; aber man kann es nicht. Man macht den kleinen Rest selber immer wieder zum Maass, misst in das, was vorher Maass war und erhält so den nie endenden Kettenbruch. Dies ist das Ergebniss des Bestrebens, das mit der Einheit Incommensurabele trotzdem mit Theilen dieser Einheit auszumessen. Der unerledigte Rest ist hiebei Gesetz; denn liesse er sich erledigen, so wären die betreffenden Grössen zueinander eben nicht incommensurabel. Die sogenannte Exhaustion hat nun ihre entscheidende typische Anwendung im Fall des Incommensurabeln. Sie misst die vorgelegte Grösse allerdings, jedoch immer mit Ausnahme eines Restes. Dieser Rest kann nun durch unbeschränkte Wiederholung der Operationen kleiner gemacht werden, als irgend eine vorgeschriebene Grösse. In der jeweiligen Vorschreibung oder Angabe dieser Grösse ist man nicht beschränkt. Man kann in ihr jeden Grad der Kleinheit verwirklichen, und mit dem Rest noch darüber hinausgehen. Dies heisst soviel, als der Rest selbst kann unbeschränkt klein oder, wie der abergläubisch missverstandene Ausdruck lautet, kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden. Welche Grösse man nämlich auch als Norm angeben möge, d. h. welchen gesteigerten Grad von Kleinheit man auch im besondern Falle wählen möge, immer kann man den Rest durch eine gehörige Anzahl von Wiederholungen der erforderlichen Theilungs- oder Messungsoperation, arithmetisch also durch Fortsetzung des Kettenbruchs, noch kleiner machen.

Der Aberglaube hat sich nun ein Ding vorgestellt, welches kleiner als jede angebbare Grösse wäre und was gleichsam hinter den Operationen als Ziel fertig dalägе. Diese Ungrösse hat in der neuern Zeit den Namen des Unendlichkleinen erhalten.

Bleiben wir jedoch bei dem Fehler des antiken Exhaustionsbegriffs selbst. Dieser Fehler liegt darin, dass eine unbeschränkte Annäherung als Erschöpfung figurirt. Er liegt zunächst mehr im unzutreffenden Namen und Bilde, als in der Sache selbst. Archimedes selbst begeht nicht entsprechende Ungenauigkeiten, und nur die ihm später untergeschobene Wendung, mit welcher der erforderliche Sprung vom unbeschränkt Approximativen zum Exacten gemacht wird, ist mangelhaft. Von dem Schluss auf die exacte Grösse selbst werden wir erst bei der Werthigkeitsmethode zu reden haben; denn dieser Schluss beruht in erster Linie nicht auf dem Kleinheitsbegriff, sondern auf dem Gegensatz einer festen Grösse, die nur einen Werth hat, gegen andere verschieden wählbare Werthe. Auch die Beweismethode von Archimedes beruht der Regel nach auf der Einschliessung zwischen zwei unmöglichen Abweichungen im Mehr und im Minder. Es wird nämlich gewöhnlich bewiesen, dass eine fragliche Grösse nicht das Geringste kleiner oder grösser sein könne, als der Behauptung entspricht.

Statt von Ausschöpfung sollte man stets nur von unbeschränkt approximativer Ausschöpfung reden. Eine Exhaustion findet statt bis auf das Unbeschränktkleine, aber dieses bleibt inexhaurirt. In eben diesem Sinne giebt es für die incommensurabeln Grössen keine gegenseitige Ausmessung, wohl aber eine annähernde Ausmessung, und zwar nicht blos überhaupt eine annähernde, sondern eine unbeschränkt annähernde. Wo man aber nichts weiter als Grössen gegen Null hin zu vermindern hat, also kein besonderes Gesetz vorliegt, welches diese Verminderung an eine bestimmte Art und Weise bindet, da ist auch kein Grund vorhanden, unter Umständen einen letzten Rest nicht grade ebenso wegzunehmen, wie man vorher einzelne Stücke weggenommen hat. Ja häufig wird es sich sogar komisch machen, wenn man noch erst die Zwischenstadien der stückweisen Verkleinerung einschiebt, anstatt von vornherein gleich die ganze Grösse von sich selbst abzuziehen oder, mit andern Worten, sie sofort mit Null zu vertauschen. Im Uebergange von irgend einem Punkt der Grösse, z. B. einer Linienausdehnung, zu einem andern Punkt ist ganz derselbe Sprung enthalten, wie wenn dieser Uebergang ein letzter

ist, d. h. unmittelbar, also ohne Einschiebung weiterer Zwischenumständlichkeiten, zum äussersten Punkte führt, mit welchem die Grösse endigt. Kann man irgendwo in der Linie ein Stück wegnehmen, so kann man ebensogut auch ein Endstück oder gleich die ganze Linie auf einmal verschwinden lassen. In der einen Operation ist nicht mehr gefordert als in der andern. Der Uebergang von unbeschränktkleinen Grössen zur Null lässt sich hienach in entsprechender Weise vollziehen, wie der Uebergang von irgend einem Kleinheitsstadium zu einer Station von noch grösserer Kleinheit. Was wesentlich anders ausfällt, ist das Ergebniss, nicht der Schritt dazu. Der Nullfall ist nicht sowohl der Grösse als vielmehr der Eigenschaft nach von allen andern unterschieden. Er ist etwas qualitativ Anderes, und alle Begriffe, die von ihm, mathematisch geredet, Functionen sind, zeigen diese Eigenschaftsänderung von entscheidender Wesentlichkeit ebenfalls. Nöthigt uns jedoch irgend eine Rücksicht oder ein Gesetz, innerhalb eigentlicher Grössen zu bleiben und nicht zur Nichtgrösse oder, mit andern Worten, zum grössenlosen Werth Null überzuspringen, so ist es genug, bei einem einzigen Stadium der Kleinheit zu bleiben, und sich nur zu erinnern, dass die Kleinheit, weil keine beschränkte, darum auch keine bestimmte ist und demgemäss die Ersetzung durch andere Werthe zulässt, deren Anzahl unbeschränkt bleibt. Diese Ersetzung kann sogar nicht blos nach der Seite der Kleinheitssteigerung, sondern auch im entgegengesetzten Sinne vorgenommen werden, — ein Umstand, der freilich vollends gegen den Aberglauben an das Unendlichkleine verstösst. Man hat nämlich stets eine Amplitude oder, deutsch geredet, einen Spielraum, innerhalb dessen man die Repräsentationsstufe des Unbeschränktkleinen, d. h. derjenigen Grösse, um deren unbeschränkte Verkleinerbarkeit es sich handeln soll, wählen darf. Doch die Verfolgung dieses Umstandes würde, wenn wir schon hier auf ihn näher eingehen wollten, zur Untersuchung der Stetigkeitsweiten der Functionen führen und die Punkte, wo die besondern Gesetze der Grössenänderung selbst eine Abänderung erfahren, mit zu erörtern nöthigen.

7. Das unbeschränkt Verkleinerbare ist nicht ganz einerlei mit dem Unbeschränktkleinen; denn jedes Stadium einer veränderlichen Grösse, der für ihre Veränderung gegen Null hin keine Schranke gesetzt ist, ist eben nach dem Kleinen hin unbeschränkt. Letzteres genügt aber nicht; es ergiebt nur den

Begriff des nach einer bestimmten Seite Unbeschränkten, aber nicht den des Kleinen, der für die Differentialrechnung selbst auch wesentlich ist. Man könnte ihn allerdings durch Methoden ersetzen, die den Begriff des Kleinen nicht einschliessen, wenigstens nicht von vornherein und direct, sondern nur insoweit er in der Vorstellung der wiederholten Verkleinerung einer gegebenen Grösse mitenthalten ist. Die Werthrechnung wird das Mittel liefern, die Schlüsse auf die ungemischten Differentialcoefficienten oder, wie Lagrange sie nannte, auf die abgeleiteten Functionen, ohne Hülfsgrössen, die irgend klein zu sein brauchten, zu bewerkstelligen. Indessen in der Praxis der Anwendungen ist ein von vornherein einzuführender, ausdrücklich als solcher figurirender Begriff vom Kleinen das entscheidende Hülfsmittel; denn ohne ihn lässt sich nicht unmittelbar wahrnehmen, welche Nebeneinmischungen, wie beispielsweise die nur äusserst geringfügig vom Graden abweichende Krümmung eines Curvenstückchens, als unerheblich ausser Betracht gelassen werden können. Nie würde man ohne die Vermittlung des Begriffs des in Beziehung auf ein Ganzes sich als geringfügiges Theilstückchen verhaltenden Kleinen den Pythagoreischen Satz auf das charakteristische Elementardreieck haben anwenden können, welches den unumgänglichen Ausgangspunkt der Curvenrectification bildet und in der Differentialrechnung gradezu die unbeschränktkleinen Grössen dx, dy und ds zu Seiten hat. Hiebei ist nach unserm rationellen Begriff ds ein unbeschränkt wenig krummes Linienstück, d. h. eine Linie, die in ihrem Verlauf unbeschränkt wenig von einer graden abweicht. Das Wort unbeschränkt weist natürlich auf etwas Correspondirendes hin, in Bezug worauf es erst seinen Sinn hat. Lässt man nämlich die Wahl der Kürze des Linienstücks unbeschränkt sein, so wird auch die Krümmung, d. h. die Ausdehnung der Abweichung der Endtangente von der Anfangstangente, als lineare Entfernung gemessen, gegen die Linienlänge selbst unbeschränkt klein. Auch haben wir hier das zugleich einfachste und wichtigste Beispiel einer combinirten oder doppelten Unbeschränktheit, d. h. eines Unbeschränktkleinen zweiter Ordnung. Darauf kommt es jedoch hier nicht an, sondern auf den Umstand, dass sich die Unerheblichkeit der Krümmung nur an der verhältnissmässig kleinen Ausdehnung zeigt. Diese Ausdehnung mag immerhin noch nach Sonnenweiten messbar sein, wenn nur das

Ganze der Kreislinie oder sonstigen Curve dazu ein ansehnliches Vielfache bildet, also dagegen gross ist.

Klein und gross sind Begriffe, die ungeachtet des Spielraums und eines gewissen Maasses von Unbestimmtheit, welches ihnen wesentlich ist, — ja zum Theil grade wegen dieser Latitüde, in der Mathematik nicht entbehrt werden können. Stellt man ein Kleines oder, genauer gesagt, einen kleinen Bestandtheil einem Ganzen, d. h. einer Summe oder einem Vielfachen solcher Bestandtheile, gegenüber, so ist es von praktischer Bedeutung, wie sich verschiedentliche Functionen des Kleinen gestalten, und wie sie sich zu irgend welchem Schlussergebniss verhalten, welches den Charakter eines Ganzen hat. Man kann auch einen bestimmten Kleinheitsgrad oder Kleinheitsfuss von vornherein einführen und weiter zusehen, von welchem Kleinheitsfuss die ebenfalls kleinen Bestandtheile des Schlussergebnisses sein mögen. Man kann hieraus eine ganze Rechnung der Unerheblichkeiten, der praktisch geringfügigen Abweichungen und Fehler machen, bei welcher der vermittelnde Begriff derjenige einer Grösse sein wird, auf die es im Laufe der Rechnung nicht ankommt, weil ihre verschiedenen Functionen schliesslich im Resultat ebenfalls eine Grösse ergeben würden, auf die es als auf einen Bestandtheil dieses Resultats ihrer verhältnissmässigen Kleinheit wegen thatsächlich nicht ankommt.

Zu der Rechnung mit dem Kleinen sind schon die Sinne die Wegweiser. Sie sind natürliche Vertreter der Abstraction. Sie sehen von dem ab, was am Kleinen nebensächlich ist, weil sie es nicht mehr wahrnehmen. Sie ignoriren mit Recht eine Krümmung, die ihnen nicht mehr wahrnehmbar ist. Liesse sich ihre Schärfe auch unbeschränkt gross machen, was aber nicht mit absoluter Schärfe zu verwechseln ist, so würde für jedes noch so hohe Stadium der Schärfe dieselbe Bewandtniss wiederkehren. Es würde immer ein solches Stückchen einer Kreislinie beschafft werden können, an welchem wohl die Länge, aber nicht die Krümmung ins Auge fiele. Das Stückchen würde für grade gelten und es für den Sinn auch sein, da sich die Krümmung in der Spur der Linie, die für die Sinne eine Dicke haben muss, verlöre. Jedoch auch für die verstandesmässige Sinnesauffassung, die sich als absolut ausgiebt, indem sie mit dem Verstandesbegriff ins Unbeschränkte hinein unterschieden wissen will, besteht die Thatsache, dass sich die Unerheblichkeiten sinnesgemäss auf-

drängen. Die Sinne sind hienach sehr weise und, man möchte sagen, logisch constituirt. Sie zeigen mit einem Blick das, was der reflectirende und zergliedernde Verstand erst hinterher herausbringt, dann aber freilich auf seinen Grund zurückführt, indem er es nicht nur in das Unbeschränkte, sondern auch sozusagen jenseit dieses Unbeschränkten bis zur absoluten Grenze verfolgt. Verstandesmässige Sinnesvorstellung darf freilich nicht als jener Zwitter gedacht werden, den verlegene und zweideutige Metaphysiker wie Kant beliebt haben, um sich die ernsthafte Beseitigung wirklicher Schwierigkeiten zu ersparen. Wir machen dies nicht so; für uns ist die Sinnesvorstellung weder in sich widersprechend, noch wird sie durch den von ihrer bemessenen Schärfe abstrahirenden Verstand vermöge dieser Abstraction in ihrem Wesen verändert. Für die Sinnesvorstellung, auch wenn sie ideal gedacht wird, giebt es nur Kleines, nie Unbeschränktkleines. Die Unbeschränktheit beruht auf dem Begriff der möglichen Wiederholung, ist daher ein Verstandesbegriff und überdies kein Thatsächlichkeits-, sondern ein blosser Möglichkeitsbegriff. Auch gilt er nicht etwa blos für unser Operiren, was ihn ins Subjectivistische borniren hiesse, sondern auch für die Natur, die eine Grösse, also beispielsweise eine Ausdehnung, unbeschränkt theilen mag, aber ebenfalls nie eine Unzahl von Theilen vollendet aufweisen kann. Der Widersinn der unendlichen Getheiltheit ist nun einmal nicht zulässig. Auch die Bewegung verwirklicht ihn nicht; denn Bewegung ist verstandesmässig nichts weiter als der Begriff davon, dass Dasselbige zuerst an einem Orte und dann an einem andern sich befindet. Die Sinne zeigen die Spur dieser Veränderung, indem sie eine Anzahl Lagen zusammenfassen. Der Verstand findet aber jedesmal nur die Thatsache, nämlich die unterschiedliche Lage, vor. Wie es im innersten Wesen der Dinge zu dieser unterschiedlichen Lage kommt, davon weiss der Verstand grade soviel, wie von jeglicher Veränderung oder gar Schöpfung, d. h. von der Ersetzung eines Begriffs durch einen andern, der einen neuen, vorher nicht dagewesenen Bestandtheil mitenthält. Trotzdem bleibt aber die sachlogische Position fest, d. h. ohne Widerspruch, sobald nur die unbeschränkte Theilbarkeit des Raumes auch vom Standpunkt der Natur als blosse Operationsmöglichkeit und nie als fertig vollendete Thatsächlichkeit gedacht wird. Wir dürfen also auch bezüglich der Bewegung den Naturthätigkeiten keinen Widersinn unterschieben und von

ihnen nicht etwa voraussetzen, dass sie eine unbeschränkte Vielheit zu einer gegebenen Unzahl unterschiedener Raumtheile vollenden könnten. Einen solchen Begriff dürfen wir nicht zulassen; denn mit ihm reproducirte sich in feinerer Gestalt nur der gemeine Unendlichkeitsaberglaube. Auch ist kein Grund vorhanden, sich solchem Widersinn zu ergeben; denn der Uebergang von einer Lage in eine andere ist ein hinreichend deutlicher Begriff, und mit ihm kommen wir auch mathematisch aus, ohne nöthig zu haben, das, was dazwischen liegt, uns mit Charlatanerien vorgeblicher Philosophie zum Schein ausfüllen zu lassen. Die wahre Weisheit besteht darin, bei dem einfachen Begriff des Ueberganges von einem Punkte zum andern zu bleiben und nichts weiter zu fordern, als das Vorhandensein eines Grundes, jeweilig nach Bedürfniss unbehindert Zwischenlagen einzuschalten und so den Uebergang nach Belieben aus zählbaren Theilübergängen zusammengesetzt zu denken.

8. Wonach man für eine exacte Begründung der Differentialrechnung am ehesten zu fragen pflegt, ist der Grund der Weglassungen der sogenannten unendlichkleinen in Vergleichung mit den endlichen Grössen oder auch der Unendlichkleinen zweiter Ordnung als Summanden neben denen erster Ordnung u. dgl. m. Es versteht sich, dass eine rationelle Antwort auf diese alte Frage nur für eine bereits rationalisirte Differentialrechnung gegeben werden kann. Andernfalls können nur sinnliche Reflexe von der Kleinheit, nebelhafte Approximationsvorstellungen oder abergläubische Wendungen zu Tage kommen. Im günstigsten Falle wird, wie von Lagrange, die Sache selbst auf einem andern Wege erledigt, so der directe Weg umgangen und gleichsam durch die Probe erhärtet, dass die nebelhaften Fictionen des Unendlichkleinen und die Ueblichkeiten der Weglassungen und Vernachlässigungen kein falsches Resultat geben. An sich und innerlich sind sie hiemit nicht gerechtfertigt und können es auch nicht werden, solange noch irgendwie ein Zug von Metaphysik, d. h. von Alchymie und Aberglauben des Unendlichkleinen haften bleibt. Letzteres war auch noch bei Carnot, dem Zeitgenossen Lagranges, mehr als hinreichend der Fall, um trotz achtungswerther Bemühungen um bessere Rechenschaft und ungeachtet einiger nützlicher Beiträge in dieser Richtung doch Alles im schwankend Unbestimmten zu lassen und sich nicht einmal zu der, wenn auch nur halbseitigen, doch auf dieser einen Seite festen und nebel-

freien Position Lagranges zu erheben. Carnot wusste beispielsweise noch nicht, ob er mit Euler die Differentialquotienten als Nullquotienten und wohl gar die Differentiale als Nullen betrachten sollte oder nicht. Carnots Vorstellungen von den unvollkommenen oder, wie wir lieber sagen möchten, unexacten Gleichungen ist zwar der Wahrheit nahegekommen, musste aber an ihr vorbeistreifen, ohne sie berühren zu können, ja allen Werth verlieren, weil der natürliche, einfache und strenge Begriff des Unbeschränktkleinen fehlte. Dies unentschlossene Hin- und Herschwanken zwischen Null und dem Unendlichkleinen barg eine ganze Kluft des Fehlerhaften. Zwischen Null und den fraglichen, wenn rationell verstandenen Grössen gähnt ein Abgrund, in welchem aller Verstand und alle Logik dessen verschlungen werden, der glaubt, darüber so gleichgültig hintänzeln zu dürfen, als handelte es sich auf der einen und auf der andern Seite dieses Abgrundes ungefähr um dieselbe Sache. Die Ungeheuerlichkeit dieser Kluft wird nur noch von der Ungeheuerlichkeit des Verhaltens überboten, das ihrer nie recht gewahr wird.

Alle Weglassungen oder, wie man auch mit Recht sagt, Vernachlässigungen sind absichtliche Ungenauigkeiten. Diese Unexactheiten sind aber grundsätzlich gewollte und insofern Abstractionen von dem Nebensächlichen und Unerheblichen. Wir haben schon gesagt, dass die Differentialrechnung als Approximationsrechnung erscheint, dass sie aber ihr Wesen darin hat, eine Rechnung mit unbeschränkten Approximationen zu sein. Es giebt kein Mittel, den Algorithmus der Weglassungen zu rechtfertigen, als einfach einzugestehen, dass man mit Gleichungen operirt, in denen gewisse Glieder fehlen, aber stillschweigend in verkürzter Form mitvorausgesetzt werden können, ohne dass man an der weitern Bearbeitung wesentlich zu ändern hätte. Denkt man sich statt einer Reihe von Gliedern nur überhaupt eine einzige Grösse oder Function, die unbeschränktklein ist, als einzigen Summanden neben endlichen Gliedern, so ist klar, dass man nachweisen kann, wie die algebraische und functionelle Bearbeitung dieses Gesammtausdrucks immer wieder Glieder liefern wird, die Functionen jenes Unbeschränktkleinen sind und selbst die Eigenschaft haben, unbeschränktklein zu sein. Soll es daher auf ein Unbeschränktkleines neben endlichen Grössen im Resultat nicht ankommen, so braucht man sich nicht immer von Neuem die Mühe zu machen, diese unerheblichen Nebenfunctionen that-

sächlich zu ermitteln. Man weiss im Voraus und im Allgemeinen, dass sie den Charakter des Unbeschränktkleinen haben müssen, und dies ist genug. Man überhebt sich daher der Ausführung dieser Nebenrechnung, indem man das, was zu ihr Veranlassung geben würde, sofort weglässt. Im Uebrigen ist für den besondern Fall die wirkliche Ausführung der Nebenrechnung der einzige anschauliche Beweis für ihre Entbehrlichkeit. Abstrahirt man aber von dem besondern Fall und zeigt an ihm durch Hervorhebung des Wesentlichen und allen Fällen Gemeinsamen, wie jegliche solche Nebenrechnung entbehrlich sein müsse, so ist hiemit der abgekürzte Algorithmus gerechtfertigt. Die Nebenrechnungen würden doch nur das liefern, was man im Resultat selbst als nebensächlich nicht braucht, ja sogar gewöhnlich zur Seite lassen würde, wenn man es auch ohne Mühe hätte.

Die Rechnung mit dem Kleinen an sich, d. h. ohne dass der Begriff der Unbeschränktheit hinzuträte, gestattet ebenfalls Abkürzungen. Die Functionen, um die es sich hier handelte, würden Functionen des verhältnissmässig Kleinen sein, und es wäre stets ein bestimmter Fehlerspielraum, von dem man abstrahirte, und der auch für das Resultat übersehen und zwar im doppelten Sinne des Worts übersehen werden könnte. Er würde von vornherein übersehbar zu machen, d. h. zu veranschlagen und hinterher im Ergebniss als unerheblich zu vernachlässigen sein. Ein solches Verfahren hat für solche naturwissenschaftliche Anwendungen, wo die Kleinheit zwar hochgradig, aber nicht unbeschränkt vorauszusetzen ist, eine entscheidende Bedeutung. Es ist dort der einzige Weg, die Differentialrechnung rationell, d. h. ohne die falsche Erdichtung einer nicht vorhandenen Unbeschränktheit, in einer nebelfreien und logisch widerspruchslosen Weise anwendbar zu machen. Hier haben wir es aber noch mit der eigentlichen Differentialrechnung und den für dieselbe geeigneten Anwendungen zu thun. Demgemäss beruht auch hier auf der Unbeschränktheit des Kleinen die entscheidende Wendung. Das Kleine, welches als Summand weggelassen wird, kann nämlich immer gegen Null hin unbeschränkt zusammengezogen werden. Alle davon abhängigen Functionen, die selbst unbeschränkt klein werden, haben die gleiche Eigenschaft der unbeschränkten Zusammenziehbarkeit gegen Null hin. Nun kann es auch im letzten Ergebniss in der Rolle des Summanden nicht auf eine Grösse ankommen, deren Contractionsfähigkeit gegen Null hin unbeschränkt ist.

Die ersten Abweichungen, welche etwa durch die Weglassungen entstehen, und die ferneren und letzten Abweichungen, welche aus jenen früheren entstehen, sind sämmtlich unbeschränkt contrahirbar, und man bleibt daher trotz aller Weglassungen immer in der Lage, sich mit der Genauigkeit an eine absolut genaue Grenze unbeschränkt anzunähern. Diese Situation des unbeschränkt Approximativen wird durch die Weglassungen nicht geändert, und im Bestehenbleiben dieses entscheidenden Umstandes liegt das, worauf es bei einer unbeschränkten Annäherungsrechnung überhaupt nur ankommen kann. Diese Ueberlegung giebt den natürlichen Grund, der auch, wenn auch nebelhaft verhüllt, in den geschichtlichen Proceduren maassgebend gewesen ist. Ursprünglich nämlich hat man die kleinen Grössen weggelassen, einfach weil man sah, dass sie in der unmittelbar vorliegenden Gleichung für die Verhältnisse oder sonstigen Beziehungen der Hauptgrössen gleichgültig wären. So ist man zum ersten Schritt gelangt, und nach seinem Muster hat man die weiteren gethan, bis man schliesslich im Allgemeinen sah, dass die Vernachlässigung äusserst kleiner Grössen als Summanden auch in den letzten Schlussergebnissen stets nur äusserst kleine Abweichungen mit sich bringen könnte. Die Kleinheiten zweiter Ordnung sind aus dem Begriff des verhältnissmässig Kleinen und durch die veranlassunggebenden Functionen sehr natürlich erwachsen, und es war kaum ein besonderer Schritt nöthig, um ebenfalls zu sehen, dass ein gegen das an sich Kleine selbst Kleines als Summand analog behandelt werden müsse, wie wenn es gegen eine sonstige Grösse eben nur in einfacher Weise klein wäre. Die zusammengesetzte Kleinheit oder, genauer gesagt, die Kleinheit im zusammengesetzten Verhältniss ist ein natürlicher Begriff, und ebenso ist es die Unerheblichkeit des zusammengesetzt Kleinen, verglichen mit dem einfach Kleinen. Das Functionellkleine, also das Kleine, welches nach dem durch eine Function gegebenen Gesetz gegen die Basis oder gegen das Argument von selbständiger und einfacher Kleinheit in abhängiger Weise klein ist, bietet sich als eine naheliegende Verallgemeinerung dar. Fügt man nun noch zu diesen Kleinheiten, welche durch kleine Grössen oder entsprechende Zeichen repräsentirt sind, den Begriff der Unbeschränktheit hinzu, so hat man das rein Rationelle zu jenem historischen Vorgang, der bald auf den Abweg des Aberglaubens führte, indem, wie namentlich von zwei-

deutigen, ja doppelzüngigen Metaphysikern wie Leibniz, jene Kleinheiten als unendliche selbst zweideutig, nebelhaft und trügerisch gemacht wurden. Auf diese Weise ging die gesunde Natur des Denkens, die wenigstens instinctiv bei bessern Geistern bestanden hatte, in der Haltungslosigkeit und Verlogenheit des Metaphysischen unter.

9. Hauptgrössen, welche durch Beziehungen der Hülfsgrössen gewonnen werden, ergeben die echten Grenzen, das Wort analog verstanden, wie es in jeglicher Geometrie, also auch schon in der antiken, durch einen Begriff vertreten war. Die Grenze ist eine andere Grössengattung, insofern sie nicht die Dimension der Hülfsgrössen zu haben braucht. Doch dies nur nebenbei. In der Hauptsache haben wir nur zu bedenken, dass auf Hauptgrössen, mochten es nun Differentialcoefficienten oder Integrale, d. h. summatorische Begriffe, sein, die Aufmerksamkeit auch da gerichtet war, wo zunächst unmittelbar nur die Differentiale mit einander verglichen und, wie beispielsweise behufs der Rectification, in Gleichung gesetzt werden konnten. Hatte man nun immer die Beziehung der Hauptgrössen als letzte Norm vor Augen, so hielt man sich auch unwillkürlich an diese als an die Ziele, denen gegenüber die Begriffe von Annäherung und Genauigkeit oder Vernachlässigung erst einen bestimmten und deutlichen Sinn haben konnten. Wenn man also etwas vernachlässigte, so verfuhr man so, weil man sich sicher glaubte, durch eine solche Weglassung nichts am Wesentlichen, d. h. nichts an denjenigen Beziehungen zu ändern, aus denen die Hauptgrössen zu entwickeln wären. Bei jedem Schritt, den man in Beziehung auf das Hantiren mit einer Gleichung, also zu deren weiterer Bearbeitung that, musste man sofort beurtheilen, was eine Weglassung an der nächsten Folge der Gleichung abändern könnte. Hiebei hatte man zur Norm für das Urtheil die Einsicht, ob Beziehungen, die sich in Hauptgrössen ausdrückten, alterirt würden oder nicht. Die Hauptgrösse war demnach der Vorbegriff, der demjenigen der echten Grenze, wie wir diese verstehen, geschichtlich unwillkürlich, wenn auch ohne besondern Namen, vorangegangen ist. Offenbar hat man sich auf diese Weise jeglichen Algorithmus mit Hülfsgrössen von äusserster Kleinheit geschaffen, wie er mehrgestaltig, und zwar nicht etwa blos bei Fermat, der sogenannten Erfindung einer vollständigeren Differentialrechnung vorangegangen ist, ja

in den approximativen Exhaustionen der Alten schon einige Wurzeln getrieben hatte.

Unter Anwendung unseres strengen Begriffs vom Unbeschränktkleinen wird man eine abgekürzte Gleichung, wo sie nicht zufällig ganz genau ist, als eine unbeschränkt angenäherte Gleichung oder, was dasselbe heisst, als eine unbeschränkt geringfügige Ungleichheit auffassen können. Man kann diesen Gesichtspunkt sogar gleich symbolisch in das Gleichheitszeichen verlegen und, um sich die fragliche Wendung recht anschaulich zu machen, an Stelle des einfachen Gleichheitszeichens ein abgeändertes, etwa mit einem *v* darüber, setzen. Wir können überhaupt durch einen mit der Spitze nach unten gerichteten Winkel oder im Druck durch ein *v*, das wir vor oder über die Grössen schreiben, das Unbeschränktkleinsein dieser Grössen anzeigen, wo, wie in vielen Fällen, die Differentialnotation nicht ausreicht oder den im besondern Fall unpassenden Nebenbegriff einer Differenz fälschlich einmischt. Nun dürfen wir so gut wie zu den Grössen, so auch zu den Begriffen, in unserm Falle also zu demjenigen der Gleichsetzung, jenes Zeichen gesellen. Hiemit geben wir der Beziehung zweier Grössen, vermöge deren sie sich wenig und zwar unbeschränkt wenig von einander unterscheiden, einen besondern abstracten Ausdruck. Da eine solche Beziehung schon bei der antiken sogenannten Exhaustion eine Rolle spielt, so ist ihr möglichst abstracter, kurzer und sichtbarer Ausdruck anderweitig noch nützlicher als grade in der Frage, die uns augenblicklich beschäftigt. In dieser letztern Hinsicht, also in den Gleichungen zwischen Differentialen, geht es nämlich nicht an, an Stelle der Gleichheiten durchgängig lauter unbeschränkt angenäherte Gleichheiten oder, was dasselbe heisst, lauter unbeschränkt kleine Abweichungen zu setzen und an die Stelle der Bearbeitungsgesetze der Gleichungen die, übrigens übereinstimmenden, Bearbeitungsgesetze unbeschränkt kleiner Ungleichheiten treten zu lassen. Freilich geht es an, für das Raisonnement, welches sonst am Faden der Gleichheiten hinläuft, einen neuen vermittelnden Begriff zum Leitfaden zu nehmen. Dieser darf hiefür aber nicht, anstatt des Fortschreitens von Gleichung zu Gleichung, ausschliesslich derjenige eines Fortschreitens von Ungleichheit zu Ungleichheit werden. Man hat nämlich stets die offene Alternative im Sinne zu behalten; denn unter Umständen

kann eine strenge Gleichheit, unter andern Umständen eine angenäherte das Ergebniss der Abkürzungen sein.

Nähme man die Abkürzungen, d. h. die Weglassungen und die Ausmerzungen des Nebensächlichen, consequent und allseitig an allen Gliedern vor, wo sie zulässig sind, so würde man nur lauter strenge Gleichungen erhalten. Dies thut man aber der Regel nach nicht, und kann es auch nicht, weil das theils Unzureichende, theils Ungehörige und Zweideutige der Leibnizischen Differentialnotation daran hindert. So ergeben sich die sozusagen hinkenden Gleichungen, in denen Differentiale und namentlich Differentialquotienten in ihrer unmittelbaren Bezeichnung unabgekürzt figuriren, während die speciell ermittelten Werthe, die ihnen gleich gesetzt werden, in abgekürzter Gestalt auftreten. Bei den unabhängigen Differentialen und ebenso bei den blos linear abhängigen giebt es in dieser Beziehung keinen Unterschied; bei jedem andern abhängigen Differential ist aber zwischen seinem abgekürzten und seinem vollständigen oder, wie man auch sagen kann, seinem reinen und seinem gemischten Werth zu unterscheiden. Sein abgekürzter oder reiner Werth ist stets eine lineare Function des unabhängigen Differentials, während sein gemischter, d. h. vollständiger Werth aus dem unabhängigen Differential durch die vollständige Hauptfunction und nicht durch deren Ableitung bestimmt wird. Am unmittelbarsten sichtbar ist diese Zweideutigkeit an den Differentialquotienten; diese sind vermöge der Notation der Regel nach gemischte Grössen, und ihr reiner, von den Hülfsgrössen unabhängiger Kern ist erst durch Lagranges Notation einer ihn besonders hervorhebenden Bezeichnung theilhaft geworden. Jedoch hat Lagrange selbst zwischen $\frac{dy}{dx}$ und $f'(x)$ nicht derartig streng unterschieden, dass er etwa zugleich den Doppelsinn des Zeichens $\frac{dy}{dx}$ aufgedeckt hätte. Hieran hinderte ihn das nebenbei wenigstens noch als Hypothese conservirte Unendlichkleine. Von unserm consequenten Standpunkt aus giebt es aber für $\frac{dy}{dx}$ zwei wesentlich verschiedene Werthe, je nachdem dx blos unbeschränkt klein gesetzt, oder aber mit Null vertauscht wird. Letzterer Werth gehört gar nicht in die eigentliche Differentialrechnung, d. h. nicht in die Rechnung mit unbeschränkt kleinen Grössen.

Werden an der Differentialnotation keine den Nullfall markirenden Aenderungen vorgenommen, so bleibt sie gänzlich ungeeignet, strenge und feste Beziehungen auszudrücken. Jedoch auch eine solche Abänderung könnte nur etwas Halbes sein und müsste widersprechend gerathen, solange man die ursprünglichen Hülfsgrössen unverändert beibehalten wollte. Man müsste für dy, um anstatt seines gemischten seinen reinen Werth $f'(x)\,dx$ auszudrücken, y mit einem andern D irgend einer Art versehen. Bei dieser Auskunft würde man noch innerhalb eines Gebiets von Hülfsgrössen bleiben, aber die alten Hülfsgrössen, ausgenommen die unabhängigen Differentiale, mit neuen vertauschen. Dies würde aber in der Analysis ein ziemlich überflüssiges Zwischenstadium ergeben. Haben die ursprünglichen Hülfsgrössen ihre Dienste gethan, um die festen punktuellen Beziehungen zu ermitteln, in denen die kleinen Hülfsdimensionen abgethan sind, so steht, etwa ausser der eingewurzelten Gewohnheit, also an sich gar nichts im Wege, alle Rechnung nur als Rechnung mit solchen festen punktuellen Functionen zu handhaben. Alsdann gelangt man aus dem sinnlichen Vor- und Hülfsstadium heraus, und hat mit Hülfsgrössen, seien sie nun differentiell zweideutig oder bereits berichtigt, fernerhin nichts zu schaffen. Wohl aber ist, wie oben bemerklich gemacht wurde, ein Vorstadium von Hülfsgrössen überhaupt nicht zu vermeiden. Diese Hülfsgrössen brauchen nicht grade klein zu sein, wie die Wertherechnung nachweisen wird; aber ihre Kleinheit ist auch sofort ein erwünschter und im thatsächlichen Auffinden sogar unentbehrlicher Fingerzeig zur vorläufigen Beurtheilung der zu bestimmenden Beziehungen von Hauptgrössen. So mangelhaft also auch die Differentialnotation in ihrem thatsächlichen Gebrauch ist, so kann sie doch für die Anfänge, d. h. für die ersten Hülfsoperationen, gute Dienste leisten. Ausserhalb dieses vorbereitenden Stadiums hat sie aber keinen strengen Sinn mehr. Schon diese fortwährende Quotientenform von Functionen, die an sich keine Quotienten sind, ist etwas ästhetisch Widerwärtiges. Diese zusammengesetzte und schleppende Bezeichnung passt für den Grössenfall, aber nicht für den Nullfall. Die ganze Differentialrechnung sieht mit ihrem Steckenbleiben in den Hülfsgrössen so aus, wie sich etwa eine Geometrie ausnehmen würde, die noch mit dicken Punkten und breiten Linien hantirte, also ihre Schärfe noch nicht bis zum Begriff geometrischer Grenzen entwickelt hätte. Bei Euklides ist der Punkt noch

als etwas definirt, was keine Theile habe, und diese schlechte Definition ist offenbar noch ein Ueberrest von jenem Stadium, in welchem geometrische Atome und untheilbare Linien als Reflexe der unmittelbar sinnlichen Auffassung physischer Dinge noch keine Unmöglichkeit waren. Die neuere Analysis hat das Zwitterstadium dieser Art noch nicht überwunden; denn sonst würde sie den grössenlosen Punkt in jeglicher Grösse ebenso als maassgebenden Grundbegriff ein- und durchgeführt haben, wie dies wenigstens schon theilweise mit dem ausdehnungslosen Raumpunkt von Altersher geschehen und nur durch die zwitterhafte Infinitesimalanalysis wieder beeinträchtigt worden ist.

10. Es wurde schon früher bemerkt, dass zur consequenten Durchführung einer Rechnung mit lauter punktuellen Functionen auch die Bildung neuer entsprechender Realbegriffe in Geometrie, Mechanik und Physik gehöre, und dass derartige Wendungen daher für gewisse Fälle sich weit unbequemer anliessen, als die überlieferte Manier, in solchen Fällen bei den Hülfsgrössen zu bleiben. Ein kleines Curvenstückchen, in welchem die Krümmung gegen seine Länge ebenfalls klein ist, stellt stets einen bequemen Begriff vor, an den sich derjenige der integrirenden Summation anlehnt. Will man nun auch hier von der Hülfsgrösse abstrahiren, so bedarf man eines ähnlichen Realbegriffs, wie für einen andern Fall derjenige der streng punktuellen Tangente oder bezüglich der Bewegung derjenige der streng punktuellen Geschwindigkeit bereits ist. Man muss die hier entsprechende Hauptgrösse sachlich hervorheben, ihr einen besondern Namen geben, also den reinen Coefficienten, der von dem betreffenden Punkte aus die Tangentenlänge erzeugt, etwa unter der Bezeichnung Längenfactor gleich den Tangenten, Normalen, Krümmungshalbmessern u. dgl. zu einem selbständigen geometrischen Gebilde machen. Doch die Einzelheiten der Ausführung hievon interessiren jetzt noch nicht. Wichtig bleibt nur, dass ein ganzes System von strengen Begriffen erst ausgebildet werden muss, ehe der unbestimmte Spielraum verschwindet, welcher den Hülfsgrössen auch da anhaftet, wo sie bis jetzt noch die ausgedehnteste Rolle spielen und nach Lage der Entwicklung der den Mathematikern und Physikern geläufigen Begriffe auch spielen müssen. Es ist nämlich ein erheblicher Unterschied, in welchem Stadium man von der Hülfsgrösse loskommt. Dies kann entweder schon bei den Differentialbeziehungen selbst, oder aber erst mit den Integrationen

geschehen. Braucht man noch eine Hülfsgrösse, um das Integral, also etwa die Curvenlänge, in sachlicher Weise, also in geometrischen Fällen auf geometrische Art, deutlich zu denken, so ist das letzte Ideal der möglichsten Emancipation von schwankenden Hülfsgrössen noch nicht erreicht. Die unmittelbare Beziehung des Bestimmten zum Bestimmten, also der Hauptgrösse zur Hauptgrösse, ist die endgültige Form, die man im Geiste fixirt wünscht und zu der irgend welche Hülfsgrössen, ob klein oder gross, nur die Brücke bilden. Ist man vermöge solcher Brücken an gewissen entscheidenden Stellen einmal in das feste Gebiet der Hauptgrössen gelangt, so hat man nicht nöthig, die alten Brückenstege immer wieder von Neuem zu wandeln. Man kann vielmehr alle Schlüsse und Rechnungen unmittelbar, d. h. ohne jene ursprünglich vermittelnden Vor- und Hülfsbegriffe vollziehen. In diesem Sinne ist sogar noch mehr möglich, als was Lagrange in seinen exacteren Werken, der Functionentheorie und den Vorträgen über Functionenrechnung, bereits durchgeführt hat.

Jedoch sei ausdrücklich daran erinnert, dass dies Alles nur im Falle eigentlicher Hülfsgrössen gilt. Hat man es dagegen mit einem physikalischen Anwendungsgebiet zu thun, in welchem die kleinen Grössen an sich vorhandene Wirklichkeiten und nicht blos von uns eingeführte Hülfsmittel der Eintheilung sind, so muss auch mit ihnen, sei es in unabgekürzter oder abgekürzter Weise, unmittelbar gerechnet werden, so dass hier Alles unbeschränkt gilt, was früher von der mathematischen Nothwendigkeit gesagt wurde, dauernd innerhalb des Gebiets der kleinen Theilgrössen zu bleiben und unmittelbar mit diesen zu operiren. Erst wo es sich physikalisch ausschliesslich wieder um Gesammteffecte handelt, in denen die Bestandtheile als solche unerheblich werden, kann und muss man von den kleinen Elementen abstrahiren und zu Grössen gelangen, die sich ohne sie ausdrücken lassen. Alsdann liegt der Fall vor, wo die Elemente, trotzdem dass sie endlich sind und sich auch nicht stetig, sondern in gesetzmässiger Unterbrochenheit aneinanderreihen, dennoch aus der Rechnung zu verschwinden haben. Die eigentliche Differentialrechnung in ihrer bisherigen Verfassung ist für diese Aufgaben unzureichend; sie bedarf erst einer Abänderung oder Erweiterung ihrer einseitigen und beschränkten Begriffe, um hier anwendbar zu werden.

Es liegt die Lösung letzterer Aufgabe indessen noch weit ab; denn noch sind nicht einmal die stetigen Differentialbegriffe

völlig erledigt. Hiezu fehlt als Grundlage noch eine klar sondernde Vorstellung von dem Unterschiede des Unbeschränktgrossen und des kurzweg Unbegrenzten. Beide sind durch eine ähnliche Kluft von einander geschieden, wie das Unbeschränktkleine von der Null. Um das frühere Beispiel wieder aufzunehmen, so sind Secante und Tangente eines Winkels, der um einen unbeschränktkleinen Winkel kleiner als 90° ist, unbeschränktgross. In der exacten Zeichensprache, deren wir hier bedürfen, drücken wir dies so aus: $tg\left(\frac{\pi}{2} - v\varphi\right) = At$. Wenn nämlich überhaupt für alle Werthe von φ, die von dem obern senkrechten Axentheil nach rechts gezählt werden, $tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = t$ ist, so lässt sich in der unbeschränkten Annäherung der Sachverhalt nicht anders ausdrücken, als indem man die Kleinheit von φ und die Unbeschränktheit dieser Kleinheit durch ein besonderes Zeichen markirt. Das auf die Spitze gestellte Kleinerzeichen deutet die unbeschränkte Verringerung nach dem Kleinen hin gleichsam durch die Convergenz der beiden Winkellinien wohl anschaulich und zweckmässig genug an und konnte im Druck bequem durch den Buchstaben v ersetzt werden. Als Zeichen für das Entgegengesetzte ergiebt sich ungezwungen das nach unten gerichtete Grösserzeichen und entsprechend dem Druck das griechische Alpha.

Hat man statt einer unbeschränkt kleinen Abweichung von 90° eine gleich Null, d. h. gar keine, so ist weder eine eigentliche Secante, noch eine eigentliche Tangentenlinie vorhanden. Beide ihnen entsprechende Linien schneiden sich nicht mehr, während man sonst nur irgend einem unbeschränkten Grade der Kleinheit der Winkelabweichung einen passenden unbeschränkten Grad der Grösse der Linien correspondiren zu lassen brauchte. Im Nullfall, d. h. hier für 90°, oder, was dasselbe heissen würde, für die Cosecante und Cotangente von 0°, ist gar keine Grösse mehr vorhanden, und zwar in einem ähnlichen Sinne wie bei Null selbst. Es ist nämlich die Unbegrenztheit einer Linie nicht eine Grösse derselben, sondern sie ist im Gegentheil die Abwesenheit jeglicher Grössenbestimmung. Auf diese Weise entspricht der Null auf der einen Seite auf der andern das grössenlos Unbegrenzte. Wer denkt auch etwa in der gewöhnlichen Elementargeometrie, wenn Linien nicht in bestimmter Begrenzung, sondern als unbegrenzte eingeführt werden, an eine Grösse der-

selben? So etwas wäre dort verkehrt und ist es auch übrigens überall, wo die sogenannte unendliche Grösse als etwas an sich Vorhandenes eine Rolle spielt. Der natürliche Begriff enthält nichts von Widersinn. Er denkt den Mangel der Begrenzung und die ungehinderte Erstreckbarkeit, — also eine an sich vorhandene Möglichkeit, aber nichts als an sich vollendet. Der Fall des Unbeschränktgrossen unterscheidet sich von dem des Unbegrenzten dadurch, dass die Möglichkeit nicht als an sich gegeben figurirt, sondern nur auf unsere Thätigkeit bezogen wird. Ueberdies ist letztere Möglichkeit immer als eine von einer andern abhängig gesetzte vorgestellt, so dass von der unbeschränkten Verkleinerung und deren Grad die unbeschränkte Vergrösserung und deren jedesmal correspondirende Stufe abhängt. Im Unbeschränktkleinen ist ein Spielraum von Mannigfaltigkeit der Kleinheitsgrade möglich, und zu diesem Spielraum gesellt sich ein analoger im Unbeschränktgrossen, welcher die unbeschränktvielen Grade des Grossen umfasst. In der Null ist aber gar kein Spielraum mehr; sie ist etwas in fertiger Weise Gesetztes und Vollendetes, und ebenso ist es das Unbegrenzte in dem von uns gewählten engern Sinne dieses Worts.

11. Als Zeichen der Unbegrenztheit wird man, wo man unterscheiden will, das herkömmlich ohne genauern Unterschied für das Unendliche gebrauchte Zeichen ∞ nicht benützen können. Es ist nothwendig, dass irgend eine Abänderung daran erinnere, dass hier nicht der vage, nach unserer Zergliederung nunmehr doppeldeutige Begriff des Unendlichen oder des Unendlichgrossen, wie er sich auch benennt, sondern der unterschiedene und ganz bestimmte der Unbegrenztheit und Illimitirtheit in klarer Sonderung von demjenigen des Unbeschränktgrossen gemeint sei. Um nur erst die Gedanken von der herkömmlichen Verworrenheit der Begriffe zu entwöhnen, kann man so etwas wie zwei parallele Striche, die also weder Convergenz noch Divergenz andeuten, im Druck mithin etwa den Buchstaben *Π*, gebrauchen.

Um sich noch weiter von dem Sprungartigen zu überzeugen, welches mit dem Uebergang von dem Unbeschränktkleinen zur Null verbunden ist, bedenke man den entsprechenden Uebergang und Sprung vom Unbeschränktgrossen zum Unbegrenzten oder, in unserer ausdrücklichen Bezeichnung, von der *A*setzung zur *Π*setzung einer Grösse. Von *As* zu *Πs* übergehen, heisst innerhalb der Gattung zu einem ausgezeichneten Fall überspringen,

der nicht mehr unter diejenige Art von Verhältnissen untergebracht werden kann, welche der Definition einer Secantenlinie zu Grunde lag. Diese Definition hatte nur einen Sinn, solange ein wirkliches Schneiden, mithin ein rechtwinkliges Dreieck und mit diesem auch die Pythagoreische Beziehung möglich war. Mit dem Parallelismus von s und t fällt dies Alles fort. Indem wir jedoch auch diesen besondern Lagefall der Linie noch mit demselben Zeichen s anzuzeigen fortfahren, deuten wir hiemit zugleich an, dass sich auch im Begriff wenigstens formell eine allgemeine Liniengattung bilden lässt, die den besondern Fall und alle übrigen Fälle zugleich umfasst. Diese Gattung ist aber nicht mehr die der eigentlichen Secante; denn das der letztern Eigenthümliche muss eben als Specifisches im allgemeinen Begriff gleichgültig werden und als Merkmal fortfallen. Zu diesem Behuf fasse man alle Linien zusammen, welche durch Verlängerung des beweglichen Winkelschenkels in Beziehung auf eine unbegrenzte Tangentenaxe entstehen. Die Beziehung zu dieser Axe zerfällt in zwei Unterarten, nämlich die des Schneidens und die des Nichtschneidens. Der Umstand, dass letztere Beziehungsart nur den einzigen Fall des Parallelismus einschliesst, hindert die Constituirung einer besondern Art nicht.

Macht man die Linien s zu Abscissen, und die Linien t zu rechtwinkligen Ordinaten, so ist hiemit eine gleichseitige Hyperbel bestimmt, wie dies auch schon die Gleichung $s^2 - t^2 = r^2$ lehrt. Hier sieht man nun recht deutlich, dass man mit s und t in das Unbeschränktgrosse gehen, nie aber den Fall erreichen kann, welcher der Unbegrenztheit in unserm strengen Sinn des Worts entspricht. Wie weit sich auch die Hyperbel erstrecken möge, nie liefert sie ein s oder t, welches im Kreise, wie die trigonometrischen Linien, dem Falle von 90^0 entspräche. Geht man daher in einer sachlichen Beziehung oder in einer sie ausdrückenden Gleichung vom Unbeschränktgrossen zum Unbegrenzten über, so entspricht dies bezüglich des Unbeschränktkleinen und der Null jener Operation, vermöge deren man die Hülfsgrössen ganz beseitigt, indem man beispielsweise dx überall und durchgängig, in allen von ihm abhängigen Grössen und Begriffen, mit Null vertauscht. Die Gleichung $As^2 - At^2 = r^2$ kann analog, wie eine Gleichung in unbeschränktkleinen Grössen, abgekürzt werden. Hier hat man die endliche Grösse als Summanden wegzulassen; denn gegen das Unbeschränktgrosse verhält sich die endliche

Grösse wie ein Unbeschränktkleines, da sie zwar nicht an sich verändert, wohl aber ihr Quotenverhältniss zu jener unbeschränkt gegen Null gestaltet wird, indem jene unbeschränkt grösser gesetzt wird. Wir sagen, es entspricht, aber nicht etwa, es sei dasselbe. Es ist nämlich ein gewaltiger Unterschied, ob man in einem rechtwinkligen Dreieck, mit der Hypotenuse h und den Katheten b und l, die Basiskathete b unbeschränktklein werden lässt, während h sich als constanter Vector gegen die lothrechte Lage hin dreht und sich l demgemäss dem Grenzwerth h nähert, oder ob man b als Radius constant bleiben lässt, während l und h in das Unbeschränkte wachsen. Unter der erstern Voraussetzung wird mit dem Nullfall das Dreieck in eine einzige grade Linie H degeneriren, in welcher $h = l$ und das durch einen ausdehnungslosen Punkt ersetzte $b = 0$ enthalten sind. Offenbar ist es eine blosse Fiction, also, deutsch geredet, eine Erdichtung, wenn man diese grade Linie H noch als ein rechtwinkliges Dreieck ansieht, welches zu Seiten die einander gleich gewordenen h und l und zur dritten Seite Null habe. Auf dieser Erdichtung beruht es aber, wenn man nicht blos von einem Cosinus des rechten Winkels vom Werthe $\frac{0}{h}$, sondern auch von einem Secantenwerth $\frac{h}{0}$ redet. Nicht die abstracte Secante, sondern die wirkliche Secantenlinie ist durch H auch der Lage nach vorgestellt. Auch trifft sie hier wirklich mit der Tangente zusammen, insofern sie mit ihr gänzlich zusammenfällt; aber man vergesse nicht, dass hier auch der Radius b, auf den die fictive Secante und Tangente als auf ihre Einheit bezogen werden, streng zu Null geworden ist. Es besteht mithin ein solcher Kreis, für welchen die Begriffe Secante und Tangente noch einen Sinn hätten, thatsächlich nicht mehr. Es besteht nur noch derjenige Kreis, auf dessen Radius sich die Begriffe Cosinus und Sinus beziehen, und hier ist daher die Fiction nur eine partielle, insofern nur der Nullwinkel noch als Winkel oder, besser gesagt, als Quasiwinkel betrachtet wird. Ueberhaupt hat daher auch die Rechnung mit Null hier einen unmittelbar erkennbaren Sinn, wie überall wo Null als Summand, Subtrahend oder Multiplicandus zu endlichen Grössen tritt, während es erst vermittelter Nachweisungen bedarf, um dem an sich Sinnwidrigen von Brüchen wie $\frac{h}{0}$ eine Bedeutung abzugewinnen. Eine solche Bedeutung ist immer etwas Aehnliches wie die des Imaginären; denn in beiden Fällen wird die Absurdität, d. h. die innere

Unmöglichkeit der Vollziehung der Operation, durch die Nachweisung einer im Realen correspondirenden Rolle nicht aufgehoben, sondern bestätigt. Grade weil im Sachlichen dieselbe Unmöglichkeit vorhanden ist, wie im Analytischen, haben die Zeichen der Unmöglichkeit auch ihre sachliche Bedeutung, wie wir dies in unsern neuen Aufschlüssen über das Negative und das Imaginäre festgestellt haben.

12. Solange man bei dem Unbeschränktkleinen einerseits und dem Unbeschränktgrossen andererseits bleibt, entsprechen die beiden erwähnten Dreiecke, das mit der unbeschränktkleinen Kathete und das mit den zwei unbeschränktgrossen Seiten, einander derartig, dass sie in jeglichem zusammengehörigen Stadium der Kleinheit und Grösse, d. h. für jeden gleichen Winkel an der Spitze, wie es sein muss, einander streng ähnlich sind. Sowie man aber den Sprung zum Nullfall einerseits und zum Unbegrenztheitsfall andererseits vollzieht, ist zwar noch Correspondenz, aber keine Aehnlichkeit der Gebilde vorhanden. Die constante Linie b und dazu die zwei Parallelen S und T, die sich ins Unbegrenzte erstrecken, sind eine andere Degeneration des unbeschränktgrossen Dreiecks als jene eine grade Linie, in der alle drei Seiten jenes andern, in der einen Seite unbeschränkt verkleinerten Dreiecks zusammenfallen. Der Sprung zu einem anderartigen Gebilde drängt sich im Unbegrenzten noch fasslicher auf; denn hier darf kein illusorischer Ausweg einen falschen Schein erregen. Die Null ist gleichsam so gefällig, in ihrem Nichts allerlei Begriffe zu bergen oder vielmehr den Anhaltspunkt für den Schein darzubieten, als wären die in ihr verschwundenen Begriffe noch in ihr enthalten. Diese sind aber in Wahrheit mit ihr völlig verneint oder, sachlicher geredet, vernichtet. So ist denn nun vollkommen klar, dass in den Fällen der Null und des Unbegrenzten die von ihnen abhängigen Gebilde nicht etwa blos eine quantitative, sondern eine qualitative Veränderung erleiden. Die begriffliche Identität hört auf. Abstract analytisch geredet, heisst dies, die betreffende Function ändert sich in ihrer Verfassung. Diese Verfassung ist immer für eigentliche Grössenfälle entworfen und hat daher auch im ganzen Lauf eigentlicher Grössen ihre Gültigkeit. Zu den eigentlichen Grössen gehören auch noch das Unbeschränktkleine und das Unbeschränktgrosse. Sowie man aber Null und das Unbegrenzte in die Function einführt, geschieht dies im Widerspruch mit dem zu ihrer bisherigen Verfassung gehörigen Sinn.

Es muss demgemäss diese Verfassung hiedurch selbst verändert, also theilweise zerstört werden. Im Nullfall findet gleichsam eine Zusammenziehung, im Fall des Unbegrenzten eine Sprengung der bisherigen Verfassung der Function statt.

Alle in diesem Stadium mitunterlaufenden analytischen Paradoxa erklären sich nunmehr ganz leicht aus dem Umstande, dass in eine Function, die nur aus Beziehungen der eigentlichen Grössenwerthe beschafft und daher auch nur für den Lauf dieser Art Werthe gültig war, hinterher widerspruchsvoll und künstlich extreme Ungrössenwerthe eingesetzt werden. Nur zwischen den fraglichen Extremen, aber nicht für diese selbst, ist die Function ein geeigneter Ausdruck der obwaltenden Beziehungen. Kein Wunder daher, dass ihre Ungeeignetheit für jene besondern Werthe zu Tage tritt, sobald man ihr, verleitet durch einen falschen Begriff von Stetigkeit, die ungereimte Aufgabe aufnöthigt, auch noch die Extreme, d. h. die Fälle der äussersten besondern Werthe, die obenein Ungrössenwerthe sind, mitvorzustellen. Der Fehler corrigirt sich insoweit, als die Einsetzungen selbst die Constitution der Function verändern, ohne dass man weitere Umstände nöthig hat. Dies geschieht im eigentlichen Nullfall immer, während der Fall des Unbegrenzten gemeiniglich analytisch durch den Umweg von Brüchen mit Nullnennern behandelt, hiemit aber seinem eignen Wesen entfremdet wird. Auf letztere Art wird beispielsweise jenem grossen Dreieck, welches wir vorher brauchten, das kleine untergeschoben, und so statt einer Lösung eine Ablenkung von ihr dargeboten. In Wahrheit will der Fall des Unbegrenzten an sich selbst erledigt sein, und dies kann analytisch nur dadurch geschehen, dass die ungeeignete Functionsform durch Weglassung bedeutungslos gewordener Elemente die von den veränderten Beziehungen geforderte Gestalt erhält. So wird beispielsweise die Hyperbelgleichung $s^2 - t^2 = r^2$, die wir vorher zur Veranschaulichung der Secanten- und Tangentenlinien brauchten, für den Fall eines unbegrenzten S und T zu einem Gebilde, in welchem r^2 sich nicht etwa zu Null verkleinert, wohl aber fortfällt. In der That ist $S^2 - T^2 = 0$ die zu jener Hyperbel gehörige Gleichung der Asymptote, die auch zugleich für diese Asymptote als eine in unserm Sinne unbegrenzte Linie gilt. Für die Asymptote sind die S und T von vornherein gleich und müssen es daher auch im Unbegrenzten streng sein. Ebenso müssen in dem Gebilde, welches aus der Degeneration des rechtwinkligen Dreiecks

entsteht, S und T als gleichwerthige Begriffe gelten, die sich in nichts mehr unterscheiden.

Für eine Mathematik, die bei Verstande bleiben will, darf es keine Asymptoten geben, die im sogenannten Unendlichen berühren. Solcher Spuk und noch schlimmere Dinge, sowie die falschen und verworrenen Stetigkeitsbegriffe sind durch unsere Unterscheidung des Unbeschränktgrossen und des Unbegrenzten, sowie überhaupt durch unsere Zergliederung des Unendlichkeitsaberglaubens weggeräumt. Positiv ist aber für die Grundbegriffe eine Festigkeit, Klarheit und Durchsichtigkeit geschaffen, wie sie vorher nicht bestand. Sogar neue Conceptionen sind auf diesem nunmehr lichteren Gebiet möglich geworden. Damit man aber weitere Specialfrüchte zu sehen bekomme, wird man die Bäume selbst betrachten müssen, die auf dem gereinigten und verbesserten Boden emporwachsen.

Viertes Capitel.

Ausgangspunkte einer neuen Rechnung.

1. Die Haupteigenthümlichkeit und Hauptstärke der modernen Mathematik hat bisher auf der Rechnung mit dem Veränderlichen beruht. Differential- und Variationsrechnung bildete, abgesehen von dem allgemeinen algebraischen Algorithmus selbst, ihren Kern. Die Betrachtung der Veränderung, also des Wachsens und Abnehmens der Grössen, führte zu neuen Gesammtbeziehungen der algebraischen Gleichungen, und so entstand die moderne Analysis, die, wenn man sie überhaupt an das Alterthum anknüpfen will, ein rein mathematisches antikes Vorstadium allenfalls in den Diophantischen Gleichungen suchen könnte. In den völlig unbestimmten Gleichungen ist nämlich die Anzahl der möglichen Werthe für jede Unbekannte eine unbeschränkte, und so stellen in diesen Gleichungen die Zeichen für die Unbekannten bereits den ganzen Lauf aller zusammengehörigen Grössenwerthe, also die Abhängigkeit des veränderlich Setzbaren, mit vor. Jede unbestimmte Gleichung, für welche die Unbekannten keine besondern Bedingungen, also in ihren verschiedenen Werthen nicht

etwa discrete Abstände einzuhalten haben, ist auch eine Gleichung zwischen stetig Veränderlichen. Sobald die bei bestimmten Gleichungen mögliche Anzahl der Wurzeln durch die Anzahl der möglichen Werthe überschritten wird, befindet man sich in einem wesentlich verschiedenen, aber einheitlich gearteten Beziehungsgebiet, mag dieses nun in seiner antiken Beschränkung Diophantische Analysis oder, in seiner modernen, völlig anderwärts hin gerichteten Erweiterung, Rechnung mit dem Veränderlichen genannt werden.

Die thatsächlichen Ausgangspunkte der Neueren waren deren algebraische Umgestaltung des in der antiken Geometrie enthaltenen Rechnungsmaterials, insbesondere aber die algebraisch geometrische Behandlung von Aufgaben, die sich unter die Rubrik der Bestimmung eines Maximum oder Minimum bringen liessen. Von Fermats erster Behandlung der Maximalaufgaben, zu der die Brücke aus dem Alterthum offenbar eine Ueberlieferung von Apollonius her oder etwas Aehnliches gebildet haben muss, bis zur Variationsrechnung von Lagrange hin, zieht sich als rother Faden durch alle entscheidenden Wendungen der Gesichtspunkt der Maxima und Minima oder, wie man es mit einem gemeinsamen Wort ausdrücken könnte, die Behandlung der extremen Werthe, bei denen die Grössen aus der einen Art der Veränderung in die entgegengesetzte übergehen. Die Differentialrechnung selbst bezeichnete sich ursprünglich, als sie von Leibniz fälschlich in Anspruch genommen wurde, als eine neue Methode für die Maxima und Minima. Es waren aber damals, nämlich 1684, bereits soviele reale Bedürfnisse im Spiele gewesen, welche eine Rechnung mit den durch Naturbewegung veränderten Grössen erforderlich machten, dass überhaupt die rein mathematischen Anlässe nicht mehr als vorzugsweise maassgebend gelten konnten. Diese letzteren hatten wohl die Entwicklung der Analysis eingeleitet, ihr aber nicht den hinreichenden Stoff geboten, um zu den entscheidenden Wendungen und den umfassenden Methoden zu gelangen.

Mit dieser schliesslichen Hinwendung zu den praktischen Fragen der Naturbewegung waren jedoch auch die abstracteren Gesichtspunkte der reinen Algebra und Analysis wieder mehr zurückgetreten. Es kann daher nicht Wunder nehmen, dass sich die moderne Analysis nie wieder recht auf ihre ersten algebraischen Ausgangspunkte besonnen, geschweige dort ein erweitertes

Fundament gesucht hat. Die Rücksicht auf das Wachsen und Abnehmen der Grössen ist durch die Differential- und Variationsrechnung so vorherrschend, ja so ausschliesslich geworden, dass neben ihr oder gar dem Range nach vor ihr kein anderer Gesichtspunkt zu einer neuen Rechnung, ja nicht einmal eine Ahnung davon aufgetaucht ist. In der That lässt sich aber der Grund der neuern Analysis tiefer legen und auf diesem Grunde ein umfassenderes Gebäude aufführen als bisher. Ja nicht blos eine neue tiefere Grundlegung, sondern eine in ihrer Art neue Wissenschaft kommt in Frage, sobald man, statt der blossen Berücksichtigung der Grössenveränderungen, die Gegensätze der Rechnungszeichen selbst und die durch diese bedingten Werth- oder, besser gesagt, Werthigkeitsunterschiede zum Anhaltspunkt fruchtbarer Schlussweisen und Operationen macht. Hiemit wird wieder gleichsam in der Algebra Anker geworfen, — in der Algebra, welche die Grundgesetze der Gleichungen und hiemit aller Beziehungen zwischen Grössen einschliesst, gleichviel ob diese Grössen als einwerthig, als vielwerthig oder unbeschränkt vielwerthig, im letzteren Falle also auch etwa als stetig veränderlich, gedacht werden. In diesem Sinne sind die algebraischen Grundgesetze ein Gebiet, welches dem engern Begriff der Algebra und demjenigen der Veränderungsanalysis nicht nur gemeinsam ist, sondern auch über beide hinausreicht.

Auf dem eben angedeuteten Wege kommt zur Differential- und Variationsrechnung eine neue Rechnung hinzu, die, weil sie äusserst fundamental ist, sich mit ihren Grundmitteln in Alles verzweigt. Die neue Rechnung hat ihre letzten Wurzelausläufer in demselben Gebiet, in welchem unsere beiden ersten Capitel die neuen Aufschlüsse über das Negative und über das Imaginäre ergaben. Diese Feststellungen allein haben aber für die neue Rechnung nur den Sinn von Vorbearbeitungen und Klärungen des Gebiets, in welchem sie Fuss fassen sollen. Von ihr selbst konnten sie noch nichts enthalten. Auch ist ihre selbständige Fruchtbarkeit noch von grösserer Bedeutung als die Hülfe, die sie dem fraglichen neuen Inbegriff von algebraischen Operationen gewähren. Kommt es nämlich auf Schlüsse aus der Verschiedenheit der Vorzeichen an, so versteht es sich von selbst, dass man über den Sinn der Vorzeichen in allen Fällen erst vollkommen im Klaren sein muss, ehe man sich anschicken kann, sozusagen auf einen abstracten Vorzeichencalcül ein sicheres algebraisches

Verfahren zu gründen. Was wir die Werthigkeitsrechnung nennen, ist aber ein solcher höherer Calcül, dessen Verfahren über den gemeinen Operationen steht. Dieser Calcül führt nämlich neue Gattungen algebraischer Operationen ein, unter denen die maassgebende die Zerfällung von Gleichungen, aber nicht etwa in Factoren, sondern in Summanden, ist. Die fragliche Zerfällung, die wir, zum Unterschiede von der gewöhnlichen Factorenzerlegung, besser Spaltung nennen könnten, ist als durchgreifendes principielles Verfahren etwas Neues, und wir wollen an vereinzelte Spuren, die für ganz besondere Fälle allenfalls eine schwache Analogie darbieten, nur erinnern, um uns vorläufig verständlicher zu machen. Auch wird es gut sein, durch diese Erinnerungen die geschichtlichen Annäherungen vorwegzunehmen, die sich für jeden neuen Gedanken, sobald er einmal gefasst ist, durch nachträgliche Aufraffung des äusserlich, wenn auch noch so entfernt Aehnlichsehenden und weitläufig Verwandten stets beschaffen lassen. Für den an das Neue noch nicht gewöhnten Sinn bilden derartige Verknüpfungen des Früheren mit dem Späteren überdies eine bequeme Bahn zur Sache selbst.

2. Je nach den Vorzeichen unterscheiden wir die Rolle der Grössen im Rechnungszusammenhange und nennen die so angedeuteten verschiedenen Rollen kurzweg Werthigkeiten. Auch beschränken wir uns hiebei nicht auf den Gegensatz von Plus und Minus, sondern betrachten alle algebraischen Vorbemerkungen, durch welche sich die verschiedenen Wurzeln einer und derselben Grösse von dem ihnen allen gemeinschaftlichen absoluten Werth unterscheiden, als etwas den gewöhnlichen Vorzeichen Plus und Minus Analoges. Der Charakter einer Wurzel besteht also aus ihrem absoluten Werth und irgend einer der möglichen Werthigkeiten, vermöge deren sie ihren speciellen Operations- oder Rechnungswerth erhält. Der Uebereinstimmung wegen müssen wir gelegentlich auch umgekehrt die gewöhnlichen Rechnungszeichen Plus und Minus als abgesonderte Wurzelwerthigkeiten veranschlagen. Hienach werden es in allen Fällen die verschiedenen Wurzeln der Einheit sein, durch welche sich die verschiedenen möglichen Werthigkeiten dargestellt finden.

Der Sprachgebrauch des Wortes Werthigkeit oder Valenz in diesem Sinne ist sicherlich ein ungezwungener; denn er schliesst sich an den üblichen Ausdruck Werthe an, der aber für die Unterschiede der Wurzeln, zumal im Hinblick auf den neuen Zweck,

zu allgemein ist. Bei Werthen im engern Sinne wird man nach dieser Unterscheidung hauptsächlich an absolute Grössenverschiedenheiten zu denken haben, während mit der Werthigkeit nicht der Grössenwerth an sich selbst, sondern dessen Fungiren im Zusammenhange der Operationen gemeint ist. In einem ganz allgemeinen übergreifenden Sinn sind natürlich beiderlei Gestaltungen Werthe. Da wir später dahin gelangen, auch die Anzahl der absoluten Werthverschiedenheiten einer und derselben Grössenbestimmung zur Erweiterung der Methoden der Werthigkeitsrechnung zu benützen, so könnte das so entstehende Gesammtgebiet auch Wertherechnung heissen. Dieses Gesammtgebiet würde alsdann noch immer durch den leitenden Gesichtspunkt zusammengehalten, aus der Anzahl der Werthe oder, mit andern Worten, aus einer, sei es beschränkten oder unbeschränkten Vielwerthigkeit eine Zerfällbarkeit der Gleichungen in Summanden zu erschliessen und diese für die Zwecke der Lösung wichtigen Gleichungsspaltungen auch thatsächlich zu bewerkstelligen.

Man redet bisweilen von eindeutigen Functionen; der Ausdruck einwerthig ist aber nicht nur brauchbarer, sondern auch richtiger. Es handelt sich nämlich bei den verschiedenen Werthen in erster Linie nicht um eine Wahl, etwa gar zwischen verschiedenen Auslegungen einer und derselben Grösse, sondern um das nothwendige Zusammen aller möglichen Werthe. Das unpassende Wort deutig ist nur durch einen untergeordneten Umstand gelegentlich in die Analysis gekommen, nämlich dadurch, dass sich bei dem schablonenhaften Operiren nicht selten eine Verlegenheit und Unsicherheit einstellte, mit welchem Vorzeichen eine Grösse in einem gegebenen Fall zu nehmen wäre. Solcher Mangel an Bestimmtheit und Wissen durfte aber nur im bisherigen Kinderstadium einer gleichsam noch lallenden Zeichenlogik vorkommen. Nach tieferer Einsicht in das Wesen der werthigen Grössen und Polynome muss er verschwinden und alsdann tritt an die Stelle des Deutens aus besondern Indicien eine geregelte Nothwendigkeit fester Bestimmung. Wenn wir daher von Einwerthigkeit, Zweiwerthigkeit und Vielwerthigkeit reden, so haben die entsprechenden Begriffe einen so genauen und festen Sinn, dass jegliche Deuterei ausgeschlossen ist und eine gelegentliche wirkliche Deutbarkeit, die im besondern Fall eintreten mag, etwas ganz Anderes ausdrückt, als die blosse Mehrwerthigkeit an sich selbst. Wenn Grössen oder Functionen mehrwerthig sind, so mag dies

unter Umständen der Grund zu einer Mehrdeutigkeit werden können; aber letztere Eigenschaft ist etwas Hinzukommendes und Zufälliges, wonach man den maassgebenden Hauptbegriff nicht bezeichnen darf. Fragt man aber, warum bisher ein bestimmter Sprachgebrauch, der von einwerthigen, zweiwerthigen und mehrwerthigen Functionen oder Grössen in unserm Sinne redete, gefehlt habe, so ist die Antwort einfach die: weil Begriff und Sache selbst fehlten. Ein zweiwerthiges Binom, ein vielwerthiges Polynom oder auch kurzweg ein werthiges Polynom, — das sind Ausdrücke, die sich nach unserm Begriffs- und Bezeichnungssystem leicht erklären werden. Wollte man aber statt dessen von zweideutigen Binomen und vieldeutigen Polynomen reden, so käme das nicht nur unrichtig, sondern auch komisch heraus. Die werthig gemischten Polynome haben eben thatsächlich soviele Werthe oder stellen, mit andern Worten, den gesammten Inbegriff aller solcher Werthe vor, als aus der, entweder völlig freien oder im besondern Falle vorgeschriebenen, combinatorischen Zusammenstellung der Werthigkeiten der einzelnen Glieder gebildet werden können. Dies ist aber keine Deutung aus dem Bereich beliebiger Möglichkeiten, sondern eine umfassende Durcharbeitung aller vorhandenen Werthfälle.

Der einfachste Fall der Mehrwerthigkeit ist diejenige Zweiwerthigkeit, die in der gleichzeitigen Vereinigung von Plus und Minus vor derselben Grösse besteht. Dieser Fall ist auch zugleich typisch und weittragend, weil er die Eigenschaft jeder Quadratwurzel ausdrückt, gleichviel ob diese reell oder imaginär ist. Verbindet man nun eine einwerthige Grösse oder Function A mit einer zweiwerthigen $\pm B$, so ist das so entstehende Binom $A \pm B$ seiner Form nach selbst ein zweiwerthiges. Gesetzt, man wüsste irgendwoher, wie wir dies später an dem von uns behandelten Falle symmetrisch zu nennender Maxima und Minima kennenlernen werden, dass die in der fraglichen Form gebotene Function im besondern Falle thatsächlich nur einen Werth haben kann, so wäre sofort ein Fundamentalschluss von entscheidender Bedeutung möglich. Nennt man nämlich jene unbekannte einwerthige Grösse der Function E, so hat man $A \pm B = E$. Dies stellt zwei Gleichungen vor, $A + B = E$ und $A - B = E$, aus deren Addition sich $A = E$, und aus deren Subtraction sich $B = 0$ ergiebt.

3. Hätte man, in voller Abstraction von einer binomen Ver-

bindung, auch nur überhaupt gewusst, dass irgend eine zweiwerthige Grösse $\pm B$ in einem besondern Fall nur den einen und alleinigen Werth M haben kann, so ergäbe dies sofort einen Schluss auf die absolute Grösse von B. Man hat alsdann, der allgemeinen Form der Zweiwerthigkeit entsprechend, in der Gleichung $\pm B = M$ die zwei Gleichungen $+ B = M$ und $- B = M$ eingeschlossen. Addirt man diese, so erhält man $M = 0$; subtrahirt man sie, so hat man unmittelbar $B = 0$. Auf beiderlei Art ergiebt sich also, dass jenes Zusammenfallen der zwei Werthe in einen nur für den Nullwerth der Grösse oder Function möglich ist, und dieses Ergebniss $B = 0$ repräsentirt unter Umständen eine sachlich wichtige Gleichung.

Die homogenwerthigen Polynome, die also aus Gliedern von gleicher Werthigkeitsbeschaffenheit bestehen, und zu denen auch die vereinzelten Ausdrücke oder sogenannten Monome gesellt werden müssen, sind von minderer Wichtigkeit, als die gemischtwerthigen. Unter den letzteren bildet wieder den maassgebenden einfachsten Typus der zweiwerthig gemischte zweigliedrige Ausdruck $A \pm B$. Mit diesem haben wir schon oben unter der Voraussetzung operirt, dass er eine Function darstelle, die in einem besondern Fall einwerthig E ist. Es musste unter dieser Voraussetzung $A = E$ sein, und die Function spaltete sich in zwei, für deren jede der absolute Werth rein aus dem Vorzeichenschluss erhellte. Wir wollen nun noch einen specielleren Fall setzen, nämlich den, wo $E = 0$ ist, — also von vornherein die Gleichung $A \pm B = 0$ als gegeben betrachten. Aus den zwei Gleichungen $A + B = 0$ und $A - B = 0$ folgt durch Addition und Subtraction $A = 0$ und $B = 0$. Die Gleichung ist also in zwei Summandengleichungen gespalten, und diese Operation wird die Norm für eine ganze Reihe von Verfahrungsarten abgeben, deren Regeln sich mit den Combinationen der Vielwerthigkeiten aus dem leitenden Princip bestimmen lassen.

Die Beschaffenheit der Glieder A und B wurde der Einfachheit wegen derartig vorausgesetzt, dass A unmittelbar einwerthig, und B, abgesehen von seinen Vorzeichen, an sich selbst ebenfalls einwerthig, also beide absolute Grössen oder Functionen von absolutem Werth sein sollten. Diese Voraussetzung ist aber nicht nöthig und würde, falls sie immer gemacht werden müsste, der Allgemeinheit der Schlüsse und dem Fortgang der Operationen grossen Eintrag thun. Es können vielmehr A und B an sich

sein, was sie wollen und daher auch mehr als einen Werth einschliessen, falls zwischen ihnen nur der Unterschied bestehen bleibt, dass auf das für sich mit seinen verschiedenen Beschaffenheiten als eine Einheit aufgefasste A sowohl der eine als der andere Werth des einheitlich gefassten B komme. Die Zweiwerthigkeit ist demgemäss hier nicht absolut, also nicht auch im Hinblick auf sonstige Werthe, sondern nur relativ zu verstehen, d. h. es genügt, wenn das Glied B in derjenigen Hinsicht zweiwerthig ist, in welcher gleichzeitig das Glied A einwerthig bleibt. Ueberhaupt wird die gemischte Werthigkeit der Polynome immer danach zu beurtheilen sein, ob die einen Glieder einen oder eine geringere Zahl Werthe haben, während die andern Glieder gleichzeitig und zugehörig eine grössere Anzahl von Werthen vorstellen. Hienach bestimmt sich auch die Anzahl der Werthe des ganzen Polynoms selbst. Unser Binom $A \pm B$ hat zwei Werthe $A + B$ und $A - B$, weil mit demselben Werth von A je einer von den zwei Werthen von B zu verbinden ist, und nach diesem Combinationsgrundsatz wird man überall verfahren, wie auch A und B oder überhaupt die beziehungsweise als absolut figurirenden Glieder der Polynome übrigens an sich noch weiter werthig beschaffen sein mögen.

Nachträglich kann man für die Fundamentalspaltung der Gleichung $A \pm B = 0$ in $A = 0$ und $B = 0$ eine abgekürzte Vorstellungsart einführen. Man erkennt nämlich, dass zweiwerthige Glieder für sich eine eigne Art von Summanden bilden, die nur mit sich selbst verbunden und daher auch nur mit sich selbst und der Null, welche ohne Werthveränderung alle Werthigkeiten haben kann, in eine einzige Gleichung treten können. Mit den einwerthigen Gliedern verbinden sie sich zwar ebenfalls additiv und gleichungsweise, aber doch nur dergestalt, dass man immer zwei verschiedene Ergebnisse und demgemäss auch zwei Gleichungen oder, besser gesagt, zwei Werthe der Function im Auge haben muss. Dies heisst soviel, dass sich ein zweiwerthiges Glied nicht in seiner Doppelrolle als Ganzes, sondern nur für sich in jedem seiner getrennten Werthe mit dem einwerthigen als eigentliche Grösse vereinigen lässt. Nur der Nullfall macht eine Ausnahme, aber auch nur eine scheinbare Ausnahme, weil die Null, ungeachtet aller Vorzeichen, unter allen Umständen einwerthig bleibt, d. h. die Gleichung $+0 = -0$ der algebraischen Logik nicht widerspricht. Wenn wir uns hienach A

und ebenso B als einen Inbegriff von Summanden denken, so können wir sagen, dass in einer auf Null gebrachten Gleichung die sämmtlichen einwerthigen Glieder für sich und ebenso die sämmtlichen zweiwerthigen Glieder für sich gleich Null sein müssen. Haben wir also irgend eine beliebige Gleichung vor uns, in welcher der betreffende Werthigkeitsunterschied obwaltet und erkennbar ist, so können wir diese Gleichung sofort in zwei zerlegen, — eine Operation, die sich als mächtiges und fruchtbares Hülfsmittel der Algebra und gesammten Analysis erweist. Ueberall, wo quadratische Irrationalitäten im algebraischen Sinne dieses Worts vorhanden sind, liegen hiemit zugleich auch Zweiwerthigkeiten vor, und wo sich zu diesen Glieder von linearer Beziehung gesellen, da ist hiemit auch immer jener einfache Fall gegeben, an den als an den ersten die Werthigkeitsrechnung anknüpft.

Gleichartigkeit und Ungleichartigkeit der Summanden sind Begriffe von erst zweiter Ordnung. Sie können erst dadurch leitend und fruchtbar werden, dass man ihre Vorbedingungen feststellt. Niemand hat bisher in der verschiedenen Werthigkeit eine trennende Ungleichartigkeit erkannt, — allerdings vielleicht auch darum nicht, weil man überhaupt die gemischte Werthigkeit garnicht in Frage gebracht hat. Das Merkmal der Ungleichartigkeit besteht eben darin, dass die Einheiten nicht dieselben sind. Jede Art von Einheit kann nur mit Ihresgleichen addirt, d. h. zu einer Anzahl, die nach dieser Einheit benannt wird, zusammengefasst werden. Die zweiwerthige Einheit ± 1 lässt sich mit der einwerthigen Einheit nicht zusammenzählen, solange jene in ihrer Combination ungetrennt und individuell bleiben soll, was sie ist. Jedoch soll auf dieses Zurückgehen zu werthigen Einheiten kein besonderer Ton gelegt werden. Wir bedürfen dieses Umweges nicht; denn unsere erste algebraische Schlussweise ist die klare Grundlage. Ueberhaupt ist die hinterher mögliche Vorstellung von der Ungleichartigkeit der werthigen Bestandtheile nicht sowohl eine Klärung, als vielmehr nur ein Hülfsmittel für die Erinnerung und eine künstliche Annäherung an eine bezüglich des Imaginären längst bekannte Thatsache. Aus dem unbestimmten Begriff der Ungleichartigkeit, wie und wo er auch vorkomme, kann man algebraisch ohne Weiteres nichts schliessen, sondern höchstens etwas vermuthen. Damit die Ungleichartigkeit ein klarer Begriff werde, muss man vorher erst unabhängig von ihm feststellen, ob eine summatorische Verbindung und ein

Ingleichungstellen gehindert werde oder nicht. Man muss also die Hauptsache, nämlich ob sich die Gleichung spalten lasse, erst noch ausmachen, und erst hiemit hat man eine in dem fraglichen Sinne zuverlässige Ungleichartigkeit der Bestandtheile erwiesen.

4. Legt man eine neue und tiefere Auffassung der gesammten Differential- und Variationsrechnung sowie des Gebiets der Reihen zu Grunde, so bildet die Spaltung einer Function in Summanden, und zwar zunächst in zwei Summanden, den ersten Ausgangspunkt jeglichen weiteren Verfahrens. Lagrange nahm bekanntlich für seine Gestalt der Differentialrechnung, die er Functionenrechnung nannte, gleich ein Reihenganzes, nämlich die vom infinitesimalen Nebenwerk gesäuberte Taylorsche Reihe, zum Ausgangspunkt. Auch übernahm er nicht etwa diese Reihe als allgemeines Ergebniss der Differentialrechnung, sondern verschaffte sie sich selbständig auf dem gewöhnlichen algebraischen Wege durch die Methode der unbestimmten Coefficienten. Dies hiess soviel, als die abstracte Form der Reihe, nämlich das Fortschreiten nach ganzen und positiven Potenzen des Zuwachses des Arguments der zu entwickelnden Function, postuliren oder vielmehr vorschreiben. Eine solche Reihenform sollte eben maassgebend sein, und es blieb nur übrig, zuzusehen, ob und wie sich für ihre unbestimmten Coefficienten durch Gleichungen mit der zu entwickelnden Function und deren besondern Werthen, also durch eine eigenthümliche Art von Algebra, gewisse Werthe oder vielmehr Werthformen ergeben möchten. Soweit diese Art von Operationen reichte, war auch die Differentialrechnung zulänglich, und umgekehrt, soweit die Differentialrechnung reichte, ebensoweit konnte und musste auch die Reihenmethode tragen. Defect waren sie alle beide gleichermaassen da, wo die extremen Werthe der Functionen in Frage kamen. Bei diesen vereinzelten Punkten, in denen Ableitungen der Function durch das Unbegrenzte gehen, wurden ganze und positive Potenzen des Zuwachses eine ungeeignete und hiedurch defecte Form. Dagegen konnten Bruchpotenzen des unbeschränktkleinen Zuwachses anstatt der gewöhnlichen unabhängigen Differentiale zu Ausgangspunkten gemacht werden, um im Verhältniss zu ihnen die abhängigen Zuwachsungen in einer nicht unendlichen Form darzustellen. Ein sehr einfaches Beispiel hiefür ist der Fall, wenn im Kreise die Ordinate durch Null geht. Alsdann wird deren Ableitung nach der gewöhnlichen Differential- oder Reihenmethode unendlich, während sich für die

wirklichen Incremente eine Gleichung in endlichen Ausdrücken unmittelbar ergiebt, sobald man nur die Forderung der Differentialrechnung fallen lässt, dass diese Gleichung linear sein solle. Die einander im Argument und in der Function entsprechenden unbeschränktkleinen Zuwachsungen stehen bei gewissen Ausnahmspunkten des Laufes der Function eben nicht in linearer Gleichung. Zwingt man ihnen dennoch vermöge der Differentialrechnung oder der allgemeinen Reihe diese lineare Form auf, so muss die von der Lösung ertheilte Antwort eine entsprechende sein, d. h. ein unbeschränktgrosses Verhältniss ergeben. Lagrange gestand diese Unvollkommenheit auch bei seiner Methode ein, berief sich aber darauf, dass ja grade hier auch die gewöhnliche Differentialrechnung mangelhaft (en défaut) bleibe. Einigermaassen verwandt mit diesem wirklichen Defect sind die weniger abnormen Fälle, in denen die Voraussetzungen der Differentialrechnung oder der Rechnung mit der allgemeinen Reihe Werthe von der Form Null durch Null oder Aehnliches mitsichbringen, wobei die Unbestimmtheit oder vielmehr das Nichtssagende erst durch Kunstgriffe, also etwa durch weitere Differentiation einen Sinn erhält. Uebrigens ist auch jener stärkere Defect, der in dem Unendlichwerden des Differentialquotienten seinen Ausdruck findet, keine Unrichtigkeit, sondern nur die Folge einer zu engen Fragestellung. Differential- und Ableitungsrechnung fragen beide nach dem Quotienten der Differentiale, während der weitere Gesichtspunkt dazu nöthigt, überhaupt nach einer Gleichung zwischen den Differentialen zu fragen. Eine solche allgemein gedachte Gleichung kann dann Wurzeln oder überhaupt Bruchpotenzen der unabhängigen Differentiale enthalten und demgemäss da endliche Beziehungen liefern, wo der einfache Quotient unbeschränktgross wird. Um an das vorher bezeichnete Beispiel der Kreisordinate wieder anzuknüpfen, so wird der Quotient einer Sehne durch deren Abstand vom Bogen unbeschränktgross, indem sich die Sehne dem Bogen unbeschränkt nähert; aber die Quadratwurzel aus dem Abstande hat zur Sehne stets ein endliches Verhältniss. Betrachtet man also die unbeschränktkleinen Veränderungen der Grössen unmittelbar und fragt nach der Form ihrer Beziehung, anstatt diese Form von vornherein als Quotienten vorzuschreiben, so können jene defecten Lösungsgestalten nicht eintreten, und es lässt sich auch immer eine Reihe angeben, durch welche die Function mit ihrem Zuwachs nach irgend welchen Po-

tenzen dieses Zuwachses ausgedrückt wird. Es kann also hiebei nie jenes Missverhältniss eintreten, demzufolge für den endlichen Werth einer Function sich eine Reihe ergiebt, in der Glieder von unendlichem Werth vorkommen.

In unserm Zusammenhange sind jene besondern Fälle nicht weiter zu verfolgen, wohl aber ist bemerklich zu machen, wie das gemeinsame Gebiet der Differentialrechnung und der Lagrangeschen Functionenrechnung auch einen gemeinsamen Ausgangspunkt hat, den wir nachher mit Ableitungen aus dem Werthigkeitsprincip zu berühren haben. Die gemeinsame Wurzel ist die Spaltung einer Function in Summanden und zwar vor aller weitern Spaltung immer erst in zwei Stücke. Diese Spaltung bezieht sich auf diejenige des Arguments; denn anstatt von Zuwachs zu reden, heisst es weit allgemeiner und auch weit algebraischer verfahren, wenn man die als einfach gegebene Veränderliche durch Theilstücke oder, ganz abstract ausgedrückt, das einfache Argument durch ein ihm gleiches binomisches ersetzt. Alsdann wird die Function zur Function eines Binoms, und dieses Binom kann der Regel nach nur so verstanden werden, dass es beliebige absolute Werthepaarungen seiner Glieder zulässt und so in einem weiteren Sinne dem Gesichtspunkt entspricht, von dem wir bei der Werthigkeit in unserm engern Sinne des Worts, d. h. bei der Zeichenwerthigkeit, Gebrauch gemacht haben. In jedem Falle kommt es auch aus diesem verallgemeinerten Gesichtspunkt zur Spaltung der Function und, falls derartige Functionen mit einander in Gleichung gestellt werden, zur entsprechenden Spaltung der betreffenden Gleichung.

Man habe in irgend einer Function $f(x)$ für x das Binom $p + q$ eingesetzt, und denke sich hiebei p und q zunächst ohne besondere Unterschiede der Zeichenwerthigkeit. Wohlgemerkt, ist hier $p + q$ an keinen bestimmten Summenwerth gebunden. Es ist aber nicht blos als Ganzes, sondern auch die Theile sind jeder für sich unabhängig vom andern veränderlich. Hienach wird $f(p + q)$ gewissermaassen eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen, und sie unterscheidet sich von einer allgemeinen Function $f(p, q)$ nur dadurch, dass die beiden Argumente die Eigenschaft haben, zusammen als Summe auch ein Gesammtargument zu formiren. Die Abhängigkeitsart der Function von den beiden Veränderlichen ist hiedurch specificirt. Betrachtet man nun die summatorischen Theile der Function $f(p + q)$ selbst,

so wird man darin eine Function ausschliesslich von p, alsdann eine von p und q zugleich und überdies natürlich auch eine ausschliesslich von q voraussetzen können. Wenigstens darf man diese Unterschiede als formelles Schema zu Grunde legen und im besondern Fall zusehen, ob sich die betreffende Spaltung algebraisch realisiren lasse. Dem Begriffe nach sind diese Sonderungen verbürgt; denn wenn man q sich verändern lässt, während p constant bleibt, oder umgekehrt p sich verändern lässt, während q constant bleibt, muss irgend etwas in der Gesammtfunction ebenfalls einen constanten Bestandtheil bilden. Die Wendung $q = 0$ oder im andern Falle $p = 0$ zu setzen, würde ebenfalls die Existenz eines Bestandtheils P als einer ausschliesslichen Function von p, und analog die einer Function Q zeigen. Sie wird aber besser vermieden, weil es darauf ankommt, die Grundlage aller differentiellen und verwandten Rechnungsarten im eigentlichen Grössengebiet selbst, also unabhängig von der Nullsetzung eines sogenannten Zuwachses, zu beschaffen. Lagrange vermochte noch nicht, für seine abgeleiteten Functionen auch diesen Umweg abzuschneiden. Ist nun auch die Null nicht so widersinnigen Phantasmen zugänglich wie das Unendlichkleine, so bietet sie doch Anlass genug zur Erhebung von Bedenken, die nur theilweise chicanöser Natur, in einem entscheidenden Punkt aber berechtigt sind. Lagrange selbst hat die unmittelbare Beziehung der Begriffe auf Null, z. B. der punktuellen Geschwindigkeit als eines Verhältnisses von einem Nullraum zu einer Nullzeit, als nicht recht zulässig, mit Recht abgewiesen. Er hat darauf hingewiesen, dass sich dabei nichts Deutliches denken lasse. Er hätte weiter gehen können und sagen, dass diese unmittelbare Beziehung durch Null ein blosser Schein und nicht blos ein Nichtsinn, sondern sogar ein Widersinn, wenn auch bisweilen von conventioneller Fiction, sei. Nun ist es freilich etwas Anderes, eine Grösse algebraisch gleich Null setzen. Diese Operation ist überall zulässig; was aber vermieden werden muss, sind die Nullquotienten und zwar auch nicht etwa algebraisch an sich selbst, sondern nur, insofern sie der Anknüpfungspunkt zu einer neuen, sei es analytischen, sei es realen Begriffsbildung werden würden. Der Differentialcoefficient oder die abgeleitete Function ist nun ein solcher Begriff, der nach unserm System auf rein algebraische Weise unabhängig von der Vorstellung einer Nullsetzung gesichert werden kann.

5. Ist C eine Constante und V eine Function von Veränder-

lichen, zu welcher selbst nicht etwa noch ein constantes Glied sich zugesellt findet, so spaltet sich die Gleichung $C + V = 0$ in die beiden $C = 0$ und $V = 0$. Man hat nämlich $V = - C$. Da aber V, der Voraussetzung nach, kein von Veränderlichen unabhängiges, d. h. kein constantes Glied enthalten darf, so kann auch $- C$ keine Grösse haben und daher nur Null sein. Bei diesem Schluss ist keine Zeichenwerthigkeit, wohl aber die absolute Werthigkeit im Spiele. Statt einer auf die Vorzeichen bezüglichen Zweiwerthigkeit von V oder vielmehr der in ihm enthalten gedachten Glieder haben wir für diese Glieder eine der Zahl nach unbeschränkte Vielwerthigkeit. Auf diese Weise abstrahirt man sogar vom Begriff der Veränderung, indem man an die Stelle dieses Begriffs den einer unbeschränkten Grössenwerthigkeit einführt. Die Analogie mit der Zeichenwerthigkeit leuchtet hienach ein. Auf ein C oder ein Glied innerhalb C kommen unbeschränkt viele Werthe der Glieder innerhalb V und der algebraischen Form nach auch von V selbst, obwohl diese letztere unbeschränkte Werthigkeit des ganzen V in seinem thatsächlichen Nullwerth ebenso gleichgültig wird, wie in unserer früheren Gleichung $A \pm B = 0$ die Zweiwerthigkeit von B, welches ja auch gleich Null sein musste. Mit demselben Rechte, wie bei der Zeichenwerthigkeit können wir daher auch hier uns kurzweg dahin ausdrücken, dass zu dem einen Werth von C unbeschränkt viele von V gehören. Auch hier kann man nachträglich von der Ungleichartigkeit der Glieder reden, und man kann überdies analog mit dem Fall der Zeichenwerthigkeit den Satz formuliren, dass die constanten d. h. die absolut einwerthigen Glieder für sich allein mit Ihresgleichen, und ebenso die veränderlichen d. h. die absolut werthigunbeschränkten Glieder für sich mit ihrer eignen Art Gleichungen formiren. Wir haben also hier ein erweitertes Princip der Gleichungsspaltung, welches in dieser bestimmten Abänderung recht eigentlich für die Analysis des Veränderlichen gemacht ist und diese Analysis unter den Gesichtspunkt der Operation mit absolut verschiedenwerthigen Grössen bringt.

Wie sich eine Function von Veränderlichen zu einem unmittelbar constanten Ausdruck, d. h. zu dem verhält, was man kurzweg eine Constante nennt, so stellt sich zu der Function M von einer Veränderlichen die Function S von zwei oder mehr Veränderlichen auf ähnliche Weise. Wir nehmen gleich den besondern Fall, in welchem zu der Veränderlichen p der ersten Function

in der zweiten auch die Veränderliche q hinzukommt. Auch setzen wir immer voraus, dass die in der fraglichen Weise bestimmten Functionen nicht etwa noch Summandenglieder mit eingemischt enthalten, welche dieser Bestimmung für sich allein widersprechen würden. Es darf also beispielsweise die Function von zwei Veränderlichen kein Glied enthalten, welches mit der Function von einer Veränderlichen gleichartig wäre, indem es auch nur diese eine Veränderliche enthielte. Diese Nothwendigkeit ist analog der obigen, vermöge deren die Einmischung einer Constanten als Gliedes der Function einer Veränderlichen ausgeschlossen war. Durch solche Mischungen würde der begrifflich festbestimmte Charakter alterirt. Zwar ist auch $\alpha \pm \beta$ eine zweiwerthige Grösse; denn sie hat die Werthe $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$; aber sie ist keine rein zweiwerthige, und auf diese völlige und ausschliessliche Zweiwerthigkeit kam es bei unsern Schlüssen an. Ebenso kommt es nun in der jetzigen neuen Wendung darauf an, die Constanten für sich, die von einer und derselben Veränderlichen abhängigen Functionen für sich, alsdann die noch mehr Veränderlichkeit vorstellenden wiederum für sich, und überhaupt alle Functionen derartig in ungemischten Ordnungen abgetheilt zu betrachten, dass immer die folgende einer zusammengesetzteren Regel der Veränderlichkeit unterliegt, als die vorangehende. Nach dem Werthprincip heisst dies soviel, als es combiniren sich mit jedem Werth der vorangehenden unbeschränkt viele Werthe der nachfolgenden.

Sind nun nach dieser Bestimmung P und S beziehungsweise ungemischte Functionen, die erstere von p allein und die letztere von p und q zugleich, so folgt aus der Gleichung $P + S = 0$ auch $P = 0$ und $S = 0$. Man hat nämlich $S = -P$. Nun enthält aber nach der Voraussetzung S kein von p allein abhängiges Glied, also kein Glied von der Art P. Es darf daher, damit die Gleichung bestehen könne, P keine Grösse haben und muss demgemäss gleich Null sein. Nach dem reinen Werthprincip lässt sich diesem zwar auch ohnehin schlüssigen Raisonnement noch eine gewähltere Form geben. Eine Gleichung nämlich, die auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens eine verschiedene Anzahl von Werthen, mögen diese nun in Vorzeichen liegen oder nicht, formell vorstellt, kann nicht wahr sein, ausser wenn beide Seiten gleich Null sind; denn nur in Beziehung auf die Null wird die Verschiedenwerthigkeit gleichgültig oder findet sich, was das-

selbe heisst, in dem Nullwerth vernichtet. Von diesem einzigen Falle abgesehen, also für jede Gleichstellung eigentlicher Grössen, ist es ein Grundgesetz, dass ihre Werthigkeiten oder sonstigen Werthe in gleicher Anzahl vorhanden sein müssen. Es wäre von vornherein logisch ungereimt, etwa einen Werth zwei Werthen gleichsetzen zu wollen. Es hiesse dies soviel, als beispielsweise den Begriff Plus gleich dem Begriff Minus setzen oder aber, wo es sich nicht um Zeichenwerthigkeit handelt, gegen das bekannte Axiom die Absurdität aufstellen, es könnten zwei Grössen, die unter einander ungleich sind, einer dritten gleich sein. Dies würden nämlich die zwei Werthe sein, die mit einem einzigen dritten in Gleichung gestellt würden. Bei allen Gleichungen kommt es immer auf Grössenwerthigkeit als denjenigen vermittelnden Begriff an, durch welchen die Gleichung ihren Sinn erhält. Das Gleichheitszeichen heisst immer soviel, als der Grösse nach gleich, bedeutet also nicht etwa eine beliebige begriffliche Uebereinstimmung. Es setzt unmittelbar keine Vorzeichen in Gleichung, sondern thut dies nur mittelbar im Hinblick auf die Wirkungen, welche die Vorzeichen auf die Bestimmung des absoluten Grössenwerths haben. Plus und Minus werden daher nie an sich in Gleichung gestellt; denn das wäre ein begrifflicher Widerspruch. Wohl aber liefert Null addiren und Null subtrahiren das gleiche Ergebniss, und dies ist auch der Grund, aus welchem wir principiell geschlossen haben. Ebenso kann die formelle Vielwerthigkeit einer Function mit ihrer absoluten Grösseneinerleiheit, wie wir sie vorher vor uns hatten, nur dadurch zusammenbestehen, dass die Null als Differenz sich selbständig verändernder, aber dabei einander immer wieder gleichwerdender Glieder herauskommt. Auf diese Weise bleibt der Nullwerth selbst das gegen die Art seiner Hervorbringung und gegen die Veränderung Gleichgültige. Die Werthveränderung ist also hier aus demselben Grunde gleichgültig, aus welchem es der Werthigkeitsunterschied war. In beiden Fällen änderte nämlich die Verschiedenheit der Operation den Grössenwerth nicht, da dieser trotz ihrer gleich Null blieb.

6. Kehren wir nun nach Sicherung unseres neuen fundamentalen Ausgangspunktes, nämlich der erweiterten Gleichungsspaltung, zu der Darstellung von $f(x)$ als $f(p + q)$ zurück. Diese Functionsspaltung ist, wie nicht zu oft hervorgehoben werden kann, prototyp für die wichtigsten Operationen der gesammten höhern Analysis, sei diese im engern Sinne algebraisch oder nicht. Ja

die erste unwillkürliche Anwendung davon hat grade die Infinitesimalanalysis geliefert, jedoch ohne selbst diesen algebraischen Pfeiler, auf dem sie ruht, zu bemerken. Da die gegebene Function von x nach der gewöhnlichen Auffassung keine reine Function von x zu sein braucht, sondern noch eine Constante C enthalten kann, so stellen sich ihre Bestandtheile nach unserer obigen Bezeichnungsweise durch $C + P + S$ dar. Diese Bestandtheile sind sämmtlich ungleichartig, so dass, wenn wir eine Gleichung $f(x) = 0$ hätten, die Schlüsse $C = 0$, $P = 0$ und $S = 0$ gelten würden. Hier aber haben wir den allgemeinen Fall, dass $f(x)$ je nach der Grösse von x verschiedene eigentliche Grössenwerthe annimmt.

Sondern wir nun, um den speciellen Zweck der Ableitung eines bestimmten Coefficienten von eigenthümlicher Natur ohne zuviel Umständlichkeiten zu erreichen, gleich denjenigen Theil der Function ab, welcher nicht zugleich von p und q abhängig ist. Es ist dies $C + P = f(p)$, d. h. die Function $f(x)$, wie sie sich gestaltet, wenn wir p an die Stelle von x setzen oder, mit andern Worten, x in der Reihe seiner möglichen Werthe den Werth p geben. Uebrig bleibt alsdann S, und dieses ist nun thatsächlich die unverkürzte Differenz $f(p + q) - f(p)$. Um diesen Charakter deutlich hervorzuheben, wollen wir die Function S in der fraglichen Eigenschaft mit D bezeichnen. Es ist nun D eine Function von p und q, die man durch Division mit q unter die Form $q\varphi(p, q)$ bringen kann, oder von der wenigstens die Vollziehbarkeit dieser Form vorausgesetzt werden muss, wo Differential- und Functionsrechnung einen Sinn behalten sollen. Der Coefficient $\varphi(p, q) = K$ ist im Allgemeinen, d. h. abgesehen von linearen Fällen, eine Function von p und q zugleich. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, denjenigen reinen Coefficienten $k = \psi(p)$ zu ermitteln, der als reine Function von p in K enthalten sein mag. Dieser Bestandtheil wird als Glied immer vorhanden sein, wo er nicht aus besondern Gründen Null wird. Hienach haben wir nun $\varphi(p, q)$ in $\psi(p) + \vartheta(p, q)$ zu spalten; denn die Restfunction $\vartheta(p, q) = r$ wird eine auch durch q veränderliche Function sein, da in ihr q vorkommen muss. Wir haben nun $k + r = \psi(p) + \vartheta(p, q)$. Gemäss den Definitionen und den Folgerungen aus ihnen wissen wir, dass die zweiten Glieder beider Gleichungsseiten in ihren Veränderungen mehr Spielraum haben als die ersten, d. h. dass auf einen Werth von $\psi(p)$ unbeschränkt viele von $\vartheta(p, q)$ kommen. Hätte man also von

vornherein zwei in Gleichung stehende Functionen gehabt, für die jene reinen Coefficienten k und k_1, zu bestimmen gewesen wären, so hätte man eine Gleichung $k + r = k_1 + r_1$ und aus dieser $k = k_1$, d. h. die Identität des auf diese Weise bestimmten reinen Coefficienten von q constatiren können. Uebrigens ist aber auch ohne die Voraussetzung solcher Functionsgleichung klar, dass die fragliche Abspaltung und Reducirung eines rein von p abhängigen Coefficienten k ohne Nullsetzung von q, d. h. blos auf Grund der Veränderungsunabhängigkeiten oder der unbeschränkten Werthigkeitsunterschiede, vollzogen werden kann. Dieses Verfahren ist, wie man sieht, zugleich eine neue Definitionsart des reinen Differentialcoefficienten, in welchem von den Hülfsgrössen keine Spur verbleibt. Die Vermeidung der Nullsetzung solcher Hülfsgrössen ist in der neuen Bestimmung und Beweisart die Hauptsache. Um diese neue Bestimmung auch in allen analytischen, geometrischen und praktischen Anwendungen der Rechnung festzuhalten, muss man natürlich auch hier durch Begriffe denken, die der veränderten Bestimmung genau entsprechen und nicht etwa in einer Anwendung die Nullsetzungen der Hülfsgrössen als Weg zu den realen Begriffen festhalten, während man sie in der functionellen Abstraction aufgegeben hat. Der Umstand, dass bei den entstehenden Gleichungen die absolutwerthig verschiedenen Glieder besondere Theilgleichungen bilden, erweist sich grade in den Anwendungen als die fruchtbare Vermittlung, die von der Nullsetzung unabhängig macht.

Es ist noch besonders hervorzuheben, dass die Functionsspaltung an sich selbst das Ursprüngliche und Zureichende ist, um den reinen Coefficienten abzuleiten. Gleichungsspaltungen treten erst als Folge zu den Functionsspaltungen hinzu und werden überhaupt erst erheblich, wenn es sich darum handelt, eine Gleichung zwischen zwei verschiedenen Ausdrücken desselben reinen Coefficienten $k = \psi(p)$ zu erhalten. In der Herleitung des fraglichen Coefficienten für eine gegebene Function ist die Form der Gleichung nicht wesentlich und ebenso nebensächlich, wie wenn man $y = f(x)$ schreibt, wo man trotzdem nichts weiter vorhat, als unmittelbar an der in x gegebenen Functionsformel $f(x)$ zu operiren und etwa daraus den Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ zu entwickeln. Die dennoch auch analytisch übliche Gleichungsform $y = f(x)$ hat aber beispielsweise geometrisch sofort einen

mehr als blos formellen Sinn, sobald y als Ordinate eine als Linie gegebene Grösse bezeichnet. Alsdann ist y etwas nicht blos nominell, sondern auch sachlich von $f(x)$ zu Unterscheidendes; denn $f(x)$ ist gleichsam die auf die Abscisse x bezogene Regel der Hervorbringung einer Grösse, die der schon unmittelbar gegebenen Grösse y gleich sein muss. Auch analytisch stellt sich die Sache ähnlich, sobald y beispielsweise den unmittelbar gegebenen Zahlenwerth thatsächlich darstellt, während $f(x)$ seine anderweitige Hervorbringung vertritt.

Die vorangehende Bemerkung war nöthig, um der missverständlichen Vorstellung vorzubeugen, als wenn die Functionszerlegung für sich allein nicht genug leistete. In der That ist diese Functionszerlegung, die in unserm besondern, für die Differentialrechnung maassgebenden Falle mehr als blosse Spaltung in Summanden, nämlich Zergliederung nach einem bestimmten Schema war, vollkommen selbstgenugsam. Sie brachte die Function nicht blos in eine zweitheilige Form, sondern zerlegte auch einen ihrer Bestandtheile in zwei Factoren, so dass ein bestimmter Coefficient als eigengeartete Grösse sichtbar wurde. Mit der Sichtbarmachung dieses Coefficienten ist Alles geschehen, was der Zweck einer Grundlegung der fraglichen Rechnungsart erforderlich macht. Es ist dies noch etwas mehr, als wozu, streng genommen, die Differentialrechnung gelangt; denn diese bleibt bei einem Quotienten $\frac{dy}{dx}$ stehen, den wir noch weiter zerlegen. Es ist aber jenes Ergebniss auch noch directer und rationeller, als Lagranges Gewinnung der abgeleiteten Function; denn diese vermittelt sich durch die Nullsetzung des unserm q entsprechenden Incrementes i, — nicht davon zu reden, dass die Ausführung der von Lagrange zu Grunde gelegten Reihenform erspart wird. In letzterer Beziehung lässt sich sogar sagen, dass jene Functionszerlegung nicht nur Ersatz, sondern auch Ausgangspunkt jener Reihe sei.

Kaum wird es nöthig sein, noch besonders darauf hinzuweisen, wie sich unsere Definition des reinen Coefficienten und dessen Darstellung gestalten, sobald es sich unmittelbar um den Differentialfall handelt. Alsdann ist D das unverkürzte dy und q das unbeschränktkleine dx, wobei jedoch die unbeschränkte Kleinheit ganz gleichgültig bleibt, da sie für das Verfahren und die Schlüsse auch fehlen könnte. Es käme nämlich auch auf dasselbe hinaus,

wenn dx ohne jede Beschränkung seiner Grösse nur eine andere Bezeichnung für q wäre. Der reine Coefficient würde in beiden Fällen, dem des unbeschränkt kleinen und dem des beliebig grossen dx, genau derselbe. Nur seine Benennung müsste verschieden ausfallen. Das eine Mal müsste er Coefficient des zweiten Argumentstücks q, das andere Mal aber Coefficient des unabhängigen Differentials dx heissen. Hienach können wir dx, ehe wir noch mit diesem Zeichen ausschliesslich den Gedanken unbeschränkter Kleinheit verbinden, so gross nehmen wie wir wollen. Alsdann ist $\frac{dy}{dx}$ zunächst nur eine andere Bezeichnungsart für $\frac{D}{q}$, und was vorher mit p bezeichnet wurde, heisst nun x. Wir haben also $\frac{dy}{dx} = \psi(x) + \vartheta(x, dx)$. Der Coefficient $k = \psi(x)$ ist also als reine Function von x bestimmt und, wie vorher bereits bemerkt, als Coefficient von dx. Jene erstere Eigenschaft unterscheidet ihn von der Function $\vartheta(x, dx)$, die auch ein Theil des gesammten gemischten Coefficienten von dx ist. Wird also nach der Definition $\frac{dy}{dx}$ in seine beiden Bestandtheile $k + r$ zerlegt, so hat man $k + r = \psi(x) + \vartheta(x, dx)$, wobei die ersten und zweiten Glieder für sich allein in Gleichung stehen, was übrigens vor der Gesammtgleichung schon feststand und nur auch an ihr sichtbar gemacht werden sollte. Unser dx kann hier nun jeden Grössenwerth und jede Eigenschaft haben, es kann also auch unbeschränktklein genommen werden, und dieser vereinzelte Specialfall ist derjenige der Differentialrechnung. Der fragliche reine Coefficient bleibt, wie gesagt, derselbe und ist also nichts, was specifisch und ausschliesslich der Differentialrechnung angehörte. Die gewöhnliche Zweideutigkeit von $\frac{dy}{dx}$ im gewöhnlichen differentiellen Sinne ist früher von uns beleuchtet worden und hat nunmehr durch die Functionszerlegung, vermöge deren das unverkürzte $\frac{dy}{dx}$ in die zwei Bestandtheile $\psi(x)$ und $\vartheta(x, dx)$ zerfällt, eine entscheidende Erläuterung erfahren. Lagranges Notation y' für die reine Coefficientenfunction ist genau; aber bei ihm fehlt die unmittelbare Kritik von $\frac{dy}{dx}$ und demgemäss auch die Nachweisung, dass $\frac{dy}{dx} = y' + \vartheta(x, dx)$ sei und dass es in der

Praxis der Differentialrechnung zweideutig auch y' allein gleich gesetzt werde. Die beiden Gleichungen $\frac{dy}{dx} = y' + \vartheta(x, dx)$ und $\frac{dy}{dx} = y'$ können, solange dx nicht Null gesetzt ist, nicht mit einander bestehen, falls nämlich dy nicht das eine Mal einen andern Sinn als das andere Mal haben soll, was unzulässig ist. Die Differentialrechnung identificirt in dy die abgekürzte und die unabgekürzte Differenz, die sich im Unbeschränktkleinen zu unterscheiden nicht aufhören, in dem Nullfall aber beide zugleich verschwinden. Hierin liegt die fundamentale Confusion, in der sich die eigentliche Differentialrechnung von vornherein bewegt hat. Mit Nullquotienten ist aber auch nicht geholfen; es blieb daher nur der Weg übrig, den Differentialcoefficienten unmittelbar als eine mit der Hülfsgrösse nicht gemischte Function zu bestimmen und als thatsächlichen Coefficienten einer von Null verschiedenen Grösse nachzuweisen. Auf diese Art ist seine Existenz ausser dem Nullfall, also unabhängig von diesem und unmittelbar dargethan.

7. Die Werthigkeitsrechnung im engern Sinne des Worts hat es ausschliesslich mit der Zeichenwerthigkeit zu thun, und wir haben an sie eine anderartige Erweiterung zunächst nur darum angeknüpft, um unsern leitenden Gedanken von der Spaltung einer Function oder Gleichung von vornherein als etwas durchaus Allgemeines zu kennzeichnen, was an sich selbst nicht auf die in Vorzeichen bestehenden Werthunterschiede beschränkt bleibt, sondern auch die verschiedenen Combinationen absoluter Werthigkeit umfasst. Wir könnten noch weitergehen. Schon wenn wir Hülfsgrössen wie dx in unserm neuen Sinne betrachten, so ist ihr absoluter Werth willkürlich ansetzbar, und es steht daher für ihn eine Werthwahl offen, die von den Werthen von x unabhängig ist. Es wird hiedurch dx nicht etwa zu einer Veränderlichen, wie es x eine ist, sondern stellt, sobald es einmal in seinem Werth festgesetzt ist, immer nur diesen einen Werth vor. Da jedoch diese Festsetzung selbst einen freien Spielraum hatte, so konnte eine Function von dx auch ebenso als im speciellen Werthe unbestimmt und mithin in dieser Beziehung als der Grösse nach unabhängig bestimmbar in Anschlag gebracht werden. Auf einem ähnlichen Sachverhalt beruht es, wenn wir zwei unabhängige Differentialien dx und dy als Repräsentanten absoluter

Verschiedenwerthigkeit behandeln und demgemäss aus der Gleichung $Adx + Bdy = 0$ ohne Weiteres die Schlüsse auf $A = 0$ und $B = 0$ ziehen. Wir können nämlich zu irgend einem für dx festgesetzten Werth für dy nicht blos einen, sondern auch statt dessen irgend einen andern gesellen, und in beiden Fällen muss die Gleichung bestehen. Dies genügt aber zu ihrer Spaltung. Man hat alsdann die zwei Gleichungen $Adx + Bd_1y = 0$ und $Adx + Bd_2y = 0$, und hieraus $B(d_1y - d_2y) = 0$. Da nun der Voraussetzung gemäss d_1y und d_2y ihrem absoluten Werth nach unterschiedene Grössen sind, so ist auch ihre Differenz eine eigentliche, also von Null verschiedene Grösse, und es bleibt, damit die letzte Gleichung bestehe, nur übrig, dass der Coefficient B selbst gleich Null sei. Im Bereich der bisherigen nebelhaften Begriffe vom Differential hätte sich jene ganze Schlussart nicht bewerkstelligen lassen; denn dort hat es keinen Sinn, für ein unabhängiges Differential dy gleichzeitig mehr als einen Grössenwerth als möglich in Anschlag zu bringen. Es versteht sich, dass wir auch hätten die Werthcombination umkehren und zu einem Werth von dy zwei von dx setzen können. Auch hatte überhaupt die Beschränkung auf zwei Werthe nur statt, weil sie für den Beweis der Spaltbarkeit genügte. An sich selbst repräsentiren die unabhängigen dx und dy Begriffe, unter welchen eine unbeschränkte Zahl von Werthen fällt, die ihrerseits wieder entsprechend unbeschränkte Werthepaarungen ergeben.

Bereits zu einem veränderten Gesichtspunkt gelangen wir, wenn wir Rationales und Irrationales in Gleichung stellen und aus $R + I = 0$ die Theilgleichungen $R = 0$ und $I = 0$ erschliessen. Hier sollen beide Stücke des Binoms in ihrer etwaigen Zeichenwerthigkeit garnicht in Frage kommen, sondern beispielsweise, wo I etwa eine Quadratwurzel wäre, ausdrücklich nur das eine Vorzeichen als in die Gleichung aufgenommen gelten. Sind also auch beide Bestandtheile einwerthig gesetzt und figurirt daher die Irrationalität auch nur mit ihrem absoluten Werth, so greift dennoch die Gleichungsspaltung Platz. Dies geschieht aber nicht aus einem Werthigkeitsgrunde, sondern vermöge des Widerspruchs, der darin liegen würde, Rationales und Irrationales nach derselben gemeinschaftlichen Maasseinheit zusammengefasst zu denken. Auch folgt unmittelbar $R = -I$, was, solange R und I Grössen, d. h. von Null verschieden sind, ein Widerspruch bleibt, da zwei gleiche Grössen in Beziehung auf dieselbe dritte Grösse oder

Einheit nicht die eine rational und die andere irrational sein können. Letzteres hiesse gradezu, dass dieselbe Grösse in Beziehung auf dieselbe andere zugleich rational und irrational sein könnte. Ich habe hier nicht rein parenthetisch den begrifflich wichtigen Aufschluss auszuführen, dass eine Grösse nie an sich selbst irrational ist, sondern diese Eigenschaft nur vermöge einer Rechnungsbeziehung auf eine andere Grösse hat, und dass, wenn man das Functionsverhältniss umkehrt, d. h. die irrationale Grösse zum Maassstab und zur Einheit macht, sie alsdann sofort aufhört, irrational zu sein, während diese Eigenschaft auf die bisher rationale übergeht. Etwas Aehnliches ist ja auch mit dem Imaginären und mit dem Negativen der Fall und die reciproke Natur und Trennbarkeit aller dieser Eigenschaften erhält eben durch unsere neue Gesammttheorie ihr volles Licht. Das Wesen dieser Theorie besteht darin, dass alle jene sogenannten Eigenschaften der Grössen, die man sich bisher an isolirten Grössen wie Attribute dachte, die ihnen in dieser Isolirung zukämen, nur als Andeutungen von Rechnungsbeziehungen zu andern hinzuzudenkenden Grössen gelten dürfen und nur in dieser Bestimmung ihren wahren und klaren Sinn haben. Die Diagonale eines Quadrats ist irrational in Beziehung auf die Seite, die Seite aber irrational, sobald man von der Diagonale ausgeht, die sich alsdann als rational kennzeichnet.

Mit dem eben angeführten, der Werthigkeitsrechnung benachbarten Fall eines Schlusses aus $R + I = 0$ ist die Ungleichartigkeit als solche zur Norm gemacht, aber wohlverstanden, eine Ungleichartigkeit bestimmter Art, nämlich diejenige, die in einer verschiedenen Beziehung auf den Rechnungszusammenhang besteht. Hiedurch ist zugleich die Natur des Irrationalen und des Rationalen weit schärfer beleuchtet, als in den bisher curshabenden Vorstellungen; denn man sieht nach unserer Bestimmung sofort, dass auch das Rationale nichts an sich bedeutet, und dass es seinen Sinn nur in einem Beziehungsgegensatz hat, also in diesem erst anfängt zu existiren. Eine andere Ungleichartigkeit, die von vornherein stark in die Augen fiel, die des Reellen und des Imaginären, ist auch die einzige gewesen, die in der bisherigen Analysis zu Gleichungsspaltungen geführt hat. Aus $A + B\sqrt{-1} = 0$ hat man, unter der Voraussetzung dass A und B reell sind, schon immer $A = 0$ und $B = 0$ gemacht und diese Zerfällungswendung öfter praktisch benützt. Der verstandeswidrig über-

skeptische Cauchy hat sogar eine jede Gleichung aus reellen und imaginären Gliedern fälschlich für eine blos symbolische erklärt, die an sich selbst keinen Sinn hätte, so dass ein solcher nur in den Stücken vorhanden wäre. Alle Beziehungen des Reellen und des Imaginären aufeinander wurden auf diese Weise verflüchtigt und mit leichtfertiger Oberflächlichkeit preisgegeben, während sie doch in Wahrheit das glänzende Fundament eines grossen Theils der Analysis bilden.

Doch hier sei dieser Abweg zur Oberflächlichkeit nur signalisirt. Wir wissen längst von unserer ersten Beleuchtung des Imaginären her, dass die imaginär binomen Functionen einen selbständigen Sinn haben und dass in ihnen die additive oder subtractive Verbindung der Bestandtheile sogar in den geometrischen Anwendungen die Anzeige einer wirklichen Addition oder Subtraction, nicht aber etwa von hohl Symbolischem ist. Hier geht uns jedoch nur die Thatsache an, dass man schon früh in der Verschiedenheit des Reellen oder Imaginären den Fingerzeig für eine Gleichungsspaltung gefunden hat. Da aus der Gleichung $A + B\sqrt{-1} = 0$ weiter $A = -B\sqrt{-1}$ folgt, so ist diese letztere Gleichung nur dann kein Widerspruch, wenn A und B Null sind; denn sonst müsste, wenn A und B eigentliche, von Null verschiedene Grössen sind, eine reelle Grösse gleich einer imaginären sein können. Diesen Beweis haben wir jedoch nur wegen der Uebereinstimmung mit dem hinzugefügt, was wir früher in verwandten Fällen darlegten. Das Hauptinteresse fällt hier in die Vereinzelung und Eigenartigkeit, in welcher sich dieser Präcedenzfall der Gleichungsspaltung bisher beschränkt gehalten hat. Er ist wohl hauptsächlich Schuld daran, dass man in anderer Richtung nicht weiter gekommen, und dass namentlich der Vortheil, den man hätte von der Zeichenwerthigkeit ziehen können, unentdeckt zur Seite geblieben ist. Ja die ganze Analysis hat hiedurch einen einseitigen Charakter erhalten. Sie ist grade da auf das Imaginäre beschränkt geblieben, wo sie zugleich das Reelle und das Imaginäre mit derselben Schlussweise hätte umfassen können.

Da $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{1}$ stets die Zweiwerthigkeit gemeinsam hat, so fällt das imaginär gemischte Binom unter die allgemeinere Form $A \pm B$, in welcher B im Verhältniss zu A zweiwerthig ist. Man kann also die Gleichungsspaltung auch noch vornehmen,

wenn die imaginäre Quadratwurzel in eine reelle übergeht. Der allgemeinere Grund der Spaltbarkeit ist also nicht das Imaginäre, sondern das Zweiwerthige der Quadratwurzel. Nur bei ausdrücklicher Ausschliessung der Zweiwerthigkeit wird der specifische Schluss aus dem Imaginären unmittelbar erheblich. Jedoch wird es nie einen Fall geben, in welchem man nicht im Stande wäre, auch bei ausdrücklichen Trennungen des Zeichengegensatzes die gleichsam unveräusserliche Zweiwerthigkeit der Quadratwurzel wieder sichtbar zu machen. Stellt man nämlich in solchem Falle dem Plus ein Minus entgegen, so kann man auch regelmässig erst ein Minus und dann ein Plus setzen, hat also vollständigerweise $\pm$ und $\mp$, womit die ursprüngliche Zweiwerthigkeit wieder hervortritt. Es bleibt hienach, auch solchen Scheinausnahmen gegenüber, grundsätzlich dabei, dass die Zweiwerthigkeit der abstractere und umfassendere Grund der fraglichen Gleichungsspaltung und dass die herkömmliche Herleitung aus dem Imaginären nur ein für den besondern Fall eingerichteter und für die benachbarten reellen Verhältnisse unzulänglicher Schluss ist.

8. Schon früher haben wir eine Ausdehnung der Werthigkeit angedeutet, auf die ein näheres Eingehen jedoch erst nach Behandlung der Wurzeln der Einheit und alsdann zunächst in Anwendung auf unsere neue Methode der Gleichungslösungen zweckmässig ist. Hier soll nur soviel berührt werden, als für die Sichtbarmachung des Princips erforderlich wird. Das, wodurch sich höhere Wurzeln einer und derselben Grösse von einander unterscheiden, gilt uns gleich den Zeichen $+$ und $-$ als Werthigkeit; denn die fraglichen Vorsetzungen oder, wie wir auch schon gradezu gesagt haben, zusammengesetzten Vorzeichen sind eben nichts als Angaben über die Rechnungsbeziehung oder die Rolle im Rechnungszusammenhang, welche dem Wurzelwerth noch neben seiner absoluten Grösse zukommt. Diese verschiedenen Rollen im Rechnungszusammenhange sind aber eben Werthigkeiten im engern Sinne des Worts, nämlich von wesentlich gleicher Art wie die positive und negative Werthigkeit. Alle Wurzeln der Einheit sind daher in unserm Sinne zugleich Werthigkeiten der Einheit und jeglicher andern absoluten Wurzel, vor der sie sich als Merkmale des besondern Wurzelwerths finden. Mit dieser Erweiterung der Werthigkeit werden nun auch die Fälle der Gleichungszerlegung in entscheidender Weise umfassender. Ergab die Zweiwerthigkeit immer nur eine Spaltung in

zwei Theile, so liefert bereits eine dreifache Werthigkeitsverschiedenheit der Glieder auch drei selbständige Summandengleichungen.

In der Gleichung $A \pm B + (j_1, j_2, j_3)\, C = 0$ mögen j_1, j_2, j_3 die drei dritten Wurzeln der Einheit, also die drei Werthigkeiten jeder Kubikwurzel, nämlich $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $+1$ vorstellen. Alsdann repräsentirt die Gleichung eigentlich sechs verschiedene Gleichungen und ergiebt nach unserm Princip der Werthigkeitszerlegung die drei Sondergleichungen $A = 0$, $B = 0$ und $C = 0$. Bezeichnet man $A \pm B$ der Kürze wegen mit S, so hat man zunächst die drei Gleichungen $S + j_1 C = 0$, $S + j_2 C = 0$, $S + j_3 C = 0$, und aus deren Addition $3S = 0$; denn $j_1 + j_2 + j_3$ ergeben, wie überhaupt die addirten sämmtlichen Einheitswurzeln desselben Grades, nothwendig Null. Aus $S = 0$ folgt nun, wenn man diesen Werth in die dritte der drei addirten Gleichungen einsetzt, ohne Weiteres $j_3 C = 0$, d. h. $+ C = 0$. Die Gleichung $S = 0$, d. h. $A \pm B = 0$ ist aber unser ursprünglicher Fall und man hat demgemäss auch $A = 0$ und $B = 0$.

Wären die drei Werthe von C nicht eigentliche Werthigkeiten im engern Sinne gewesen, sondern hätten in absoluten Werthverschiedenheiten bestanden, so würde sich dieselbe Zerlegung in drei Summanden ergeben haben. Doch wir wollen hier nicht die bereits oben angezeigte Erweiterung des Spaltungsprincips in die verschiedenen und von einander unabhängigen Vielwerthigkeiten hinein, die durch selbständig veränderliche Grössen repräsentirt werden, noch weiter specialisiren. Derartige Ausführungen machen sich sehr leicht, wo sie in bestimmten Anwendungen erforderlich werden. Auch die Spaltungsschemata wollen wir in die umständliche Vielgliedrigkeit der Polynome hinein nicht eher verzweigen, als bis wir deren bedürfen. Nur eine einzige, ziemlich einfach zu erledigende allgemeine Form mag hier noch platzfinden, da sie in abstracter Weise bereits etwas von der Tragweite der Werthigkeitsrechnung erkennen lässt. Bezeichnet man mit j collectiv die sämmtlichen Einheitswurzeln eines beliebigen, aber eines und desselben Grades, und mit A, B, C u. s. w. in dem früher erläuterten Sinne einwerthige Grössen, so hat die Gleichung $jA + j^2 B + j^3 C + \ldots\ldots = 0$ die Theilgleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ u. s. w. zur Folge.

Dieser Fall hat die Eigenthümlichkeit, dass nicht allein die

Anzahl der Werthigkeiten, sondern auch bei gleicher Anzahl deren verschiedene Ordnung über den Sachverhalt entscheidet. Die Gleichung repräsentirt so viele Gleichungen, als der betreffende Grad der Einheitswurzel Einheiten. Der Uebersichtlichkeit wegen sei sie zunächst für den einfachsten Fall, für den dritten Grad, betrachtet; denn das noch einfachere Schema des zweiten Grades erhält die Gestalt $\pm A + B = 0$, ist also unser ursprünglicher Ausgangspunkt. Ueberdies sei daran erinnert, dass die Potenzen der Einheitswurzeln immer wieder Einheitswurzeln desselben Grades liefern, und dass sich demgemäss durch eine Potenzirung aller verschiedenen Werthe von j immer wieder die Einheitswurzeln, aber in abgeänderter Reihenfolge, in besondern Fällen auch mit Reduction der Anzahl, ergeben. Die Gleichung $jA + j^2 B + j^3 C = 0$ bedeutet also $(j_1, j_2, j_3)\,A + (j_2, j_1, j_3)\,B + j_3\,C = 0$, wobei j_1 und j_2, wie oben, die beiden primitiven Wurzeln, j_3 aber die nicht primitive $+1$ vorstellt. Die einzelnen Werthigkeiten gehören so zueinander, dass nicht eine beliebige Combination statthat, sondern die an erster Stelle stehenden Werthigkeiten der verschiedenen Glieder immer miteinander zu verbinden sind. Letzteres folgt schon daraus, dass es immer die einzelnen Werthe des ursprünglichen j sind, deren Potenzen zu einander gehören.

Nach dieser Erläuterung können wir den Beweis unmittelbar an der gegebenen Gestalt der Gleichung $jA + j^2 B + j^3 C = 0$ wohl anschaulich genug führen. Addiren wir nämlich die drei hiedurch repräsentirten Gleichungen, so erhalten wir $(j_1 + j_2 + j_3)\,A + (j_2 + j_1 + j_3)\,B + 3 j_3\,C = 0$. Da nun $j_1 + j_2 + j_3 = 0$, so reducirt sich die Gleichung auf $3 j_3\,C = 0$, d. h. $C = 0$. Hienach bleibt $jA + j^2 B = 0$ übrig. Multiplicirt man diese Gleichung mit j, so erhält man $j^2 A + j^3 B = 0$, woraus auf dieselbe Weise, wie eben, d. h. durch Addition der drei hierin vorgestellten Gleichungen, sich $B = 0$ und danach sofort auch $A = 0$ ergiebt.

Man kann auch unmittelbar die Nullgleichheit jeder beliebigen der Grössen A, B, C u. s. w. nachweisen, indem man durch Multiplication der ganzen Gleichung mit der erforderlichen Potenz von j die Werthigkeit des fraglichen Gliedes einwerthig oder, besser gesagt, einswerthig macht. Am deutlichsten sieht man dies am allgemeinen Fall $jA + j^2 B + \ldots + j^{n-m} G + \ldots + j^n L = 0$. Es sei hiebei noch ausdrücklich hervorgehoben,

dass, wenn die Vorsetzungen *n*te Einheitswurzeln sind, das Polynom sich nicht über die *n*te Potenz hinaus erstrecken darf. Es würden sich sonst innerhalb jeder weitern n Glieder die werthigen Vorsetzungen wiederholen, und man würde nicht mehr den allgemeinen Schluss $G = 0$, sondern nur $G + G_1 + \ldots = 0$ erzielen. Bleiben wir jedoch innerhalb des Normalfalls von nur n Gliedern. Multiplicirt man die Gleichung mit j^m, so erhält man $j^{m+1}A + j^{m+2}B + \ldots + j^n G + \ldots + j^{m+n}L = 0$. Addirt man die n Werthe, welche von dieser Gleichung vorgestellt werden, so werden die betreffenden Summen der Potenzen von j in jedem Gliede ausser $j^n G$ Null, nämlich Letzteres nach Maassgabe der allgemeinen Eigenschaft der Einheitswurzeln, derzufolge die Summen gleicher, nicht durch den betreffenden Grad selbst theilbarer Potenzen aller Einheitswurzeln stets Null werden. Es ergiebt sich also kurzweg $nj^n G = 0$, also $G = 0$, ein allgemeines Resultat, da das Glied mit G jegliches von A bis L vorstellen konnte. Es ist demgemäss durch $G = 0$ auch zugleich $A = 0$, $B = 0$, . . ., $L = 0$ mitbewiesen.

Grundschemata, welche vermöge der in ihnen enthaltenen Werthigkeitsunterschiede zur Spaltung der Gleichungen und Functionen dienen, sind nur die Ausgangspunkte der Werthigkeitsrechnung, aber nicht die eigentliche Rechnung selbst. Letztere wird sich am Besten in den Anwendungen zeigen. Um jedoch schon hier ein allgemeines Bild von ihr zu entwerfen, sei darauf hingewiesen, dass ihre Hauptaufgabe darin besteht, Functionen und Gleichungen, die unmittelbar keine Werthigkeiten zeigen, so umzuformen, dass solche Werthigkeiten darin sichtbar werden. Dies wird beispielsweise bei allen algebraischen Gleichungen dadurch geschehen können, dass man von vornherein die Form der Wurzeln als werthiger Polynome von bestimmter Beschaffenheit feststellt und diese Polynome dann in die Gleichungen einsetzt. Man ordnet alsdann die Glieder der Gleichungen nach gemeinschaftlichen Werthigkeiten und gelangt so zur Zerlegung in Summandengleichungen. Ein wesentliches Rechnungsstück in diesem Verfahren ist das abstracte Rechnen mit blossen Werthigkeiten, d. h. zunächst die Bestimmung, wie sich die verschiedenen Functionen (Potenzen, Producte u. dgl.) bezüglich der Vorsetzungen gestalten. Man wird hier bisweilen die Rechnung durch Schlüsse ersetzen, nämlich nur diejenigen Werthigkeiten wirklich berechnen, deren man thatsächlich zur Auf-

stellung einer bestimmten Gleichung bedarf. Derartige Abkürzungen sind auch eine nicht unerhebliche Eigenschaft im praktischen Gebrauch des Werthigkeitsalgorithmus.

Auf die angedeutete Weise werden wir ein einheitliches Lösungssystem für alle algebraisch lösbaren Gleichungen aufstellen, welches nach einem einfachen Leitfaden, ohne die üblichen speciellen Kunstgriffe nöthig zu haben oder vor Erschöpfung der rein algebraischen Tragweite der Operationen in das Gebiet der permutatorischen Nachweisungen hinauszutreten, die Wurzeln finden lehrt. Bei Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten, mögen sie den vier ersten Graden angehören oder höher sein, wird diese Methode immer zum Ziele und zwar auf dem natürlichsten Wege zu den algebraischen Ausdrücken der Wurzeln führen, wo bestimmte algebraische Ausdrücke überhaupt in der Natur der Aufgabe liegen. Die Werthigkeitsrechnung wird also alles Frühere an Lösungen zusammenfassen und überdies den Vortheil einer festen, überall sich gleichbleibenden Regel und eines von vornherein systematischen Zusammenhanges vor den sonstigen algebraischen Methoden der Gleichungsbehandlung voraushaben. Die Gleichungen sind aber nicht Alles und nicht das Fundamentalste, worauf sich die Werthigkeitsrechnung erstreckt. Die Functionen haben, auch ohne in Gleichung zu stehen, an sich selbst in Rücksicht auf die Werthigkeit ihrer Glieder ein hohes Interesse, und es ist beispielsweise etwas weit Allgemeineres und oft auch Wichtigeres, die Function eines verschiedenwerthigen Binoms zu behandeln, als sich etwa auf den herkömmlichen Typus einer sogenannten complexen Grösse zu beschränken. Letztere ist nur ein Sonderfall des doppelwerthigen Binoms, und wir erweitern daher die Analysis, wenn wir ihn im Zusammenhang mit dem zugehörigen reellen Fall unter eine und dieselbe Nothwendigkeit unterordnen. Einen noch weit allgemeineren Gesichtspunkt ergiebt aber die Lehre von den Functionen der werthigen Polynome überhaupt, — eine Lehre, die jedoch erst durch die unmittelbare Untersuchung der die Gleichungswurzeln darstellenden Polynome vorbereitet sein will.

Fünftes Capitel.

Exacter Sinn und geregelte Methode für die Wurzeln der Einheit.

1. Die Gleichung $x^2 = a$ mit ihren beiden Werthen für x erscheint der algebraistischen Gewöhnung so gut wie selbstverständlich. Die Werthe $+ \sqrt{a}$ und $- \sqrt{a}$ gelten den fraglichen Gewohnheiten gemäss als Dinge, die für sich einen zureichenden Sinn haben. Niemandem fällt es ein, danach zu fragen, was eine isolirte negative Wurzel und was die isolirte Multiplication des Minuszeichens mit sich selbst eigentlich bedeuten solle oder könne. Man begnügt sich mit der sogenannten Regel der Zeichen, dass Minus mal Minus Plus giebt. Dieser liegt nun aber ein Gesetz der natürlichen arithmetischen Operationen zu Grunde, demzufolge in einem wirklichen Rechnungszusammenhange, in welchem thatsächlich etwas zu subtrahiren ist, die gehäufte Beziehung zweier Subtractionszeichen eine Aufhebung der Subtraction und eine Verwandlung derselben in Addition mitsichbringt. Der Fundamentalfall ist der, dass eine Differenz abzuziehen ist. Alsdann ist nach Auflösung der Klammer der Subtrahendus, also das Zusubtrahirende zu addiren. Man soll so und so viel weniger abziehen, bedeutet nichts Anderes, als man soll, falls man trotzdem die fragliche Grösse zuviel abgezogen hat, sie dafür wieder addiren. Minus Minus bedeutet also dem eben gebildeten Begriff nach eine rückgängig zu machende Subtraction. Sich irgend einen andern Begriff bilden, als den, welchen man im Hinblick auf die Ausführung der Subtraction einer Differenz durch das Bewusstsein über das Ergebniss dieses Actes gewinnt, heisst bereits in das Dunkle und Verkehrte gerathen. Wie bekanntermaassen die Multiplication mit ihren Gesetzen aus der Addition begriffen werden muss, so ist auch hier die subtractive Aufhebung einer Subtraction der Ausgangspunkt für die Nachweisung alles Weiteren. Wenn Minusminus das Ergebniss Plus liefert, so muss eben hieraus erwiesen werden, dass es mit Minusmalminus sich auch so verhält. Dies heisst principiell und systematisch verfahren; unmittelbarer und in mancher Hinsicht auch bequemer ist es indessen, gleich zwei Differenzen

miteinander zu multipliciren und daran zu zeigen, dass im Ergebniss das Product der Subtrahenden zu addiren ist.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass in der angegebenen Art und Weise die wirklichen Operationsgesetze der Zeichen sammt den letzten Gründen dieser Gesetze, nicht aber blos äusserliche Regeln, festgestellt werden. Die Zeichenregel ist etwas mechanistisch Isolirtes und in dieser Isolirung, gleichwie der Begriff der negativen Grösse selbst, wo nicht gar, wie gewöhnlich vermöge der Begleitung durch falsche Nebenvorstellungen, etwas Sinnloses in der Bedeutung des Sinnwidrigen, — da doch wenigstens vermöge der Kahlheit und Gedankenlosigkeit etwas Sinnloses in der Bedeutung des Sinnleeren. Indem man das Gesetz aus dem Zusammenhang gerissen, in welchem man es ursprünglich aufgefunden haben muss, hat man es zu einer Bauernregel werden lassen und hiemit die algebraischen Operationen in ihrer festen begrifflichen Bedeutung, wo nicht unsicher, da doch hohl und überdies in ihren Anwendungen nebelhaft gemacht. Ohne derartige Entfernung der Wahrheiten aus dem Zusammenhang, der ein klares Licht auf sie wirft und ihren Sinn fest begrenzt, — ohne solche Isolirungen, ohne solche Unachtsamkeit auf den Ursprung oder ohne solches spätere Vergessen des etwa theilweise beachteten ursprünglichen Herganges, kurz ohne den Mangel der Würdigung der wesentlichen Beziehungen, in denen die Begriffe ihren Sinn erhalten, würden unsere gesammten Aufschlüsse über das Negative und das Imaginäre nie nöthig geworden sein. Man wäre alsdann der Phantasieschöpfung gleichsam einer ganzen Religion von mathematischem Aberglauben entgangen.

Es ist aber nicht genug, den Sinn des Negativen und hiemit auch des Imaginären an sich und in seinen nächsten Beziehungen festzustellen; man muss es auch in seine gangbarsten Isolirungen verfolgen, und hier sind die verschiedenen Wurzelwerthe der Musterfall. Die Frage, was es bedeutet, eine Wurzel von ganzzahligem Grade habe soviele Werthe, als ihr Exponent Einheiten enthält, muss in einem positiven Sinne beantwortet werden. Man muss sich von dem fraglichen Sachverhalt einen genugsamen Begriff und ein anschauliches Bild machen können. Hiemit wird dann auch zugleich näher bestimmt werden können, was überhaupt die Vielwerthigkeit allgemeiner Gleichungswurzeln für einen Sinn habe; denn der Fall der einfachen Wurzeln aus

einer Grösse ist der weniger complicirte. Diesen Fall vereinfacht man aber wiederum noch dadurch, dass man von der Beliebigkeit der Grösse abstrahirt, indem man die Eins an ihre Stelle setzt. Die Gleichung $x^2 = 1$ vertritt die Einsicht über die Zweiwerthigkeit jeder Quadratwurzel abstracter, also ungemischter und reiner, als die Gleichung $x^2 = a$. Die absolute Wurzel der Einheit ist immer wieder Eins, und es muss sich daher hiebei am deutlichsten zeigen, durch welche Zeichen und Zahlen die Werthigkeit zu ihr hinzutrete. Dem herrschenden Sprachgebrauch gemäss hat man $+ 1$ und $- 1$ die quadratischen Einheitswurzeln zu nennen; wir aber haben ausserdem Plus und Minus als die Werthigkeiten jeglicher Quadratwurzel und mithin auch der quadratischen Einheitswurzel zu bezeichnen. Auch bei den mehrgradigen Einheitswurzeln werden wir den entsprechenden Gedanken geltend zu machen haben, obwohl dabei die Trennung von Zeichen und Grösse nicht ebenso einfach auf der Hand liegt. Zunächst sei an dieser Stelle nur bemerkt, dass die Einheit in der Gleichung $x^2 = 1$ grundsätzlich als Grösseneinheit, d. h. als Vertretung irgend einer theilbaren Grösse, nicht aber als blosses Zahleneins vorzustellen ist. Andernfalls hätte ihre Zusammensetzung durch Multiplication keinen Sinn, und eine solche Zusammensetzung ist es doch, ohne welche eine wirkliche oder, wenn man es so nennen will, vollkommene Potenz, wie x^2, nicht gedacht werden kann. Soll nämlich die Potenz eine Grössenpotenz und keine blosse Potenz abstracter Zahlen sein, so gehört zu ihr auch eine neue, sozusagen combinatorische Einheit, die, wie bei dem geometrischen Quadrat, aus der linearen Einheit durch eine eigenthümliche reale Zusammensetzung gebildet wird. Auch bei reinen Zahlen, welche gleichsam Individuen darstellen, könnte man sich eine combinatorische Doppeleinheit, sowie überhaupt mehrfach zusammengesetzte Einheiten gedanklich bilden. Die Verbindungsart der Elementareinheiten wird dabei gleichgültig bleiben; man würde dabei zunächst ein Einseins einführen, es sich bildlich durch zwei zu einander geschriebene Einsen für die analytische Sprache kenntlich machen und sich dabei nicht darum bekümmern, wie in einer sachlichen Anwendung reale Einheiten sich zu einer Einheit höherer Ordnung oder vielmehr neuer Gattung verbunden finden mögen. Letztere brauchten beispielsweise nicht Quadrate, sondern könnten auch Parallelogramme sein, falls man nämlich ein Parallelogramm mit einem

ihm entsprechenden Einheitsparallelogramm messen wollte. Doch dies nur zur Andeutung, wie man von vornherein Zahlen und Grössen zu unterscheiden und in jeder Beziehung auf die Gewinnung eines deutlichen Sinnes der Gleichung $x^2 = 1$ auszublicken habe. Vor weiterem Eingehen auf derartige Gesichtspunkte ist überhaupt erst ein Weg zu finden, welcher die reinen oder sogenannten binomischen Gleichungen, d. h., deutsch geredet, die zweigliedrigen Gleichungen von der Form $x^n - a = 0$ sowohl an sich selbst als mit ihren Vielwerthigkeiten, sei es abstract, sei es für die sachlichen Anwendungen, gehörig verständlich macht; denn sie sind, so paradox es klingen mag, für den, welcher letzte Gründe fordert, bisher weniger begreiflich behandelt worden, als die lösbaren der allgemeinen und vollständigen Gleichungen.

2. Natürlicherweise ist die Gleichung $x^n = a$ vom allereinfachsten Sinne, solange man nur nach ihrer einen absoluten Wurzel oder, wie man es auch nennen könnte, nach ihrer Grössenwurzel fragt. Alle übrigen Wurzeln sind sozusagen Werthigkeitswurzeln, d. h. sie entstehen dadurch, dass die Grössenwurzel einfache oder zusammengesetzte Vorzeichen oder, allgemeiner geredet, Vorsetzungen erhält. Diese Vorsetzungen sind eigentliche Vorzeichen nur dann, wenn sie nichts weiter als Operationszeichen und deren Combinationen enthalten. Dem früheren Herkommen gemäss wäre also hier nur das Minuszeichen in Frage, während in unserem System noch das Imaginärzeichen Γ und zwar $+\Gamma$ wie $-\Gamma$ hinzukommt. Auch die binomischen sogenannten Wurzeln der Einheit selbst können im Sinne von gleichsam concreten Vorzeichen aufgefasst werden. Es ist dies alsdann eine Stufe der Abstraction, vermöge deren die absolute Einheitswurzel oder, anders ausgedrückt, die Grössenwurzel der Einheit als etwas Selbständiges ausgeworfen und derselben eine Combination von Operationszeichen und Zahlen als Werthigkeit durch Vorsetzung zugesellt wird. Durch diesen Gesichtspunkt kommt Einheitlichkeit in die Anschauungsweise, und es werden Plus und Minus nicht anders betrachtet, als etwa $-\frac{1}{2} + \Gamma \frac{1}{2} \sqrt{3}$, indem nämlich dieser letztere Ausdruck nicht als vollständige dritte Wurzel der Einheit, sondern nur als vorgesetzte Werthigkeit oder, anders ausgedrückt, als Index des Operationswerthes gilt, mit welchem die zugehörige Grössenwurzel der Einheit im Rechnungszusammenhange zu figuriren hat. Ebensogut könnte

man, statt blos Plus und Minus, auch + 1 und — 1 schreiben, wobei das signirte Eins einen reinen Zahlenwerth darstellt und zur Ergänzung noch als Factor die absolute Quadratwurzel der Grösseneinheit selbst hinzugesellt erhalten müsste, damit der sachliche Sinn der Wurzel vollständig würde. Für die Anwendungen sind derartige Unterschiede nicht gleichgültig, und noch weniger sind sie es für das System, wo der leitende Gedanke keinen Abbruch erfahren darf und der Begriff der Vorzeichen zu dem der operativen Vorsetzungen, d. h. solcher Vorbemerkungen und Factoren erweitert werden muss, in denen nichts weiter als abstracte Gesetze des Rechnungszusammenhanges niedergelegt sind. Es kann nicht oft genug und nicht genug in verschiedenen Wendungen wiederholt werden, dass eine Verbindung von Rechnungszeichen und abstracten Zahlen selbst ein Rechnungszeichen, nur ein in Vergleichung mit den bisher anerkannten complicirteres, weil reichhaltiger zusammengesetztes, Rechnungszeichen zu sein vermag.

In letzter Zergliederung wird man allerdings auf einfache Operationszeichen und auf Verbindungen blosser einfacher Operationszeichen zurückgehen. Hierauf beruhte ja auch der Fortschritt unserer eignen Wendung, aus $\sqrt{-1}$ die Eins zu entfernen, die Wurzel daraus auszuziehen und sowohl das zusammengesetzte Vorzeichen Γ als auch den Begriff $\Gamma\,1$ einzuführen. Wir werden uns daher auch zunächst damit begnügen, die Vorzeichennatur der abstracten Einheitswurzeln nur insoweit geltend zu machen, dass wir sie, um an diesen Charakter zu erinnern, den absoluten Grössen nicht wie üblich nach-, sondern vorsetzen. Die Werthigkeitsrechnung legt diese kleine Veränderung der Gewohnheiten ohnedies nahe. Im Uebrigen handelt es sich aber bei dem ganzen Unternehmen, dessen Kern die fundamentale Klärung und Erweiterung der Analysis ist, stets darum, die Signirungen der analytischen Grössenzeichen so zu behandeln und derartig verständlich zu machen, dass ihnen in jeglicher Wirklichkeit verbunden gegebener Grössen etwas entspricht, sei dieses entsprechende Etwas nun eine unmittelbare Möglichkeit oder Unmöglichkeit von Operationen, oder aber eine kunstmässige Anzeige, welche die Regel der Veränderung der natürlichen Operationen bemerklich macht. Das isolirte Minuszeichen ist beispielsweise eine solche Anzeige. Die Grössen selbst, d. h. die absoluten Grössen, sind nun in der Analysis stets vorhanden,

und deren Signirung ist etwas Hinzutretendes. Völlig entsprechend und gleichsam parallel muss aber auch dieser klargestellte Sachverhalt in der Wirklichkeit, d. h. in allen Anwendungen, aufgesucht und anerkannt werden. Zwischen beiden Gebieten, der abstracten und der angewandten Analysis, darf auch nicht das Geringste übrigbleiben, was sich nicht völlig und in jedem kleinsten Umstande entspräche. Im Grunde ist nämlich das Wesentliche von beiden nur eines, und um eine Vergleichung zu brauchen, so wird der Rahmen in seiner Beschaffenheit und Fassung nicht unterschieden sein, gleichviel ob sich bereits ein Bild in ihn gefasst finde oder nicht. Demgemäss existiren die absoluten Grössen, die in einer werthigen Wurzel, also auch in der Wurzel einer realen Einheit, mit einander binomisch verbunden sind, in allen sachlichen Anwendungen, die man für solche Wurzeln zur Verfügung hat, ebenfalls als dargestellte oder darstellbare absolute Grössen. Nur kommt es, um Alles mit unserer geklärten und wohlverstandenen Analysis in Uebereinstimmung zu setzen, in entscheidender Weise darauf an, den in der Wirklichkeit thatsächlich gegebenen absoluten Quantitäten unmittelbar dieselbe Signirung beizuschreiben, wie in der Buchstabendarstellung. Hiedurch wird in jeglicher Art von Wirklichkeit von allen negativen und imaginären Eigenschaften ein entsprechend deutliches Bild erzielt, wie in den richtig verstandenen Buchstabenformeln selbst.

3. Nach diesen Erinnerungen, die einige unserer Grundsätze von einer neuen Seite wieder ins Licht setzen sollten, ist der reale Sinn aller Einheitswurzeln, einschliesslich der binomisch imaginären, von vornherein eine Selbstverständlichkeit. Nur hat letztere freilich nöthig, sich im Speciellen zu bethätigen und zu veranschaulichen, — Erfordernisse, denen nur durch nichtselbstverständliche Ausführungen genügt werden kann. Zu diesem Behuf wollen wir alle Einheitswurzeln, von den quadratischen an, als Längen auf einer einzigen Axe vorstellig machen. Es sei dabei vorausgeschickt, dass sich überhaupt für jegliche Gleichung jeglichen Grades mit einer Unbekannten die sämmtlichen Werthe dieser Unbekannten nach unserm System als Längen darstellen lassen, die sich von dem Abscissenursprung her als durch die Gleichung bestimmte Entfernungen ergeben. Bei einer Gleichung, die lauter reelle oder, noch einfacher, lauter absolute Wurzeln hat, versteht sich dieser Sachverhalt ohne viele

Umstände. Man kann alsdann sagen, es seien zwei, drei u. s. w. Punkte durch eine einzige Gleichung bestimmt. Auch geht es wohl an, zwei solche Punkte einen zweiwerthigen Punkt zu nennen und dementsprechend als eine Punktgattung zu begreifen, unter die gleichsam zwei Punktindividuen fallen. Es ist dies wesentlich nichts Anderes, als wenn man sagt und demgemäss auch denkt, das x der quadratischen Gleichung sei eine zweiwerthige Grösse; denn auch dieses figurirt als gemeinsames Zeichen für die Werthe x_1 und x_2. Wenn man also die Entfernungen vom festgesetzten Ursprung der Abscissen nach rechtshin sämmtlich x nennt, so ist diese gemeinsame Zusammenfassung Angesichts einer begrenzten Anzahl von Werthen etwas, was dem Fall der stetigen Veränderlichkeit und den zu dieser gehörigen unbeschränkt vielen, stetig abfolgenden Werthen entspricht und dazu gleichsam ein Vorstadium im Nichtstetigen bildet.

Hienach ist sofort klar, was in unserm Zusammenhange und von unserm Standpunkt aus unter der Gleichung eines Punktes zu verstehen sein muss. Ebenso ist klar, was der vielwerthige Punkt hiebei bedeutet, der nicht ein einzelner Punkt, sondern eine Gattung Punkt ist, die sich mit ihrer Eigenschaft an verschiedenen Oertern vorfindet und sich durch diese Oerter gleichsam erschöpft. Gewöhnlich bezeichnet man mit dem x den Inbegriff aller möglichen Oerter auf der Abscissenaxe; in unserem Fall beschränkt sich aber diese Möglichkeit sofort auf eine bestimmte Anzahl von Oertern, die durch den Grad der Gleichung gegeben wird. Eine solche Gleichung kann vorliegen oder erst aus einfachen Factoren, also aus Gleichungen ersten Grades, gebildet werden. Letztere mögen bereits die einfachste, also diejenige Form haben, welche im Falle etwaiger ursprünglicher Complication eben ihrer Lösung entspricht. Demgemäss darf man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, von vornherein $x = \alpha$ setzen, wo α eine absolute Abscisse bedeutet. Dies ist dann für den Punkt die Gleichung ersten Grades. Nimmt man eine zweite, $x = \beta$, hinzu, wo β eine andere, nach rechtshin liegende Entfernung auf der Axe bedeutet, so ist diese Gleichung nur dadurch kein Widerspruch mit der ersteren, dass in diesem Falle x einen andern Werth x_2 bezeichnet, während es zuerst das Zeichen für einen bestimmten Werth x_1 war.

Derselbe Name für zwei Dinge ist unter Umständen leicht irreleitend. Wollte Jemand aus $x = \alpha$ und $x = \beta$, nach dem

Grundsatz, dass Gleiches mit Gleichem multiplicirt Gleiches giebt, etwa $x^2 = \alpha\beta$ machen, so würde dies nur dann richtig sein, wenn $\alpha = \beta$ wäre, aber nicht unter unserer entgegengesetzten Voraussetzung. Eine algebraische Sprache von brauchbarer Unzweideutigkeit erfordert daher, von vornherein $x_1 = \alpha$ und $x_2 = \beta$ zu schreiben. Der allgemeine Begriff x bleibt dabei durch den Buchstaben erhalten, während die Indices seine Specialisirungen oder vielmehr Individualisirungen bemerklich machen. Man hat nun $x_1 - \alpha = 0$ und $x_1 - \beta = b$, wo b die bestimmte sich ergebende Differenz der beiden Werthe x_1 und x_2 ist. Durch Multiplication beider Gleichungen ergiebt sich $(x_1 - \alpha)(x_1 - \beta) = 0$. Auf analoge Weise erhält man $x_2 - \alpha = - b$ und $x_2 - \beta = 0$, und demgemäss die Productengleichung $(x_2 - \alpha)(x_2 - \beta) = 0$. Beide aus den Factorenproducten bestehende Gleichungen lassen sich nun in eine zusammenfassen, wenn man für x_1 und x_2 das gemeinsame Zeichen x setzt und dieses dahin versteht, dass es in der Gleichung erstens den Werth x_1 und dann noch zweitens den Werth x_2 haben könne. Wo man herkömmlicherweise die einfachen Gleichungsfactoren als Zerfällungserzeugnisse hinschreibt, nämlich $x - \alpha = 0$ und $x - \beta = 0$, — da ist offenbar eine Zweideutigkeit oder wenigstens ein Missverständniss nahegelegt. In Wahrheit sind $x - \alpha = 0$ und $x - \beta = 0$ nicht die Theilgleichungen, aus deren Multiplication sich die Gesammtgleichung anders als blos scheinbar und trügerisch ergäbe. Man hat nämlich nur $x_1 - \alpha = 0$ und $x_2 - \beta = 0$, und demgemäss durch Multiplication $x_1 x_2 - \beta x_1 - \alpha x_2 + \alpha\beta = 0$, was ebenfalls, wie die Factoren, zur reinen Identität wird, sobald man für x_1 und x_2 beziehungsweise ihre Werthe α und β setzt. Die wahren Partialgleichungen sind also immer solche, von denen nur eine den Partialfactor gleich Null setzt.

Denken wir uns nun auf diese exacte Weise auf Grund linearer Punktgleichungen eine Gesammtgleichung höheren Grades gebildet, so liegt auf der Hand, wie umgekehrt alle Wurzeln dieser Gleichung zusammen, d. h. kürzer die Gleichung selbst, eine Punktegruppe oder, wie wir es auch genannt haben, einen vielwerthigen Punkt repräsentirt. Ist uns von vornherein eine Gleichung gegeben, anstatt dass wir uns eine erzeugen, so muss auch jene soviel Punkte vorstellen, als ihr Grad Einheiten enthält. Der Unterschied ist nur der, dass wir uns hier nicht absolute Strecken wählen konnten, sondern der verschiedenartigsten

Wurzeln, also positiver, negativer, imaginärer und zwar namentlich binomisch gemischter, überhaupt aber werthiger Polynome gewärtig sein müssen. Auch in diesem Falle können wir nach unserm System alle Punkte, einschliesslich der reell und imaginär gemischten, örtlich bestimmen, und diese Bestimmung wirft wiederum ihr Licht auf den rein analytischen Sachverhalt, in welchem die Additionen der durch ihre Signirung ungleichartig von einander geschiedenen Grössen eine Wirklichkeitsbedeutung und nicht etwa einen hohlen symbolischen Sinn haben.

4. Die sogenannten binomischen Gleichungen und zwar speciell in der Form der Einheitsgleichungen sind der einfachste und anschaulichste Typus, an welchem ohne allzuviele Umstände der Sinn unseres Constructionsentwurfs klar gemacht werden kann, und für welchen dann umgekehrt aus diesem Entwurf der exacte analytische Sinn der Wurzeln selbst um so deutlicher wird. Für die beiden quadratischen Wurzeln der absoluten Einheit versteht es sich ohne Weiteres, dass die Längen $+1$ und -1 auf der fraglichen Axe zur Rechten und Linken des Ursprungs die beiden Punkte oder, wie wir auch sagen können, den zweiwerthigen Punkt ergeben. Der in entscheidender Weise lehrreiche Fall ist aber derjenige der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ mit den Wurzeln $+1, -\frac{1}{2} + \Gamma \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $-\frac{1}{2} - \Gamma \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Er enthält binomisch imaginäre Grössen, ist also zusammengesetzt, aber zugleich auch einfach genug, um etwas Erhebliches und dieses Erhebliche auch übersichtlich zu zeigen. Die Lage des Punktes, welcher der positiven Wurzel entspricht, findet sich selbstverständlich rechts vom Ursprung am Ende der gleich 1 aufgetragenen Länge. Den Punkt mit der Entfernung $-\frac{1}{2} + \Gamma \frac{1}{2}\sqrt{3}$ erhält man dadurch, dass man zuerst die imaginär zu signirende Linie $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, weil sie positiv ist, rechts vom Axenursprung aufträgt und von dem so gewonnenen Endpunkt dieser Strecke umkehrend die negativ signirte Länge $\frac{1}{2}$ in der Richtung gegen den Ursprung hin abschneidet. Der so gewonnene neue Punkt, welcher auch unmittelbar vom Axenursprung her die positive Entfernung $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ausdrückt, ist, um in der alten Sprache, aber in einem neuen Sinne zu reden, ein wahrer complexer Punkt, wie er hier ohne irgend welche Willkür oder gar Mystik nachzuweisen war.

In entsprechender Weise findet sich derjenige Punkt, der durch die Entfernung $-\frac{1}{2} - \Gamma \frac{1}{2}\sqrt{3}$ bestimmt wird. Hier hat man, weil die imaginär signirte Grösse $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ auch zugleich

negativ ist, diese Grösse als absolute Grösse links vom Abscissenursprung her abzustecken und hat dann noch um den andern Bestandtheil des Binoms, welcher ebenfalls negativ ist, also um die absolute Länge $\frac{1}{2}$, weiterzugehen. So ergiebt sich unser zweiter imaginär binomischer Punkt nach der Linken hin in der absoluten Entfernung $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$. So hätten wir denn die drei Punkte mit drei verschiedenen absoluten Entfernungen auf derselben Axe. Die beiden gemischt imaginären Punkte sind in ebenso strenger Weise festgestellt, wie der reelle. Auch sind die Linien, vermöge deren ihr Ort bestimmt ist, als absolute Längen nichts Anderes, als was sie bei den reellen Punkten auch sind. Der Unterschied ist nur der, dass diese Längen andere Signirungen und zwar in den Summanden oder Differenzgliedern, aus denen sie entstehen, nach den einzelnen Stücken sogar verschiedene Signirungen erhalten müssen, damit sie den durch die Gleichung zusammengefassten Beziehungen genügen. Es sei hier noch einmal daran erinnert, dass ja auch das Negative nur eine Signirung ist, durch welche die absolute Grösse diejenige Rolle zugetheilt erhält, vermöge deren sie der jedesmal fraglichen Gleichung genugthut. Wir haben schon früher nachgewiesen, dass man unter Umständen andere Gleichungen brauchen würde, um auf derartige isolirte Signirungen auch nur im Falle des blos Negativen verzichten zu können. Wir wollen hier an unserm Beispiel sozusagen bisignirter Linien zugleich zeigen, dass man statt der binomischen Gleichung $x^3 - 1 = 0$ eine andere nicht binomische Gleichung braucht, wenn man die imaginären Signirungen fortgeschafft und durch reelle ersetzt wissen will.

Man lasse in den beiden bisignirten Einheitswurzeln die imaginären Signirungen einfach weg und bilde aus den drei nunmehr sämmtlich reellen Wurzeln nach der oben angegebenen Methode eine Gesammtgleichung, so ergiebt sich als die letztere $x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$. Diese Gleichung entspricht demgemäss den drei reellen Punkten, ohne dass man weitere Vorkehrungen und Vorsetzungen nöthig hat, als die negativen Signirungen, an denen man, nicht etwa weil man bisher die Berechtigung streng eingesehen und nachgewiesen hätte, sondern aus blosser Gewohnheit und Autorität keinen Anstoss nimmt. Auch hätte man für den einen reellen Punkt die Gleichung $x^3 - 1 = 0$ mit ihrer reellen Lösung beibehalten, für die imaginären Lösungen aber eine quadratische Gleichung mit reellen Wurzeln, nämlich $x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$ ein-

führen können. Auf diese Weise hätte sich erst recht deutlich gezeigt, welch ein Umweg und wie unnatürlich es ist, eine gegebene Gleichung nur in ihren reellen Beziehungen zu benützen und das imaginäre Gebiet der Gleichung, als hätte es keine sachliche und gegenständliche Bedeutung, von vornherein auszuschliessen. Im Gegentheil ist es sogar bequemer und giebt allein den einheitlichen Gesichtspunkt, wenn man auch alle geometrischen und sonstigen Verhältnisse der Anwendung unmittelbar nach Maassgabe der allgemeinen analytischen Grössenbeziehungen, also auch der imaginären, vorstellig macht. Bezöge man unser Beispiel nicht auf eine Axe, sondern dächte an das vollständige Liniengebilde in der Ebene, welches nach unserm System die Gleichung $x^3 - y^3 = 0$ auch für die imaginären Wurzeln deckt, so erhielte man drei grade Linien und analog würde sich der Sachverhalt für jegliche Curvengleichung stellen. Doch ist es hier nicht unsere Absicht, nach dieser Seite hin abschweifende Parallelisirungen weiter durchzuführen.

Längen und deren gegenseitige Beziehungen können im Bilde offenbar nur in absoluter Weise vorhanden sein. Wenn zu ihnen noch Signirungen hinzutreten, wodurch sie ganz oder stückweise erst zu negativen und imaginären Längen werden, so sind diese Zeichenvorsetzungen etwas, was nicht in den Linien und ihren unmittelbaren Beziehungen selbst, sondern in den algebraischen Gleichungen seinen Grund hat, durch welche jene Beziehungen vorgestellt werden sollen. Je nachdem man die Gleichung nimmt, unter welche die Beziehungen unterzuordnen sind, werden imaginäre Signirungen gebraucht oder nicht. In der Regel ist nun aber in derartigen Angelegenheiten das geometrische Gebilde nicht der selbständige Ausgangspunkt, so dass für dasselbe die Gleichung erst zu finden wäre; sondern es ist umgekehrt die Gleichung selbst das Gesetz, für welches man auch nach irgend einer geometrischen Darstellung fragt. Dieser Frage gegenüber heisst es nun, einen nur geringen Theil der Arbeit verrichten und weniger als halbe, ja in den höhern Graden immer geringfügigere Bruchtheile von Lösungen geben, wenn man nur den Sinn der reellen Lösungen, dagegen, wie bisher der Fall gewesen ist, nicht den der imaginären darzustellen weiss.

Die Einheitswurzeln vierten Grades $+1, -1, +\Gamma 1, -\Gamma 1$ machen sich in unserer Aufgabe sehr einfach. Sie zeigen überdies, wie dieselbe absolute Einheitslänge auf derselben Axe nach

derselben Seite zugleich reell und imaginär ausfallen könne, was Niemanden wundern wird, der den Sinn unserer Aufschlüsse über das Wesen aller signirten Grössen gefasst hat. Auch kann man hiebei sagen, dass ein imaginärer Punkt mit einem reellen zusammenfalle. Die Beziehung auf den Rechnungszusammenhang ist es, was eine Grösse reell oder imaginär macht, und offenbar ist es kein Widerspruch, dass dieselbe Grösse noch einmal vorkomme und noch eine zweite etwas abgeänderte Rolle in demselben Rechnungszusammenhange spiele, welcher ja verschiedene Operationsvorgänge einschliesst.

Nach dem Bisherigen ersieht man, dass kein Hinderniss besteht, die Construction zum fünfwerthigen und allgemein zum n werthigen Punkt fortzusetzen, sobald man nur die Einheitswurzeln selbst als gegeben oder auffindbar voraussetzt. Auch ist hiebei der Casus irreducibilis, der sich zuerst mit dem siebenten Grad einstellt, für unsern Zweck keine Hemmung; denn wir haben es hier bei den Einheitswurzeln mit lauter Zahlen zu thun und construiren die Entfernungen nach dem absoluten Zahlenwerth. Handelte es sich um geometrische Nachahmung oder, bestimmter gesagt, gradezu um geometrische Ausführung algebraischer Operationen, so wäre das schon algebraisch Irreducible sicherlich ein Hinderniss; denn dieses besteht darin, dass zunächst dritte Wurzeln oder überhaupt solche, deren Exponent keine Potenz von 2 ist, aus sogenannten complexen Ausdrücken nicht algebraisch, d. h. nicht derartig ausgezogen werden können, dass man wieder die reell und imaginär gemischte Grundform $\alpha + \Gamma\beta$ erhält. Wir aber brauchen für α und β zu unserm Zweck nicht algebraische Functionen, sondern können uns mit jeder arithmetischen Darstellung dieser Grössen begnügen.

Gewöhnlich reducirt man das algebraisch Irreducible auf transcendente Weise, d. h. man bringt es auf jene imaginäre Grundform vermittelst Einführung trigonometrischer Functionen. Die Wurzeln der Einheit sind ohnedies schon eher in der transcendent imaginären Form vorhanden gewesen, als wenigstens die höheren unter ihnen in der algebraischen. Diese transcendente Form ist ebenfalls ein imaginäres Binom, nämlich bekanntlich $\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \Gamma \sin\frac{2k\pi}{n}$, wo n den Grad der Einheitswurzel und k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Auch hienach hätten wir von vornherein unsern n werthigen Punkt construiren können;

denn es kommt immer nur darauf an, die beiden absoluten Grössen zu kennen und mit ihnen sozusagen die binomische Entfernung abzumessen. Jedoch wollten wir in diesem Capitel grundsätzlich am rein Algebraischen und Arithmetischen festhalten. Um daher nicht unnützer Weise für das Irreducible die Hülfe transcendenter Functionen in Anspruch zu nehmen, berufen wir uns hier auf die Möglichkeit einer rein arithmetischen Ausziehung der algebraisch irreducibeln Wurzeln, sobald diese in Zahlen gegeben sind. Die hiezu erforderliche Vermehrung der gewöhnlichen arithmetischen Operationen um eine neue, die zu der gemeinen Wurzelausziehung hinzutritt, wird später platzfinden. An dieser Stelle ist es genug, davon ausgehen zu können, dass die irreducibeln Fälle, auch abgesehen von der Dazwischenkunft von Kreisfunctionen, in Zahlen schon rein arithmetisch reducibel sind. Unter allen Umständen können wir daher bei den Einheitswurzeln das imaginäre Binom als gegebene Grundform voraussetzen, und ist dieses gegeben, so bietet die Construction und Erörterung des n werthigen Punkts keine wesentlich andern Seiten dar, als die des dreiwerthigen.

5. Die Construction der Einheitswurzeln auf einer einzigen Axe ist, abgesehen von dem Licht, welches sie auf die Rolle dieser Wurzeln zurückwirft, zugleich das Grunderforderniss, um nach unserm System die Curven auch mit allen ihren nichtreellen Zweigen darzustellen. Dieselbe Ordinate y wird beispielsweise bei einer Curve fünften Grades fünf Werthe annehmen, welche als Längen auf einer und derselben Linie abzustecken sind, so den fünfwerthigen Punkt und ihm entsprechend, indem die Ordinate y mit dem veränderten x fortrückt, fünf Curvenzüge liefern. Von dieser Erweiterung unserer verstandesmässigen Bestimmung des Imaginären ist hier jedoch noch nicht eingehender zu reden. Ueberhaupt haben wir eine geometrische Darstellung der Einheitswurzeln nur vorangeschickt, um auch über das Analytische hinaus die Tragweite der Sache in einem Bilde zu veranschaulichen. Nunmehr wenden wir uns in völlig abstracter Weise der algebraischen Auffindung der Einheitswurzeln zu, wobei es besonders darauf ankommen wird, auf unsere eigne allgemeine Methode der Gleichungsbehandlung vorweg Bezug zu nehmen und hiedurch zugleich den Zusammenhang mit der Werthigkeitsrechnung zu zeigen. Unsere Gleichungsbehandlung liefert nämlich anstatt der verschiedenen Kunstgriffe, die sich bisweilen allzu mannig-

faltig gestalten und in Einzelheiten dem Gedächtniss leicht wieder entfallen, einen sicher festzuhaltenden Leitfaden. Auch brauchen wir um der Allgemeinheit der Methode willen nicht auf naheliegende Nebenerleichterungen zu verzichten.

Der Kern der Frage nach den Einheitswurzeln liegt zunächst in der Bestimmung derjenigen unter ihnen, deren Grad eine Primzahl ist. Hat man die sozusagen primgradigen, so giebt es allgemeine Verfahrungsarten, diejenigen von zusammengesetzten Graden daraus abzuleiten. Es kommt alsdann nur darauf an, gemäss der Bildung von Producten und Potenzen der Primzahlen auch die zu den so zusammengesetzten Graden gehörigen Einheitswurzeln aus den gegebenen einfacheren herzustellen. Man habe die Einheitswurzeln von den ungleichen Primgraden p und p_1, so hat man nur alle möglichen combinatorischen Producte zu je zwei zu bilden, um sämmtliche Wurzeln vom zusammengesetzten Grade pp_1 zu finden. Diese bekannte Wendung wird hier vorausgesetzt und ebenso deren Erweiterung für mehrere ungleiche Factoren durch Bildung der verschiedenen möglichen Wurzelproducte in der entsprechenden mehrfachen Combination. Für den Grad p^2 nimmt man die $p$ten Wurzeln aus jeder der p Einheitswurzeln $p$ten Grades und setzt jeder der so angezeigten höhern Wurzeln noch die p Einheitswurzeln als Werthigkeitsfactoren vor. Für den Grad p^3 müsste man diese Operation wiederholen u. s. w. Ein einfaches Beispiel für den Potenzgrad würden die neunten Einheitswurzeln sein; denn hier sind auch die dritten Wurzeln aus den binomisch imaginären Einheitswurzeln dritten Grades eben nur anzudeuten und nicht weiter auszuziehen, d. h. diese Ausdrücke sind irreducibel.

Noch einfacher wäre an sich selbst das Beispiel der vierten Einheitswurzeln gewesen; denn diese bestimmen sich schon dem Begriff nach als die Quadratwurzeln aus den quadratischen Einheitswurzeln. Indessen hat es weiter mit den Potenzen von zwei eine eigenthümliche Bewandtniss. Hier kann man nämlich fordern, dass die Ausdrücke immer reducirt, d. h. auf die einfache Grundform des imaginären Binoms $\alpha + \Gamma\beta$ gebracht werden. Dies geht beispielsweise schon bei den achten Wurzeln, die sich sofort als die zweiten Wurzeln aus den vierten Einheitswurzeln kennzeichnen, in den imaginären Fällen nicht anders, als indem man die binomisch imaginäre oder, nach unserm System, die binomisch zweiwerthige Grundform als Ziel vorwegnimmt und

deren Bestandtheile aus der Gleichung entwickelt. Bezeichnet man also mit r eine oder mehrere achte Einheitswurzeln, d. h. die Gattung selbst, so hat man in Beziehung auf die vierten Einheitswurzeln $\pm\sqrt{-1}$, aus denen die Quadratwurzel in der betreffenden Form herzustellen ist, $r^2 = \pm\sqrt{-1}$. Nun braucht man für r die Grundform des zweiwerthigen Binoms $a \pm b$. Setzt man diese ein, so hat man $(a \pm b)^2 = \pm\sqrt{-1}$. Quadrirt man thatsächlich, so lässt sich die entstehende Gleichung $a^2 \pm 2ab + b^2 = \pm\sqrt{-1}$ nach unserer früher begründeten Regel in zwei spalten, indem die einwerthigen Glieder für sich und die zweiwerthigen Glieder für sich in Gleichung stehen müssen. Man hat demgemäss $a^2 + b^2 = 0$ und $2ab = \sqrt{-1}$. Aus ersterer Gleichung ergiebt sich $b = a\sqrt{-1}$, und nach Einsetzung dieses Werths in die zweite Gleichung findet sich $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und dazu alsdann $b = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{2}}$. Es ist also $r = \sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dieser Ausdruck repräsentirt vier Werthe, wenn man seinem ersten Gliede $\sqrt{\frac{1}{2}}$ seine beiden Vorzeichen giebt, und diese vier Werthe sind die vier Quadratwurzeln aus $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$. Bei der gewöhnlichen Herstellung werden unmittelbar die Imaginären benützt, indem man die Grundform $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ maassgebend sein lässt und dann die reellen von den imaginären Bestandtheilen trennt. Wir haben auch in diesem Falle die Werthigkeit angewendet, um auch an einem solchen Nebenbeispiel zu zeigen, dass sie zutrifft. Ihre völlig charakteristische Anwendung findet sie freilich da, wo die Spaltung durch das Imaginäre nicht concurrirt.

Auf dieselbe Weise, wie im Falle des achten Grades, wird man bei fortschreitend höhern Potenzen von zwei verfahren. Für alle Zusammensetzungen ist also die Aufgabe nach den bisher bekannten, vorher angedeuteten Regeln als erledigt anzusehen. Gehen wir nun zu den Primzahlen selbst über. Der zweite Grad ist selbstverständlich. Der dritte hängt von ihm ab; denn in den dritten Einheitswurzeln müssen die zweiten vorkommen. Bei jedem nach der Zwei folgenden Primgrad, also zunächst bei dem dritten Grad wird man die Gleichung $x^p - 1$ durch $x - 1$ dividiren und so in zwei Factoren zerlegen. Auf diese Weise scheidet die Eins als die reelle Einheitswurzel, welche zugleich die Wurzel der Partialgleichung $x - 1 = 0$ ist, aus, und es

bleiben die $p - 1$ Wurzeln der andern Partialgleichung $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$ zu finden. Der dritte Grad liefert als Divisionsergebniss $x^2 + x + 1 = 0$ und die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind alsdann die beiden gesuchten imaginär binomischen Einheitswurzeln. Man bemerke um des systematischen Ganges willen wohl, dass diese Einheitswurzeln dritten Grades von einer gemischten quadratischen Gleichung abhängen, also die Regel der Auflösung einer solchen und zwar ganz im Allgemeinen voraussetzen.

Auch der fünfte Grad kann weiter keine Umstände machen, da die Gleichung des vierten Grades überhaupt auflösbar ist. In dem hier fraglichen besondern Fall der Gleichung $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ reducirt man aber gewöhnlich diese Gleichung auf Grund ihrer besondern Beschaffenheit als einer reciproken Gleichung auf den zweiten Grad und erhält dann $z^2 + z - 1 = 0$, worin z durch die Beziehung $z = x + \frac{1}{x}$ bestimmt ist. Ueberhaupt ist die oben angegebene Gleichung vom Grade $p - 1$ eine reciproke und auf die fragliche Art auf den Grad $\frac{p-1}{2}$ reducirbar. Setzt man in ihr den umgekehrten Werth von x an die Stelle von x, so ändert sich durch diese Einsetzung von $\frac{1}{x}$, nachdem man die Brüche weggeschafft hat, nichts als die gleichgültige Reihenfolge der Glieder. Wenn x_1 eine Wurzel ist, so ist also auch $\frac{1}{x_1}$ eine solche. Verbindet man beide zu einer Summe, so wird man nur halb soviel derartige Summen als Wurzeln erhalten, und demgemäss kann eine Gleichung, welche die verschiedenen Werthe einer solchen Summe zu Wurzeln haben soll, auch nur vom halben Grade sein. Unverkennbar ist aber diese ganze, anscheinend rein algebraische Wendung von der bereits bekannten transcendenten Grundform der Einheitswurzeln her veranlasst. Man wundere sich daher auch nicht, dass $z = x + \frac{1}{x}$ die Einsetzung von $x = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$, d. h. in etwas abgeänderter Schreibweise von $x = \frac{z}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2}$ mitsichbringt. Dies ist nicht blos die Grundform des imaginären Binoms, sondern speciell ein algebraisches Abbild der transcen-

denten Grundform jeder Einheitswurzel; denn die Grössen $\frac{z}{2}$ und $\sqrt{1-\left(\frac{z}{2}\right)^2}$ stehen in derselben Beziehung wie Cosinus und Sinus, und thatsächlich ist $\frac{z}{2}$ nur ein anderer Ausdruck für $cos\ \frac{2k\pi}{p}$.

Bei dem siebenten Grade führt die eben erörterte Reductionsart auf eine Gleichung dritten Grades und hiemit zur algebraisch irreducibeln Darstellung der verlangten Einheitswurzeln. Mit dem nun folgenden elften Grad wird die Aufgabe von höherer Natur; denn jene Reduction liefert hier eine Gleichung fünften Grades, die als solche aufgelöst werden muss. Lange vor Gauss hatte Vandermonde diesen ersten entscheidenden und maassgebenden Fall indirect dadurch erledigt, dass er eine derartige Gleichung fünften Grades auflöste, wie sie sich im Problem der elften Einheitswurzeln einstellen muss. Er bediente sich im Allgemeinen bei seiner Behandlung der Gleichungen einer ähnlichen Methode, wie diejenige, welche Lagrange in den Grundlagen kurz vorher (1770) und im Uebrigen gleichzeitig veröffentlicht hatte und welche in der Lagrangeschen Form der Leitfaden für alle spätere Gleichungsbehandlung geworden und bis heute geblieben ist. Lagrange selbst, der sich seinem Wesen nach zunächst immer den umfassenden Allgemeinheiten zuwendete, liess demgemäss vorläufig die Einheitswurzeln noch zur Seite und kam erst in einer spätern Periode seines Lebens auf diese und zwar nur, um die inzwischen von Gauss gegebene, nach Kunstgriffen aussehende, in der That aber auf der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungsmethode beruhende Specialentwicklung zu vereinfachen und so gleichsam gehörig auf ihren Ursprung zurückzuführen.

6. Im sechsten bis neunten Capitel werden wir eine allgemeine Methode der Gleichungslösungen darlegen, welche die Eigenthümlichkeit hat, die Begriffe von Wurzelelementen, die vorgängige Feststellung der Wurzelformen und das Operiren mit den Signirungswerthen, d. h. die Werthigkeitsrechnung, zum Leitfaden zu haben. Hiebei wird die Lagrangesche Methode der Wurzelfunctionen nur in denjenigen Fällen zu benützen sein, in denen sie wirklich am Platze ist, nämlich da, wo die signirbaren Werthigkeiten aufhören und die rein permutativen, nur durch Wurzelvertauschungen markirbaren, im Allgemeinen transcendenten

Werthe beginnen. Durch diese Combination unserer Methode der Wurzelelemente, die bis zum vierten Grade einschliesslich für sich allein zur Anwendung kommt, mit dem wesentlichen Theil der Wendung Lagranges oder, genauer gesagt, durch die Einrahmung dieser Wendung in unser System, wird die ganze Theorie der Lösung höherer Gleichungen völlig übersichtlich und nicht nur mit allen nach Lagrange vollzogenen Bereicherungen, also nicht nur mit den Gesichtspunkten und Feststellungen Abels und Galois, sondern auch mit unsern eignen Specialvermehrungen zusammen ein Ganzes von schematischer und gleichsam mechanistischer Regelmässigkeit. Da so etwas der Inbegriff der früheren Methoden und Ergebnisse bisher nicht war, so konnte man sich darauf in Specialfällen auch nicht ohne Weiteres berufen.

Das Problem der Einheitswurzeln ist nun nichts weiter als ein besonderer Fall der Anwendung der fraglichen allgemeinen Theorie der Gleichungslösungen. Um letztere anwenden zu können, brauchen wir nichts weiter als die Reduction einer primgradigen Einheitsgleichung durch Division mit $x - 1$. Eine weitere Reduction können wir uns sparen. Wir brauchen nur zu sagen, dass wir die Gleichung vom Grade $p - 1$ nach den allgemeinen Methoden der Lösung allgemeiner Gleichungen zu behandeln haben. Dies würde dem entsprechend, was im neunten Capitel bezüglich der zusammengesetzten Grade ausgeführt worden ist, zur Zerlegung in Factorengleichungen veranlassen. Man würde also beispielsweise bei der ersten, für die höhere Gattung typischen Hauptaufgabe, die sich einstellt, nämlich bei derjenigen der elften Einheitswurzeln die betreffende zehngradige Gleichung in zwei fünfgradige zerlegen, deren Coefficienten von einer Gleichung zweiten Grades abhängen. Jede dieser fünfgradigen Gleichungen würde fünf der zehn primitiven elften Einheitswurzeln zu Wurzeln haben. Man kann aber die Bemühung mit dieser oder einer andern Zerlegung vermeiden und die Gleichung zehnten oder im Allgemeinen $(p - 1)$ten Grades direct als solche auflösen. Solche Gleichungen gehören nämlich zu den sogenannten Abelschen, d. h. in unserm Sinne, es sind Gleichungen, deren irrationale Wurzelelemente unter dem einen Wurzelzeichen keine weitere Irrationalität enthalten. Zu den fraglichen Rationalitäten kann man nun bei entsprechender Modification der Lösungsmethode allgemeiner Gleichungen auch auf einem kürzern Wege gelangen. Wir werden diese Modifi-

cation, deren Kern von Lagrange herrührt, im neunten Capitel so darstellen, wie sie sich im Rahmen unserer Methode nach deren leitenden Begriffen gestaltet. Hier an dieser Stelle wäre es überhaupt schon hinreichend gewesen, darauf hinzuweisen, dass, sei es auf längerm, sei es auf kürzerm Wege, die später darzustellende allgemeine Methode der Gleichungslösungen ohne besondere Kunstgriffe zur Ermittlung der Einheitswurzeln führe.

Was wir hier brauchen, ist wesentlich eine genaue Vorstellung über den systematischen Zusammenhang, in welchem die Beschaffung der Einheitswurzeln mit der Beschaffung aller andern Gleichungswurzeln steht. Ueberdies ist ein klares Bewusstsein davon nöthig, was unsere Operationen mit den Werthigkeiten und werthigen Polynomen, namentlich mit den allgemeinen Wurzelformen, bezüglich der Einheitswurzeln voraussetzen. Offenbar hängt die vollständige algebraische Lösung von Gleichungen von der Kenntniss der Einheitswurzeln bis zu dem betreffenden Grade ab, und wiederum beruht die Bestimmung von Einheitswurzeln auf der Lösung allgemeiner Gleichungen vorangehender Grade. Man hat also im aufsteigenden Stufengang abwechselnd Einheitswurzeln zu bestimmen und allgemeine Gleichungen zu lösen. Die einen sind dann immer das, was für die andern nachher erforderlich wird. Hieraus begreift sich auch die Unmöglichkeit, einen der beiden Gegenstände für sich allein, in völliger Sonderung von dem andern, abzuhandeln. Für die allgemeine, d. h. gemischte Gleichung zweiten Grades muss man schon die Zweiwerthigkeit jeder Quadratwurzel kennen. Dies heisst aber soviel, man muss die Einheitswurzeln zweiten Grades als festgestellt voraussetzen dürfen. Die Methoden, die allgemeine quadratische Gleichung zu lösen, lehren an sich selbst darüber nichts, sondern setzen die Lösung einer reinen quadratischen Gleichung und in ihr eingeschlossen die beiden Einheitswurzeln voraus. Angesichts der kubischen Gleichung wird der Sachverhalt noch handgreiflicher, weil er sich weder durch das völlig Triviale noch durch unsere Gewohnheiten verdunkelt. Hier sieht man sofort, dass man die beiden primitiven Einheitswurzeln dritten Grades erst auf Grund einer allgemeinen quadratischen Gleichung haben kann, so dass sich also die Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung als Voraussetzung dazwischen schiebt, ehe man zur binomischen Gleichung $x^3 - 1 = 0$ übergehen kann. Die Auffindung der siebenten Einheitswurzeln erfordert mindestens die Lösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades.

Nach alledem ist der natürliche Anfang der mit den elementaren Einheitswurzeln, und dann wird, um in der Lösung der verschiedensten Gleichungen weiter zu kommen, alternirend fortgeschritten, d. h. bald eine allgemeine Gleichung, bald eine binomische gelöst. Dabei reicht die allgemeine Gleichung eines bestimmten Grades immer aus, um in der unbeschränkten Reihe der Grade der Einheitsgleichungen, wenn man will, eine unbeschränkte Zahl von Positionen vorwegzunehmen. Beispielsweise können auf Grund der Lösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades die dritten, fünften, siebzehnten Einheitswurzeln und überhaupt die vom Grade $2^m + 1$, wenn dieser Grad zugleich ein Primgrad ist, ermittelt werden. Die vierten, achten u. s. w. Einheitswurzeln, also überhaupt die vom Grade 2^m stützen sich sogar nur auf die Lösung einer reinen quadratischen Gleichung. Von diesen vorweggenommenen Positionen abgesehen oder vielmehr, um die jedesmaligen Anfänge der Reihen solcher Positionen möglich zu machen, muss man immer wieder für jede neue Reihengattung einen neuen Ansatzpunkt in der Lösung der erforderlichen allgemeinen Gleichung gewinnen. Hiemit ist die alternirende Abhängigkeit der einen Gattung von Wurzeln von der andern wohl genügend festgestellt. Die Einheitswurzeln haben den Charakter von Hülfswurzeln; denn ohne sie kann man keine allgemeine Hauptwurzel ausdrücken. Dies hindert aber nicht, dass die Formen vorgängiger Hauptwurzeln unentbehrliche Hülfsformen für die Darstellung späterer Hülfswurzeln seien.

7. Eine Nachweisung des Weges zur thatsächlichen algebraischen Darstellung der Einheitswurzeln ist die systematisch nothwendige Voraussetzung, damit die Lösung der allgemeinen Gleichungen nicht so aussehe, als wenn die Zeichen für die darin vorkommenden Hülfswurzeln etwas noch Unbekanntes oder nur transcendent Angebbares vorstellten. Nur so werden die algebraischen Formeln für die allgemeinen Gleichungswurzeln auch wirklich lückenlos algebraisch, indem sie alsdann keine unbekannten Functionen mehr enthalten, sondern sich durch Wurzelzeichen aus abstracten Zahlen und Gleichungscoefficienten zusammensetzen. Für unser Operiren mit den Werthigkeiten haben wir aber die speciellen algebraischen Ausdrücke für die Einheitswurzeln nicht nöthig; im Gegentheil nützen uns nur die einfachen Zeichen und würden uns speciellere Ausdrücke nur hinderlich sein. Wohl aber stützen wir uns fortwährend auf den

Satz, dass die Einheitswurzeln eines bestimmten Grades alle durch die Potenzen irgend einer primitiven unter ihnen ausgedrückt werden können, sowie auch darauf, dass die Summe aller Einheitswurzeln eines bestimmten Grades gleich Null ist. Letzteres folgt aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen, derzufolge die Summe der Wurzeln immer dem negativ genommenen ersten Coefficienten gleich ist. Ersteres lässt sich aber, ohne von der transcendenten Lösung zu entlehnen und ohne die algebraische Lösung bereits zu haben, rein algebraisch auf Grund des blossen Begriffs von Einheitswurzeln kurz erweisen. Ist j eine Einheitswurzel vom Grade n, so ist also $j^n = 1$. Bezeichnet k eine ganze Zahl und erhebt man jene Gleichung, welche nichts als den Begriff der Einheitswurzel darstellt, zur Potenz k, so hat man $(j^n)^k = 1$ oder $j^{nk} = 1$. Nun aber ist $j^{nk} = j^{kn} = (j^k)^n$, und aus der Gleichung $(j^k)^n = 1$, wenn sie als Darstellung des Begriffs einer $n$ten Einheitswurzel genommen wird, folgt unmittelbar, dass j^k eine solche sein müsse.

Ausserdem ist noch darzulegen, dass die Einheitswurzeln sämmtlich als die verschiedenen Potenzen irgend einer primitiven unter ihnen ausgedrückt werden können. Ist j eine primitive Einheitswurzel $n$ten Grades, so wissen wir bereits aus der vorigen Nachweisung, derzufolge j^k auch eine Einheitswurzel des $n$ten Grades sein muss, dass $j^2, j^3, j^4, \ldots j^n$ Einheitswurzeln sind. Der Schluss darauf, dass dies alle Einheitswurzeln seien, kann erst gemacht werden, wenn man weiss, dass sie alle von einander verschieden sein müssen, d. h. dass nicht irgend zwei oder mehrere gleiche darunter sein können. Nur unter Verneinung dieses Falles hat man nämlich wirklich n verschiedene Einheitswurzeln des $n$ten Grades vor sich, und diese müssen eben die sämmtlichen Einheitswurzeln des $n$ten Grades sein; denn sonst müsste es mehr als n geben können. Gesetzt nun, unter jenen Potenzen wären j^a und j^b einander gleich, so wäre deren Quotient $j^{b-a} = 1$, und da $b - a$ nothwendig kleiner als n, so müsste j als Wurzel einer Gleichung $j^{b-a} = 1$ zugleich eine Einheitswurzel von niedrigerem Grade sein, was dem Begriff einer primitiven Einheitswurzel widerspricht. Letzterer beruht nämlich darauf, dass aus einer Wurzel die Einheit nicht durch Erhebung zu einer geringeren Potenz als der $n$ten hervorgehe.

Hiemit ist Alles erwiesen, vorausgesetzt dass es überhaupt primitive Einheitswurzeln, d. h. Wurzeln von der erwähnten

Beschaffenheit giebt. Ein von der transcendenten Lösung und natürlich auch von der algebraischen unabhängiger Beweis dieser Existenz ist nicht schwer, geräth aber etwas umständlich, und da man jetzt keine leidliche Darstellung der Gleichungstheorie antreffen wird, welche keine algebraische Darlegung des Vorhandenseins primitiver Einheitswurzeln enthielte, so können wir hier auf die specielle Ausführung dieser überall zugänglichen Thatsache verzichten. Im Uebrigen haben wir aber bezüglich der Einheitswurzeln hier Alles specieller beleuchtet, was wir theils für die Werthigkeitssätze bereits angewendet hatten, theils in weiteren Darlegungen brauchen werden. Dem imaginären Mysticismus aber, den man, wie man ihn mit $\sqrt{-1}$ getrieben hat, so auch mit den imaginären Einheitswurzeln überhaupt treiben könnte, haben wir durch unsere obige geometrische Gruppirung der Einheitswurzeln auf einer Axe wohl den Nerv genugsam abgeschnitten. Auch haben wir hiemit zugleich, was von positiver Bedeutung und aus diesem Gesichtspunkt wichtiger ist, die Einleitung nicht nur für ein verstandesmässiges Operiren mit den höhern Imaginaritäten in rein abstracter Weise, sondern auch für deren reale Anwendung getroffen.

Sechstes Capitel.

Die Gleichungslösung nach der Werthigkeitsrechnung.

1. Alle Arten, Gleichungen zu lösen, entsprangen aus irgend welchen Vorstellungen über die Einrichtung der Wurzeln. Auch schon in den besondern Kunstgriffen, welche ursprünglich für die Gleichungen dritten und vierten Grades angewendet wurden, lässt sich jener Leitfaden erkennen. Wo man beispielsweise die Gleichungswurzel dritten Grades von vornherein als aus zwei Stücken zusammengesetzt behandelte, konnte man auf diesen Kunstgriff nur durch Ueberlegungen gekommen sein, welche eine derartige Zusammensetzung als nothwendig oder wenigstens als wahrscheinlich nahegelegt hatten. Bereits die Entfernung der zweiten Glieder aus den vollständigen Gleichungen ist auf denselben Grund zurückzuführen, da die hiezu erforderliche

Zerlegung der Wurzel in zwei Bestandtheile kein unmotivirter Zufall gewesen sein kann. Man hatte eben Gleichungen hergestellt, mit einer neuen Wurzel, in welcher der rationale Bestandtheil fehlte. Von einem deutlichen Bewusstsein war aber der fragliche Leitfaden nicht begleitet; denn sonst hätten die betreffenden Operationen nicht bis heute als zufällige Kunstgriffe gelten können. Die Ideen waren in der entscheidenden Richtung unbestimmt, sporadisch, ja instinctiv geblieben.

Die einzelnen Algebraisten hatten thatsächlich irgend welche Gedanken von der Einrichtung der Wurzeln benützt; aber sie waren sich nicht bewusst gewesen, dass hier die eigentliche Triebkraft läge, die ihren Bemühungen Fortgang verschaffte. Euler suchte allerdings direct nach allgemeinen Wurzelformen; aber er gelangte trotzdem zu keiner umfassenden Methode der Gleichungsbehandlung. Erst Lagrange ist, wie überhaupt der bis heute exacteste und umfassendste Repräsentant der modernen Mathematik, so auch in Beziehung auf die Gleichungslösungen erst der Vertreter einer wirklich universellen Methode, der einzigen Methode, vermöge deren es möglich gewesen ist, auch vom fünften Grade an noch etwas auszurichten. Aber auch Lagrange hat den innern Zusammenhang, in welchem seine Methode, gleich Allem, was in der Sache geschehen ist oder geschehen konnte, mit vorgängigen Vorstellungen über die Wurzelform stand und stehen musste, nicht nur unbeleuchtet, sondern gradezu verdeckt gelassen, so dass sogar der Eulersche Gesichtspunkt dabei in den Hintergrund trat. Grade weil die Wendung von Lagrange in der Geschichte der Algebra wirklich eine neue, wenn auch bis jetzt in den bisherigen Rechenschaften nicht einmal signalisirte, geschweige gehörig ausgezeichnete Epoche vertritt, hat man alle Ursache, den Hauptpunkt nicht zu übersehen, vielmehr das weniger sichtbare Fundament aufzudecken. Dieses Fundament ist aber eine ganz bestimmte Voraussetzung über die allgemeine Wurzelform und zwar auch über die Modificationen, durch die jede einzelne der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung im Unterschiede von den andern schematisch und, um in unserer Sprache zu reden, auch werthig charakterisirt wird.

Wir werden über die Wurzelform aller Gleichungen im nächsten Capitel allgemeingültige Schemata aufstellen und auch über die nähere Constitution der Wurzeln im Allgemeinen sowie auch für die besondern Fälle Untersuchungen anstellen und Aus-

führungen geben, die zur Uebersicht des Ganzen und zur Ausfüllung der Lücken bisher noch gefehlt haben. Was einzelne grosse Mathematiker, wie Abel, blos gelegentlich davon beigebracht und nicht einmal immer bewiesen haben, wird auf diese Weise durch ein selbständiges strenges System des Wurzelschematismus ersetzt sowie ergänzt werden, und der Gegenstand wird so direct und um seiner selbst willen zur Behandlung gelangen. Durch das neue und vollere Licht, welches hiedurch auf ihn fällt, wird er bisher unbeachtete oder völlig unbekannte Seiten zeigen. Im laufenden Capitel werden wir uns aber darauf beschränken, von der Wurzelform zunächst nur besondere Fälle zu erörtern, die bis zum vierten Grade in Frage kommen. Trotzdem aber wird es möglich sein, für die Werthigkeitslösungen eine völlige Allgemeinheit der Gesichtspunkte zu wahren.

Die Brücke, durch welche die Werthigkeitsrechnung mit den Gleichungslösungen zusammenhängt, ist eine allgemeine Beschaffenheit jeglicher Wurzelform. Eine Gleichungswurzel enthält, sobald sie den ersten Grad überschreitet, mindestens ein mehrwerthiges Element. Sie ist im Allgemeinen ein werthiges Polynom, und dieses kann daher statt aller Wurzeln zusammen, d. h. für die Unbekannte x, in die Gleichung eingesetzt werden. Dadurch wird die eine Unbekannte mit mehreren neuen vertauscht; aber vermöge der Werthigkeitsunterschiede zerfällt auch die früher einzige Gleichung in eine zureichende Anzahl von Partialgleichungen. Die Unbekannten sind die Wurzelelemente und lassen sich bis zum vierten Grade einschliesslich, sowie auch bei gewissen Typen höherer Grade mit den einfachsten Eliminationsmitteln bestimmen. Von einigen Abkürzungen, die statt der unmittelbaren Substitution der Wurzelform in die Gleichung von vornherein platzgreifen können, ist erst in speciellen Anwendungen zu reden. Die Ergebnisse sind stets Gleichungen zwischen den Wurzelelementen und den Gleichungscoefficienten, und das leitende Princip ist in jedem Falle eine Einsetzung der werthigen Wurzelform, sei es unmittelbar in die gegebene Gleichung oder aber in solche Gleichungen, die aus den allgemeinen Eigenschaften der gegebenen abgeleitet sind, wie die zwischen den Wurzelcombinationen oder Wurzelpotenzen und den Coefficienten. Hat man nach letzterer Methode bereits mehrere Gleichungen, in denen Coefficienten oder rationale Functionen der Coefficienten den einen Bestandtheil bilden, so führt das Princip der Werthigkeitsrechnung

einfach dazu, bei den Einsetzungen nur die einwerthigen Combinationen der Wurzelelemente zurückzubehalten; denn diese allein können mit den ja auch einwerthigen Coefficienten in Gleichung stehen. Die andern Bestandtheile müssen sich von selbst zu Null aufheben, und hiezu würde auch die Erprobung des Algorithmus der Einheitswurzeln von selbst führen, der übrigens ja auch die von der Werthigkeitsrechnung sonst benützte Beziehung ist. In der fraglichen Modification der Methode leistet dieser Algorithmus maschinenmässig, was in andern Fällen erst durch besondere Veranstaltungen zu Wege gebracht werden muss.

2. Ehe wir auf den Fall vom einfachsten Typus zur Erläuterung unseres Lösungsprincips eingehen, müssen wir noch darauf hinweisen, dass jene Vermittlung durch die Wurzelform überhaupt dem Wesen aller Analysis und zwar in deren ursprünglichstem Sinne entspricht. Analytisch nannte man im Alterthum dasjenige Verfahren, bei welchem das Gesuchte der Bezeichnung oder Form nach so hingestellt und behandelt wird, als wenn es etwas Gegebenes wäre. Ein solches Verfahren ist auch der Kernpunkt in der modernen Analysis und nicht etwa das ausschliessliche Operiren mit abstracten, durch die Buchstaben vertretenen Grössen und mit noch abstracteren Rechnungszeichen. Stellt man das Gesuchte als ein x hin und stellt nun eine Gleichung in x auf, so sind die zu dieser Aufstellung erforderlichen Beziehungen nur dadurch zu finden, dass man sie an x und dessen Verhältnissen zu andern Grössen wie an etwas Vorliegendem erkennt. Allerdings ist x eine unbekannte Grösse; aber was nicht unbekannt sein darf, sind gewisse Eigenschaften und Verhältnisse dieser Grösse. Alles Finden von etwas Unbekanntem beruht daher darauf, dass daran oder in Beziehung dazu gewisse Umstände bekannt sind und combinirt werden können. Das absolut Unbekannte, für welches jegliche Charakteristik fehlte, würde sich nie finden und bestimmen lassen. Man braucht in jedem Fall Bestimmungsmittel, und diese müssen aus den vorwegzunehmenden Eigenschaften und Beziehungen des Unbekannten selbst hergeholt werden.

Offenbar ist es nun zu dem gewöhnlichen Voraussetzen des x, dessen Beschaffenheiten und Beziehungen zur Gleichung verhelfen, nur ein weiterer Schritt, wenn man auch nach Aufstellung der Gleichung und zum rein algebraischen Zweck der Lösung derselben noch specieller jene im alten Sinne des Worts analytische Wendung geltend macht. Man setzt alsdann die Wurzel,

die man sucht, nicht als ein einfaches x, sondern man setzt sie als ein in bestimmter Weise zusammengesetztes x, d. h. als ein Schema von Elementen, die in angebbar werthiger Weise miteinander vereinigt sind. Dies heisst nun offenbar, das Gesuchte in speciellerer Weise wie ein Gegebenes behandeln, als wenn es bei der blossen Setzung eines Zeichens x sein Bewenden hat. Was am unbekannten x zunächst wirklich gegeben ist, liegt nicht in der algebraischen Form, sondern ist der Inbegriff der sachlichen Grössenbeziehungen, der erst noch zur Gleichung führen soll. In unserm Fall dagegen befindet sich schon Alles im Stadium der algebraischen Formulirung, und wenn hier das Gesuchte in jenem Sinne ursprünglicher Analysis wie ein Gegebenes behandelt werden soll, so muss eben die speciellere algebraische Form als Rahmen für das Unbekannte und letzteres eben in diesem Rahmen als das zu Suchende hingestellt werden.

Bei einer sachlichen Aufgabe überhaupt ist das Gesuchte eine Grösse. Angesichts einer Gleichung ist es bereits mehr als das, nämlich eine Wurzel. Wird nun irgend etwas von der im Voraus feststellbaren Gestalt dieser Wurzelform benützt, so heisst dies soviel, als mit einer nicht blos einfach, sondern bereits näher bezeichneten Unbekannten operiren. Auf ähnliche Wendungen wird überhaupt in der gesammten Mathematik jedes Verfahren hinauslaufen, welches wirklich dem Hergang des Auffindens entspricht. Nur die nach dem Auffinden durch Umkehrung des Gedankenganges allzuleicht zu habende Synthese kann den Schein eines andern Zusammenhanges erregen, und mit diesem wird auch in Alledem, was moderne Analysis heisst, also im Felde des abstracten Grössenalgorithmus, oft genug der natürliche Sachverhalt der Auffindung der Wahrheiten verdeckt. Wo es aber auch andere selbständige Wege der Lösungen von vornherein geben konnte, in denen Vorstellungen über die Zusammensetzung des Gesuchten gar keine Rolle zu spielen brauchten, wie beispielsweise im Falle der quadratischen Gleichung, da wird doch hinterher die Einsicht bedeutend vermehrt, wenn man die Folgen der Zusammengesetztheit der Wurzel in allen algebraischen und sachlichen Beziehungen kennen lernt.

Ausserdem ist zunächst grade die quadratische Gleichung der Grundfall, an welchem sich die typischen Züge der neuen Methode nicht nur am leichtesten übersehen lassen, sondern auch für die unmittelbare sachliche Anwendung als fundamental und

praktisch erweisen müssen. Es werde daher zuerst an diesem Beispiel die Werthigkeitsrechnung dargelegt. Offenbar kann ein isolirtes zweiwerthiges Glied nur Wurzel einer reinen Gleichung sein. Es muss daher noch ein einwerthiges hinzukommen, um die Wurzelform zu ergeben. Man wird demgemäss $x = k \pm l$ setzen. Die allgemeine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ verwandelt sich durch Einsetzung von $k \pm l$ für x in $k^2 \pm 2kl + l^2 + pk \pm pl + q = 0$. Hierin müssen nun nach dem früher allgemein bewiesenen Hauptprincip der Werthigkeitsspaltung die einwerthigen Glieder zusammen für sich gleich Null und ebenso die zweiwerthigen zusammen für sich gleich Null sein. Man hat daher die zwei Partialgleichungen $k^2 + l^2 + pk + q = 0$ und $2kl + pl = 0$. Die letztere vereinfacht sich durch Division mit l auf $2k + p = 0$ und liefert demgemäss $k = -\frac{p}{2}$. Durch die Einsetzung dieses Werths von k in die erste Partialgleichung wird diese eine reine, nämlich $l^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$ und liefert das zweiwerthige Element $l = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Mit dieser Lösungsart sind die Wurzelelemente nicht blos dargestellt, sondern auch von vornherein und grundsätzlich in ihrem Werthigkeitsunterschiede charakterisirt. Man weiss dadurch, dass in jeglichem sachlichen Sinne, den die Wurzel $x = k \pm l = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ haben kann, zwei der Eigenschaft nach verschiedene Stücke zu unterscheiden sind, deren Verschiedenheit sich in jeglichem Rechnungszusammenhang bethätigen muss. Jede Function einer solchen Wurzel wird, wie sich beweisen lässt, auch in zwei solche Stücke zerfallen müssen, wovon auch die Fälle des Nullwerdens, wie unsere Gleichung selbst zeigt, keine Ausnahme machen. Die Function eines zweiwerthigen Binoms dieser Art hat demgemäss Eigenschaften, die allgemeiner und wichtiger sind, als die eines imaginären Binoms; denn letzteres ist nur ein specieller Fall der Zweiwerthigkeit. Das Element l ist zweiwerthig, gleichviel ob es durch die besondern Grössenbeziehungen von p und q reell bleibt oder imaginär wird. Es durchläuft beide Stadien, wenn man beispielsweise p constant sein, aber q sich stetig ändern und dabei den Werth $\frac{p^2}{4}$

passiren lässt. Für das eine, wie für das andere Stadium bleibt die Zweiwerthigkeit unverändert bestehen, während bei dem Durchgang von l durch Null ein Uebergang vom Reellen in das Imaginäre oder umgekehrt vom Imaginären in das Reelle statthat.

Handelt es sich um Gleichungen, in denen irgend welche Functionen des fraglichen Binoms figuriren, so hat die Spaltbarkeit in Partialgleichungen nicht etwa erst mit der Imaginarität, sondern ganz allgemein statt, weil sie bereits aus der Zweiwerthigkeit folgt. Ueberhaupt sieht man auch hier recht deutlich, dass man in der Wurzel einer quadratischen Gleichung zwischen dem reellen und dem imaginären Fall in den Buchstabenzeichen und ihrer Verbindung keinen Unterschied vor sich hat. Man muss erst bestimmte Grössen von p und q voraussetzen, ehe sich Reelles von Imaginärem unterscheiden lässt. Algebraisch ist also ein Unterschied nicht blos nicht sichtbar, sondern überhaupt nicht vorhanden. Die Formel für die Wurzel ist gleichgültig dagegen, wie gross p oder q im besondern Falle gesetzt werden mögen. Alle Rechnung mit der Wurzel und ihren Functionen bezieht sich daher auf Reelles und Imaginäres zugleich und hat demgemäss keine besondern Gesetze oder Folgen. Wie schon gesagt, ist das Imaginäre in der Wurzel algebraisch nie vorhanden; wohl aber ist immer das Zweiwerthige sichtbar. An Letzteres hat man sich zu halten, und erst, wenn man Specialbestimmungen über die Grössen von p und q einführt, können sich die drei Möglichkeiten des Reellen, des Imaginären und der indifferenten Null entscheiden.

3. Ist die quadratische Gleichung das einfachste Beispiel, um den Typus der Werthigkeitsoperationen zu veranschaulichen, so ist die Gleichung dritten Grades der erste Anwendungsfall der neuen Rechnung, durch welchen ungeregelte Kunstgriffe überflüssig gemacht werden, die obenein dem Gedächtniss nur willkürlich einzuprägen sind, und für deren dauerndes Haften es daher auch keine Bürgschaft giebt. Ein isolirtes dreiwerthiges Glied, dessen Werthigkeit in den drei Wurzeln der Einheit bestände, würde als Wurzel offenbar nur von einer reinen Gleichung herrühren können. Für eine gemischte ist daher mindestens erforderlich, dass, wie bei einer quadratischen Gleichung, ausserdem noch ein einwerthiges Glied vorhanden sei. Bezeichnen wir die drei dritten Einheitswurzeln, von einer der beiden primitiven ausgehend, mit j, j^2 und j^3, so würde demnach eine mögliche

Wurzelform $k + (j, j^2, j^3)\, l$ sein. Der Kürze wegen wollen wir das erstgesetzte j allgemein als Repräsentanten der übrigen Einheitswurzeln und zwar in der angegebenen Reihenfolge verstehen, so dass wir nur $k + j l$ zu schreiben brauchen und dabei j als ein dreifaches Vorzeichen ansehen, dessen verschiedene Werthe man sich auch übereinander, wie $\pm$, geschichtet denken mag.

Zwei Wurzelelemente können nun aber im Allgemeinen für eine vollständige Gleichung dritten Grades nicht genügen. Die drei Wurzeln, welche nach den allgemeinen Gleichungseigenschaften jede Gleichung dritten Grades haben muss, sind Functionen der drei Coefficienten und demgemäss sind es auch die Wurzelelemente. Denkt man sich dieses Functionsverhältniss umgekehrt, so finden sich die drei Coefficienten durch die Wurzelelemente bestimmt. Hätte man nur zwei Wurzelelemente, so wären die drei Coefficienten Functionen von zwei Grössen. Nimmt man zwei Coefficienten als bereits durch die Wurzelelemente bestimmt heraus, so sind umgekehrt die zwei Wurzelelemente Functionen dieser zwei Coefficienten. Der dritte Coefficient ist Function eben dieser zwei Wurzelelemente, und da diese wiederum Functionen der beiden andern Coefficienten sind, auch Function dieser beiden andern Coefficienten. Letzteres widerspricht aber der Beschaffenheit einer allgemeinen Gleichung, in welcher kein Coefficient von den andern abhängig sein darf, und hiemit ist die Nothwendigkeit eines dritten Wurzelelements erwiesen. Ein viertes wäre aber schon zuviel; denn alsdann blieben die vier Wurzelelemente als Functionen der drei Coefficienten unzureichend bestimmt. Man könnte nach Bestimmung von dreien das überschüssige gleich Null machen, und hiemit ist man wieder auf die Wurzelform mit drei Elementen zurückgewiesen.

Es ist nun noch nachzuweisen, wie das nothwendige dritte Element auch eine Wurzel dritten Grades sein müsse. Höher als dritten Grades kann es nicht sein; denn sonst würde die Wurzelform unausweichlich mehr als drei zusammengehörige Werthgruppen, also für die Gleichung dritten Grades mehr als drei Wurzeln ergeben. Als quadratisch darf man das Element aber auch nicht voraussetzen; denn hiedurch erhielte man aus der Wurzelform sechs selbständige Werthe, von denen sich keiner ausschliessen liesse, und demgemäss sechs Gleichungswurzeln. Um nun die auf drei Elemente, nämlich ein rationales und zwei dritte Wurzeln, festgestellte Wurzelform für die Werthigkeitsrechnung

brauchen zu können, muss noch ermittelt werden, wie sich die drei Werthigkeiten des dritten Elements denen des zweiten in den drei verschiedenen Wurzeln anreihen. Da an sich jede Werthigkeit mit jeder andern combinirt gedacht werden könnte, so ergäbe dies neun Fälle. Von diesen können jedoch nur drei wirklich Gleichungswurzeln dritten Grades sein; denn sonst hätte man wiederum für eine Gleichung dritten Grades mehr als drei Wurzeln. Um nun das Werthigkeitsschema näher festzustellen, hat man von der werthig noch nicht vollständig bestimmten Form $k + j^a l + j^b m$ auszugehen und die Exponenten a und b, welche nur ganze Zahlen sein können, zu ermitteln. Letzteres geschieht dadurch, dass man sich diese unbestimmte Wurzelform für x in die Gleichung eingesetzt denkt, sich die alsdann vorhandene Gleichungsform als werthiges Polynom, d. h. nach Potenzen von j charakterisirt und nun Rückschlüsse auf die zulässigen Werthe von j macht. Da sich jedoch diese strenge Form der Nachweisung für den dritten Grad nicht einfacher gestaltet, als sie im Allgemeinen für den $n$ten Grad ausfällt, so gehört sie in das nächste Capitel, in welchem der allgemeine Schematismus der Wurzelform für jeglichen Grad festgestellt wird. Von daher kann man sich diese Nachweisung übrigens auch für den jetzigen Zusammenhang einfach dadurch specialisiren, dass man statt n überall 3 setzt und demgemäss die weiterreichenden Formeln abkürzt. Nur um Raum zu ersparen, nehmen wir selbst die Einschaltung dieses Specialbeweises hier nicht vor. Sein Ergebniss würde $x = k + jl + j^2 m$ sein, wobei j, und zwar auch in j^2, die drei dritten Einheitswurzeln j, j^2 und j^3, jedesmal in derselben Reihenfolge, repräsentirt. Das erste Element l hat also in den drei Wurzeln nacheinander die drei werthigen Formen jl, $j^2 l$ und $j^3 l$, woneben für das zweite Element m die drei Positionen $j^2 m$, $j^4 m$ und $j^6 m$, d. h. $j^2 m$, jm und $j^3 m$ treten.

Die Reihenfolge, die man zuerst für die Einheitswurzeln wählt, ist gleichgültig. Hat man sie aber bei einer Wurzel $x_1 = k + jl + j^2 m$ einmal gewählt, so versteht es sich schon nach der Regel, dass j hierin für das allgemeine x alle Einheitswurzeln repräsentirt, dass jene Reihenfolge bei der Bildung von x_2 und x_3 in x_1 der Ausgangspunkt bleibe. Ebenso ist zunächst diejenige Reihenfolge, in welcher man das eine j die übrigen Einheitswurzeln repräsentiren lässt, gleichgültig; aber bei dem einen Element einmal gewählt, muss sie für das andere unverändert

festgehalten werden. Das Natürlichste ist, dass wir die Einheitswurzeln, die wir ja in der Werthigkeitsrechnung immer als Potenzen einer primitiven Einheitswurzel gebrauchen, auch nach der Reihenfolge dieser Potenzen ordnen, mag es sich nun um die Ordnung der Werthigkeiten innerhalb der ersten Wurzel oder um die Ordnung der durch dasselbe Zeichen repräsentirten vielwerthigen, vor das erste Element gehörigen Werthigkeiten handeln. Formell halten wir übrigens die Abfolge nach den Potenzen auch in allen übrigen Fällen fest, indem wir hier beispielsweise von j^2m zu j^4m und j^6m als zu den entsprechenden Elementen der Wurzeln x_1, x_2 und x_3 übergehen.

4. Hätten wir uns die Manier der Kunstgriffe gestatten wollen, so wäre die ganze Herleitung der Wurzelform, die wir eben für den dritten Grad vornahmen, überflüssig gewesen. Wir hätten dann unversehens $x = k + jl + j^2m$ gesetzt, diesen Ausdruck nur in den Zeichen erläutert, und dann auf Grund dieser Setzung oder Annahme mit der Werthigkeitsrechnung operirt. Der Erfolg hätte alsdann, wie dies in allen unmotivirten Wendungen und Kunstgriffen der Fall ist, die Annahme durch die blosse Lieferung eines Ergebnisses bestätigt und gerechtfertigt. Eine solche Art und Weise, so üblich sie auch in der Analysis ist, adoptiren, heisst aber soviel, als die Dinge vom Himmel fallen lassen und eine wirkliche Entwicklung schuldig bleiben. In einer guten Darlegung der Wahrheiten muss man Rechenschaft geben, wie man zu Voraussetzungen kommt und Wendungen einschlägt, die sich nicht von selbst verstehen. In Vergleichung mit einer unmotivirten Einführung ist sogar blosse Wahrscheinlichmachung noch etwas Gutes; durch sie tritt wenigstens offen das Hypothetische hervor, und der ganze Inbegriff der Operationen gestaltet sich, ähnlich wie in der Physik, zu einem Versuch, der gelingen oder nicht gelingen kann. Diese Erinnerung war hier nöthig, weil wir uns Angesichts der alten Lösungen der Gleichungen dritten und vierten Grades recht eigentlich der algebraischen Experimentirkunst gegenüber befinden, und weil die geregelte Zusammensetzung der Gedanken, vermöge deren wir einen andern Weg als den der unmotivirten Kunstgriffe gehen können, das Gedächtniss wenig, aber umsomehr den Verstand in Anspruch nimmt.

Auch den Gang, den wir nun bei der Gleichungslösung selbst einschlagen, werden wir, damit er übersichtlicher werde, im Voraus skizziren. Die Function $x^3 + px^2 + qx + r$ muss als Function

von $x = k + jl + j^2 m$, d. h. also als Function eines dreiwerthigen Trinoms, wenn sie durch Einsetzung des letzteren wirklich dargestellt wird, dieselbe werthige Form annehmen, nämlich ein Trinom mit auch drei solchen werthigen Bestandtheilen werden. Sie wird also unter das Schema $K + jL + j^2 M$ fallen, worin jede der Grössen K, L, M eine Function der nicht werthig genommenen Wurzelelemente k, l, m ist. Die allgemeine Gleichung dritten Grades, deren Form eben die Nullsetzung jener Function ist, wird demgemäss in der umgeformten Gestalt $K + jL + j^2 M = 0$ lauten. Nun haben wir in der achten Nummer des vierten Capitels von jedem werthigen Polynom, welches sich gleich Null gesetzt findet, ganz im Allgemeinen bewiesen, dass seine Bestandtheile oder, was dasselbe ist, auch die von den Werthigkeiten abgelösten Factoren einzeln gleich Null sein müssen. Wir erhalten hienach statt der einen Hauptgleichung die Partialgleichungen $K = 0$, $L = 0$ und $M = 0$.

Nachdem wir auf die angegebene Weise die eingesetzte werthige Wurzelform zur Umgestaltung benützt und dabei mit den verschiedenen j wie mit Vorzeichen gleich Plus und Minus nach dem Potenzenalgorithmus der Einheitswurzeln gerechnet haben, erhalten wir $K = k^3 + 6klm + l^3 + m^3 + pk^2 + 2plm + qk + r = 0$, $L = 3k^2 l + 3km^2 + 3l^2 m + 2pkl + pm^2 + ql = 0$ und $M = 3kl^2 + 3k^2 m + 3lm^2 + 2pkm + pl^2 + qm = 0$. Die Gleichungen L und M lassen sich vereinfachen, indem man sie nach p und q ordnet, diese beiden Coefficienten wie Unbekannte behandelt und nach den gewöhnlichen Eliminationsmethoden entwickelt. Man erhält alsdann $p = -3k$ und $q = 3k^2 - 3lm$. Aus der Gleichung für p hat man $k = -\frac{p}{3}$ und setzt man nun dieses in die Gleichung für q, so wird diese $q = \frac{p^2}{3} - 3lm$. Bestimmt man hieraus l oder m, also etwa $m = \frac{1}{l}\left(\frac{p^2}{9} - \frac{q}{3}\right)$, und setzt diesen Ausdruck, sowie den für k in die Gleichung K ein, so erhält man nach Wegschaffung der Brüche $l^6 + \left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right) l^3 + \left(\frac{p^6}{729} - \frac{p^4 q}{81} + \frac{p^2 q^2}{27} - \frac{q^3}{27}\right) = 0$. Diese letztere Gleichung ist nun die Resolvente, indem sie in Beziehung auf l^3 quadratisch ist. Eine weitere Entwicklung ist daher überflüssig.

Nach Bestimmung von l ergiebt sich als bereits dargestellte rationale Function davon auch das andere Wurzelelement m. Man kann aber auch zeigen, dass es die andere Wurzel der Resolvente ist, indem man zu der Gleichung für q zurückgeht, aus dieser l statt m entwickelt und so für die Resolvente genau die vorige Gestalt erhält.

Wir haben absichtlich eine vollständige kubische Gleichung und nicht etwa eine solche ohne zweites Glied zu Grunde gelegt, damit sich die Allgemeinheit unserer Methode, die solcher vorbereitenden Vereinfachungen nicht bedarf, in jeder Beziehung ersehen lasse. Uebrigens gehört die gewöhnliche Wegschaffung des zweiten Gliedes, d. h. die Nullsetzung des ersten Coefficienten, die man für Gleichungen jeglichen Grades vornimmt, auch zur Gattung jener unmotivirten Kunstgriffe, von denen wir vorher gesprochen haben. Nach einer entwickelnden Methode muss es sich ersehen lassen, warum man aus einer Gleichung, die eine Wurzel mit rationalem Element hat, eine solche ohne zweites Glied machen kann, zu der eben diese Wurzel, aber ohne das rationale Element, gehört. Die gewöhnliche Art und Weise besteht bekanntlich darin, willkürlich $x = a + z$ zu setzen, dieses Binom in die Gleichung zu substituiren, dann nach den absteigenden Potenzen von z zu ordnen und schliesslich den Coefficienten des zweiten Gliedes gleich Null zu setzen, was wiederum, ja noch mehr als die Setzung von $x = a + z$, ein willkürlicher und unmotivirter, weil nur zufällig zulässiger Kunstgriff ist. Seine Zulässigkeit beruht nämlich darauf, dass man in jenem Coefficienten thatsächlich über die unbestimmte Grösse a verfügt und diese wirklich linear bestimmen kann. Für uns hat a von vornherein den Sinn von k, ist demgemäss als rational gekennzeichnet und ergiebt sich auch sehr bald von selbst aus der Gleichung für p.

5. Es steht indessen auch nach unserm System noch ein kürzerer Weg offen, sobald wir die allgemeinen Gleichungseigenschaften mitbenutzen, die man vor der Lösung, ja überhaupt unabhängig von der Möglichkeit einer algebraischen Lösung überall kennt. Einige solcher allgemeinen Eigenschaften, wie beispielsweise das Gesetz der Wurzelzahl, haben uns bereits bei Aufstellung der Wurzelform Dienste gethan. Es ist daher keine Inconsequenz, sondern im Gegentheil noch eine entschiedenere Hervorkehrung des Princips systematischer Ableitung aus dem Allgemeinen, wenn wir zur Verkürzung der Lösungsproceduren

auf allgemeine Gleichungseigenschaften der angedeuteten Art zurückgehen. Um in dieser neuen Art zunächst k zu ermitteln, brauchen wir nur den Satz zu Grunde zu legen, dass die negativ genommene Summe der Wurzeln dem ersten Coefficienten gleich sein muss, einen Satz, der sich ja sofort durch die Erzeugung der Gleichung aus ihren vorausgesetzten Wurzelfactoren $(x - x_1)$ $(x - x_2)$ $(x - x_3) = 0$ bei Vergleichung mit der ursprünglichen Form ergiebt. Hienach haben wir also $-(x_1 + x_2 + x_3) = p$, und setzen wir unser werthiges Wurzelschema $x = k + jl + j^2m$ in seinen drei Werthen $x_1 = k + jl + j^2m$, $x_2 = k + j^2l + jm$, $x_3 = k + j^3l + j^3m$ ein, so müssen sich die Formen jedes mehrwerthigen Elements zu Null aufheben, und es ergiebt sich $-3k = p$. Hiemit ist zugleich ersichtlich, dass wenn k in der Wurzel gleich Null gesetzt wird, in einer dieser Wurzel entsprechenden Gleichung auch $p = 0$ werden muss.

Denken wir uns demzufolge $z - \frac{p}{3}$ an die Stelle von x in die Gleichung eingesetzt, so entsteht uns eine neue kubische Gleichung mit der Wurzel z und blos zwei Coefficienten, deren jeder eine Function von p, q, r ist, und die wir mit q_1 und r_1 bezeichnen wollen. Nachdem wir so nach Maassgabe unserer eignen Ableitung, d. h. nach dem Werthigkeitsprincip selbst, eine Gleichung ohne zweites Glied, nämlich $z^3 + q_1 z + r_1 = 0$ hergestellt haben, könnten wir nun deren ebenfalls in der Werthigkeitsform vereinfachte, d. h. nur zweielementige Wurzel $z = jl + j^2m$ einsetzen und analog, wie in der vorigen Nummer, verfahren. Durch die vorgängige Beseitigung von k fänden sich die Operationen erheblich vereinfacht. Man bekäme es zwar zunächst auch mit drei Partialgleichungen zu thun, von denen sich aber zwei als gleichbedeutend erweisen, so dass nur die beiden $l^3 + m^3 + r_1 = 0$ und $3lm + q_1 = 0$ übrig bleiben. Entwickelte man dann aus der letzteren eines der beiden Elemente und setzte es in die erstere ein, so hätte man wiederum die Resolvente.

Jedoch der ganze Weg der Einsetzung ist hier und überhaupt nicht der kürzeste. Wie wir die Gleichung $-(x_1 + x_2 + x_3) = p$ benützt haben, um k zu finden und zu beseitigen, so können wir auch ähnliche Beziehungen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln anstatt der Hauptgleichung zu Grunde legen, um daraus sofort Gleichungen zwischen den Coefficienten und den Wurzelelementen herzustellen. Bei diesem Verfahren ist unsere

Art der Spaltung nicht mehr erforderlich; wohl aber ist es die Berücksichtigung der Mehrwerthigkeit, um im Voraus zu übersehen, welche Glieder als einwerthig allein bestehen bleiben, während sich die mehrwerthigen Glieder oder Gliedergruppen von selbst zu Null aufheben.

Aus der schon erwähnten blossen Multiplication der Gleichungsfactoren erhalten wir bei Vergleichung der so entstehenden mit der ursprünglichen Gleichung die Coefficienten als Functionen der Wurzeln. Da wir nun das abgeänderte Verfahren der Einfachheit wegen nur an der dreigliedrigen Gleichung zeigen wollen, so haben wir $q_1 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ und $r_1 = - z_1 z_2 z_3$. Hierin ist nun die werthige Wurzelform, und zwar unter Hervorkehrung ihrer allgemeinsten Bedeutung, einzusetzen. Wenn man nämlich $z_1 = jl + j^2 m$ schreibt, so repräsentirt hierin j alle seine Werthe in irgend einer beliebig zu wählenden Reihenfolge; es ist also selbst dreiwerthig bestimmbar. Ebenso verhält es sich mit $z_2 = j^2 l + jm$; hier darf jedoch die vorher gewählte Reihenfolge nicht verändert werden. Auf diese Weise gehört zu jedem der drei Werthe von z_1 ein bestimmter entsprechender der drei Werthe von z_2. Es hängt diese Mehrwerthigkeit der Form für eine einzelne Wurzel damit zusammen, dass es im Allgemeinen gleichgültig ist, welche der möglichen Formen man an die erste Stelle setzt, also mit z_1 bezeichnet. Einfacher übersichtlich ist das Verhältniss an der quadratischen Wurzel. Hier kann man davon ausgehen, dass $x_1 = k + l$ die erste, $x_2 = k - l$ die zweite Wurzel sei; man kann aber auch den Ausgangspunkt umkehren, also $x_1 = k - l$ und $x_2 = k + l$ setzen. Um beide Ausgangspunkte zugleich zu umfassen, muss man daher schreiben $x_1 = k \pm l$ und $x_2 = k \mp l$. Eine ähnliche Bewandtniss hat es mit entgegengesetzten Coordinaten, wo man auch gewöhnlich nur $+ x$ und $- x$ einander entgegenstellt, aber der Vollständigkeit wegen auch immer gleich die doppelte Möglichkeit von $\pm x$ und $\mp x$ in Anschlag bringen könnte. Wir haben demgemäss für z_1 und z_2 formelle Dreiwerthigkeiten, die selbstverständlich nicht die Zahl der Wurzeln vermehren, sondern nur deren gegenseitige Vertretbarkeit durcheinander anzeigen. Wenn z_1 ausser seinem unmittelbaren Werth mit noch zwei Werthen figurirt, so heisst dies nur soviel, dass in der betreffenden Function der Wurzeln an Stelle von z_1 auch z_2 oder z_3 stehen können, wenn nur zugleich an Stelle von z_2 oder z_3 auch z_1 gesetzt wird. In den

hier fraglichen Functionen gilt nun zwar die Vertauschbarkeit der Wurzeln ohne Einschränkung. Es gilt aber auch zugleich das Gesetz, dass alle verschiedenen Wurzeln nebeneinander vorkommen müssen. Hiedurch finden sich solche Werthigkeitscombinationen ausgeschlossen, welche in Nebenordnung in derselben Function dieselbe Wurzel wiederholen würden. Diesen erforderlichen Ausschluss bewirken wir nun gleich von vornherein am besten dadurch, dass wir zwischen den primitiven Wurzelformen, welche die ersten beiden Potenzen von j enthalten, und der nichtprimitiven unterscheiden.

Im Hinblick auf diese Unterscheidung hat bei der Einsetzung in die Wurzelausdrücke der Coefficienten jede der beiden primitiven Wurzelformen auch die andere, aber nicht die nichtprimitive, zu repräsentiren. Nach Ausführung der Multiplicationen müssen nun alle hienach zweiwerthig bleibenden Glieder oder Gliedergruppen sich gegenseitig aufheben, und man braucht daher von vornherein nur diejenigen Elementeverbindungen zurückzubehalten, welche unter allen Combinationen der betreffenden Art einwerthig werden müssen. Jene Deduction des Wegfallens von Gliedern aus der Mehrwerthigkeit wäre nicht nöthig gewesen, wenn wir uns mit der blossen Thatsache hätten begnügen wollen. Diese Thatsache besteht nämlich darin, dass wenn man die Wurzelformen für z_1 und z_2, jede als Markirung eines vereinzelt herausgehobenen Werthes, also jedesmal der einen individuellen Wurzel, einsetzt, in den Productensummen sich alle Glieder oder Gliedergruppen gegenseitig zu Null aufheben, die nicht einwerthig werden. Diese Einwerthigkeit lässt sich aber an den Vorzeichen der Elemente, und zwar bereits allein aus der ersten Grundform der Wurzel, voraussehen. Indem wir $z = jl + j^2 m$ haben, wissen wir auch sofort, dass $jl \, . \, j^2 m = lm$ einwerthig ist, und dass es die übrigen Verbindungen zu zweien, nämlich l^2 und m^2 nicht sein können. Ebenso können wir im Voraus wissen, dass aus den Verbindungen zu dreien, die in der Gleichung für r_1 in Frage kommen, nur die dritten Potenzen jedes der beiden Elemente einwerthig werden können. In der That erhalten wir auch, wenn wir durch wirkliches Nachrechnen die Probe machen und die Zahlencoefficienten feststellen, $q_1 = - 3 lm$ und $r_1 = - (l^3 + m^3)$, womit wir wieder die früheren zur Lösung dienenden Ergebnisse vor uns haben.

Anstatt unmittelbar die Ausdrücke der Coefficienten durch

die Wurzeln zu gebrauchen, kann man auch eine äusserste Abkürzung der Rechnung dadurch einführen, dass man statt jener Wurzelfunctionen diejenigen Functionen benützt, die man daraus in Summen der Wurzelpotenzen aufgestellt hat. Unter Voraussetzung von Gleichungen mit weggeschafftem ersten Gliede ist der alsdann als der erste figurirende Coefficient q_1 gleich der negativen halben Summe der Wurzelquadrate und der Coefficient r_1 gleich dem negativen Drittel der Summe der Wurzelkuben. Setzt man nun die Wurzelform in solche Ausdrücke, also in unserm Falle in $q_1 = -\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$ und in $r_1 = -\frac{1}{3}(z_1^3 + z_2^3 + z_3^3)$ ein, so braucht man nur das zurückzubehalten, was in allen drei Potenzen zugleich einwerthig werden muss, und dies sind offenbar diejenigen Combinationen der Elemente, die schon nach Maassgabe der primitiven Wurzelform einwerthig sind. Man hat also nur zuzusehen, was in der Potenz der ersten Wurzel einwerthig werden muss und dies dann dreimal zu nehmen. Für complicirtere Fälle als die des dritten Grades verschafft dies Verfahren eine erhebliche und sehr merkliche Erleichterung.

6. Da sich das einwerthige Element k einer Gleichungswurzel jeglichen Grades nach der von uns angegebenen Art der Ueberlegung, dass sich die werthigen Bestandtheile der Summe aller Wurzeln zu Null aufheben müssen, sofort bestimmt, so gehen wir von nun an von vornherein von Gleichungen aus, in denen die zweithöchste Potenz der Unbekannten durch Verringerung der Wurzel um k bereits weggeschafft ist. Wir haben es alsdann in der Zusammensetzung der Wurzelform nur mit lauter irrationalen Elementen, d. h. mit lauter Mehrwerthigkeiten, zu thun. Um die Bezeichnungsweise möglichst zu vereinfachen, werden wir zwar den Coefficienten p nicht gebrauchen, aber, da Verwechselungen nicht zu besorgen sind, die andern ohne Indices schreiben und die Wurzeln mit x bezeichnen, wie wenn die Gleichung in der fraglichen Gestalt nicht erst herzustellen, sondern unmittelbar gegeben wäre. Wir gehen also für den vierten Grad von der viergliedrigen Form $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ aus und haben, nach alledem, was über die Anzahl der Wurzelelemente bei Gelegenheit des dritten Grades deducirt wurde, die Wurzelform als dreielementig zu setzen. Was die Werthigkeiten anbetrifft, so sind hier die Ausführungen des nächsten Capitels über die allgemeine Wurzelform und über diejenige specielle, die

sich bei Primzahlpotenzen als Gleichungsgraden ergiebt, zu Grunde zu legen. Danach sind zwei Wurzelformen möglich, von denen die eine die allgemeine ist und die Grundgestalt des gewöhnlichen werthigen Polynoms hat, die andere aber aus lauter Quadratwurzeln besteht, vor denen sich die Plus- und Minuszeichen in einfacher Weise combiniren.

Beide Wurzelformen haben ihre Anwendung, da beispielsweise in den Gleichungen fünften Grades und auch in andern Fällen die allgemeinere Form Vorzüge vor der specielleren hat. Hier aber, wo der einzige Zweck die allgemeine Lösung der Gleichung vierten Grades ist und keine andern Rücksichten auf besondere Nebenumstände obwalten, ist die speciellere Form als die am meisten ebenmässige und zugleich auch als diejenige angezeigt, in welcher keine überflüssigen Nebenwerthe der Wurzelelemente die zusammengehörige Gruppirung der letzteren umständlicher machen. Um jedoch die allgemeinere Wurzelform hier nicht unbenützt zu lassen, so ergiebt sich nach dem nächsten Capitel für sie $x = jl + j^2 m + j^3 n$, wo j die vier biquadratischen Einheitswurzeln und zwar am besten in der Ordnung repräsentirt, dass man für j an erster Stelle, also wo x vorzugsweise die Bedeutung von x_1 hat, die eine der beiden primitiven, nämlich $+\sqrt{-1}$ oder $-\sqrt{-1}$ einsetzt. Es ergeben sich alsdann x_2, x_3 und x_4, indem man der Reihenfolge der Potenzen für j nachgeht. Doch diese Nebenfolgen verstehen sich sämmtlich am besten nach Maassgabe der Erläuterungen des allgemeinen Schema, wie sie im nächsten Capitel platzfinden. Hier bemerke man nur, dass das erste und dritte Element vierte Wurzeln bleiben, während das zweite durch die Quadrirung der Vierwerthigkeit zweiwerthig, also eine Quadratwurzel, wird.

Für die Werthigkeitsrechnung bleibt man aber am besten bei den unmittelbar in j ausgedrückten Formen, ohne sie in die Zeichen Plus und Minus zu übersetzen. Die wirkliche Ausführung unserer Methode an diesem Schema unterscheidet sich nicht von derjenigen für den dritten Grad. Am kürzesten verfahren wir, wenn wir hier die Gleichungen zwischen den Coefficienten und den Elementen sofort durch Einsetzungen in die Summen der Wurzelpotenzen bilden. Wir legen demgemäss hiebei die Gleichungen $q = -\frac{1}{2} S(x^2)$, $r = -\frac{1}{3} S(x^3)$ und $s = \frac{1}{8} [S(x^2)]^2 - \frac{1}{4} S(x^4)$ zu Grunde, in denen S bedeutet, dass die in Klammern gesetzte Wurzelpotenz für jede der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4

zu nehmen und in diesen Werthen zu addiren ist. Setzt man nun $x = jl + j^2m + j^3n$ ein, setzt man also darin $x_1 = jl + j^2m + j^3n$, $x_2 = j^2l + j^4m + j^2n$, $x_3 = j^3l + j^2m + jn$ und $x_4 = j^4l + j^4m + j^4n$ und behält nach der oben dargelegten Regel nur diejenigen Elementarcombinationen zurück, die bereits vermöge der in x_1 angegebenen Werthigkeiten einwerthig ausfallen, so erhält man die gewünschten Gleichungen. Diese sind $q = -(4ln + 2m^2)$, $r = -(4l^2m + 4mn^2)$ und $s = -(l^4 + 4lm^2n - 2l^2n^2 - m^4 + n^4)$.

Die Elimination gestaltet sich am leichtesten, wenn man das nur zweiwerthige Element m beibehält. Ob man alsdann zuerst l oder n eliminirt, ist gleichgültig, da sich in beiden Fällen Alles symmetrisch gestaltet. Man entwickle also etwa n aus der Gleichung für q, und setze den so gefundenen Ausdruck in diejenige für r, so wird die letztere in Beziehung auf l^2 quadratisch und liefert daher l in m und hiemit auch n in m; denn für n hatte man bereits in l und m einen Ausdruck, und übrigens ist auch der Symmetrie wegen in der quadratischen Gleichung n^2 die andere Wurzel zur Wurzel l^2. Setzt man nun die in m gefundenen Ausdrücke für l und n in die Gleichung s ein, so fallen, wie sich schon aus der Symmetrie übersehen lässt, die Irrationalitäten fort, und nach Wegschaffung der Brüche ergiebt sich $m^6 + \frac{q}{2}m^4 + \left(\frac{q^2}{16} - \frac{r}{4}\right)m^2 - \frac{r^2}{64} = 0$. Dies ist in Beziehung auf das Element m die Resolvente, da sie für m^2 kubisch, also nach der Regel für die kubischen Gleichungen lösbar ist. Es bestimmen sich nun l und n durch Einsetzung der Werthe für m in die Ausdrücke, die wir bereits für l und n in m hatten. Da m^2 als Wurzel der kubischen Gleichung bereits drei Werthe hat, l^2 und n^2 aber in Beziehung auf m^2 als quadratische Gleichungswurzeln je zwei Werthe haben, so liefert die sich hieraus ergebende Combination für die Quadrate jedes der beiden Elemente sechs Werthe. Da nun l^2 als gemischtes Binom durch die Quadrirung seine Werthzahl nicht ändert, so hat auch l^4 sechs Werthe und demgemäss l selbst vierundzwanzig. Derselbe Grund gilt analog für n, und so haben wir, da nach den vorgesetzten Werthigkeiten der Wurzelform l und n vierte Wurzeln sein sollen, für jedes der beiden Elemente vierundzwanzig Werthe, von denen jedesmal zwölf des einen mit zwölf Werthen des andern zusammenfallen.

Betrachten wir nur die absoluten Werthe, d. h. so, wie sie sich ohne Vorzeichen der Irrationalität aus den Gleichungen ergeben, so sind dies nur je sechs und davon fallen wiederum je drei von l mit je drei von n zusammen. Ebenso hat m von vornherein nur drei absolute Werthe. In die Wurzelform und deren Werthigkeitsrahmen sind demgemäss für jedes Element drei Werthe einsetzbar, die man nach der Art, wie sie sich aus den Werthen von m als zueinander zusammengehörig ergeben haben, einander entsprechend zu combiniren hat. So erhält man unmittelbar drei algebraische Formen jeder Wurzel, die sozusagen von den Ueberwerthen der Elemente herrühren, jedoch in der That nur vier wirklich unterschiedene Wurzeln ergeben. Bei einer Wurzelform, die von vornherein den speciellen Eigenschaften der biquadratischen Gleichungen angepasst ist, wird das absolute Element zwar auch dreiwerthig, wobei aber jedesmal zwei Werthe die der andern beiden Elemente sind, so dass individuell nur ein Werth bestehen bleibt, welcher in die Wurzelform einzusetzen ist. Wenn wir bei der bisher zu Grunde gelegten Wurzelform statt mit solchem einzigen Werth mit drei zu thun bekommen, so ist dies jene Umständlichkeit, die wir oben im Voraus als dieser Wurzelform anhaftend signalisirt haben.

7. Alle hervorgetretenen Belästigungen mit besondern Ueberlegungen bezüglich überschüssiger Werthe der Elemente fallen fort und auch die Rechnung wird von vornherein einfacher, sobald wir von der ebenmässigen Wurzelform mit drei Quadratwurzeln ausgehen. Die Bestimmung dieser Form nach den Grundsätzen des nächsten Capitels zeigt, dass, obwohl wir es unmittelbar nur mit Zweiwerthigkeiten und daher nur mit Plus und Minus zu thun haben, die Sichtbarmachung des Gesetzes der Combination zu Vierwerthigkeiten eine etwas abgeänderte Bezeichnungsweise erfordert. Indem wir nämlich $x = jl + j'm + jj'n$ schreiben, verstehen wir unter j und j' eine quadratische Einheitswurzel, also entweder Plus oder Minus nach beliebiger Auswahl, so dass j' in den Combinationen auch bisweilen dieselbe specielle Werthigkeit wie j repräsentiren wird. Auf diese Weise ist die praktische Hauptsache auch symbolisch ausgedrückt; denn die beiden Werthigkeiten von l und m, d. h. die Zeichen Plus und Minus können beliebig verbunden werden, wodurch sich vier Combinationen ergeben. Die Werthigkeit des dritten Elements ist aber alsdann nicht mehr willkürlich, sondern als

das Product der Vorsetzungen der beiden andern Elemente zu bestimmen. Hienach ergiebt sich $x_1 = -l - m + n$, $x_2 = -l + m - n$, $x_3 = +l - m - n$ und $x_4 = +l + m + n$.

Würden wir das ursprüngliche Verfahren der Spaltung der Hauptgleichung einzuschlagen haben, so wäre zu bemerken, dass die drei verschiedenen Vorsetzungen j, j' und jj' von selbständiger Art sind und es daher mitsichbringen, dass ihre Coefficienten selbständig gleich Null werden. Es lässt sich dies für die neue Form des werthigen Polynoms analog beweisen, wie der Sachverhalt für die gewöhnliche Form in j, j^2, j^3 u. s. w. im vierten Capitel erwiesen worden ist. Jedoch gehen wir hier sofort den kürzeren Weg und bestimmen aus den Summen der Wurzelpotenzen die Ausdrücke der Coefficienten in den Elementen. Hiebei genügt die Regel, das Einwerthige zurückzubehalten, wobei noch besonders darauf zu achten ist, dass jj' zweiwerthig ist, da es immer die verschiedenen Combinationen zugleich repräsentirt. Vor der Rechnung sei noch nebenbei daran erinnert, dass in dieser Wurzelform die Elemente l und n nicht dieselben und auch nicht die Quadrate derjenigen sein können, die wir in der Form mit vierten Wurzeln vor uns hatten. Nur das mittlere Element m ist gemeinschaftlich; wir verzichten jedoch auf die Umständlichkeit, die andern Elemente durch Indices auszuzeichnen, zumal hier alle drei Elemente ebenmässig sind und sich eine derartige Markirung daher nur in der Wurzelform der vorigen Nummer empfehlen würde, sobald sie mit der vorliegenden Normalform in Vergleichung zu bringen wäre.

Die Formeln in den Potenzsummen wurden schon in der vorigen Nummer benützt. Aus $q = -\frac{1}{2} S(x^2)$ ergiebt sich uns die erste Gleichung zwischen Coefficient und Elementen, nämlich $q = -2(l^2 + m^2 + n^2)$. Offenbar konnten unter den binären Verbindungen der werthigen Elemente nur die Quadrate einwerthig ausfallen. Auf entsprechende Weise erhalten wir $r = -8lmn$ und $s = l^4 - 2l^2m^2 - 2l^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4$. Drückt man nun aus der Coefficientengleichung für r irgend eines der Elemente durch die beiden andern, etwa n durch l und m aus und setzt diesen Ausdruck in die Gleichung q ein, so kann man aus dieser l^2 als Wurzel einer Gleichung zweiten Grades bestimmen und damit auch n haben, falls man sich nicht n^2 auf analoge Weise als die andere Wurzel einer ebensolchen Gleichung verschaffen will. Die so in m^2 ausgedrückten Werthe

für l^2 und n^2 sind nun in die Gleichung s zu übertragen, und nach Wegschaffung der Brüche ergiebt sich dann eine Gleichung, die in Beziehung auf m^2 dritten Grades und genau dieselbe Resolvente ist, die wir für das m^2 der andern Wurzelform in der vorigen Nummer gefunden und dort angegeben haben. Hier sei nun bemerkt, dass in Folge der Ebenmässigkeit der jetzt zu Grunde gelegten Wurzelform, welche Elemente man auch zuerst eliminirt hätte, sich für jedes übrigbleibende Element eben diese Resolvente gefunden haben würde. Es sind also l^2, m^2 und n^2 die drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung, die mithin die allgemeine Resolvente für alle drei Elemente ist. Bei dieser individuellen Unterscheidung der Elemente giebt es daher für jedes nur einen absoluten Werth und keine Nebenwerthe, wie im Fall der vorigen Nummer. Die Einsetzung dieses absoluten Werths in den Werthigkeitsrahmen der Wurzelform liefert hienach die vier Wurzeln, ohne dass erst Ueberlegungen über eine Combination mehrfacher Werthe, wie oben, nöthig würden. Auch ist in diesem Falle der ganze algebraische Bau der beiden Wurzelelemente l und n weit einfacher als unter den Voraussetzungen der vorigen Nummer. Während dort unter den vierten Wurzeln noch dreifache Schachtelungen von Irrationalitäten vorkommen, hat man hier nur zweifache, die zusammen nichts Anderes darstellen, als die Elemente einer Gleichungswurzel dritten Grades, d. h. der sogenannten Cardanischen Formel, wie wir diese auch auf unserm Wege in Nummer 4 abgeleitet haben.

Die Behandlung überviergradiger Gleichungen mit Hülfe der an den Wurzelelementen bethätigten Werthigkeitsrechnung kann in gehörig umfassender Weise erst dann statthaben, wenn die Betrachtungen über die Wurzelformen aller Grade vorausgegangen sind. Hier war es genug, zu zeigen, wie das System der Wurzelelemente und der Werthigkeitsrechnung eine rein algebraische Handhabe liefert, nach einer übereinstimmenden Regel die Gleichungen bis zum vierten Grad zu lösen. Ueberdies hat sich bei dieser Lösungsart noch etwas deutlich markirt, was eine Hauptsache bildet, aber sonst wie eine Nebensache zurückzutreten und in den gewöhnlichen Darstellungen sogar im Unbestimmten zu verbleiben pflegt. Es ist nämlich von vornherein entschieden sichtbar geworden, mit welchen Vorzeichen oder Vorsetzungen die Wurzelelemente in jeglicher Wurzel zu combiniren sind. Dieser Umstand ist wichtig; denn der einzige Fall, wo die Combination

beliebig ist und alle Möglichkeiten erschöpft, ist derjenige der quadratischen Gleichungswurzel. In ihr hat das Wurzelelement nicht mehr Werthe als die Wurzel selbst, und das Binom, durch welches die Wurzel ausgedrückt wird, repräsentirt daher mit jedem Werthe, den es an sich algebraisch annehmen kann, auch wirklich eine Gleichungswurzel. Bei allen sonstigen Wurzelpolynomen können die Wurzelgrössen, welche die Elemente sind, nicht selbständig und beliebig mit allen ihren Werthen in Anschlag kommen, sondern es herrscht ein Gesetz der Auswahl und Combination, durch welches die geregelte und gleichsam gebundene Form des werthigen Polynoms, d. h. die Wurzelform, erst bestimmt wird. Wenn man will, kann man den Umstand, dass sich kein Polynom mit ähnlichen Eigenschaften, wie im Fall der quadratischen Gleichung, finden lässt, als eine erste Stufe algebraischer Unmöglichkeiten ansehen. Die algebraischen Unmöglichkeiten, zu denen auch schon von der kubischen Gleichung an das Irreducible gehört, steigern sich mit Ueberschreitung des vierten Grades, so dass von dem fünften Grade an im Allgemeinen bereits die nothwendig transcendente Form der Wurzeln in Frage kommt und die Fälle der nicht blos partiellen, sondern totalen algebraischen Bestimmbarkeit ein engeres Gebiet, ja, gradezu gesagt, die Ausnahme von dem allgemeinen Gesetz der Transcendenz bilden.

Siebentes Capitel.

Vollständiger Schematismus der Wurzelform der Gleichungen aller Grade.

1. Die geschichtliche Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades, sowie vereinzelter lösbarer Fälle von Gleichungen fünften und höheren Grades, hat zu dem Ergebniss geführt, dass die Wurzeln dieser Gleichungen aus einem rationalen Bestandtheil und mehreren Wurzeln zusammengesetzt sind, welche letzteren unter dem Wurzelzeichen Grössen enthalten, die Wurzeln der sogenannten Resolvente, nämlich einer Gleichung sind, die einfacher und bei passender Wahl der Wurzelform niedrigeren

Grades ist als die Ursprungsgleichung. Dadurch, dass man diesen rationalen Wurzelelementen ihre verschiedenen Vorsetzungen beilegte, erhielt man die verschiedenen Wurzelwerthe für die Gleichung; doch musste man schon vom dritten Grade an, wie wir im vorigen Capitel gesehen haben, die Vorsetzungen der verschiedenen Wurzelelemente nach bestimmten Regeln combiniren, weil man sonst zuviele und unrichtige Ausdrücke für die gesuchten Gleichungswurzeln erhalten hätte.

Die Analogie legt nun nahe, anzunehmen, dass die Wurzelform bei den algebraisch lösbaren Gleichungen aller Grade auf diese Weise aus Wurzelelementen zusammengesetzt sei. Dies vorausgesetzt, handelt es sich darum, bei einer gegebenen Gleichung zunächst die Zahl der Wurzelelemente sowie ihren Grad, d. h. den Exponenten des Wurzelzeichens, dann die Signirungen, die man ihnen geben muss, um die verschiedenen Gleichungswurzeln zu erhalten, und schliesslich ihre eigne Einrichtung unter dem Wurzelzeichen zu ermitteln. Es sei hervorgehoben, dass die Beschaffenheit der allgemeinen Wurzelform hiebei als eine solche vorausgesetzt werden soll, dass man die verschiedenen Gleichungswurzeln erhält, indem man vor die Wurzelelemente blos die verschiedenen Einheitswurzeln als Vorzeichen setzt, während der absolute Werth der Wurzelelemente für jede Gleichungswurzel derselbe bleibt. Es giebt nämlich auch gewisse andere, weiter unten zu berührende Formen für die Gleichungswurzeln, bei denen man auch den Elementen zweiter Ordnung, d. h. solchen Wurzelgrössen, die unter dem Wurzelzeichen der Elemente stehen, ihre verschiedenen Werthe geben muss, um die verschiedenen Werthe der Gleichungswurzel herzustellen.

Der Einfachheit wegen soll, wie schon in der 6. Nummer des vorigen Capitels angekündigt wurde, vorausgesetzt werden, dass in der Gleichung, deren Wurzelform untersucht wird, das zweite Glied entfernt worden sei, was bekanntlich dadurch geschieht, dass man für x den Ausdruck $-\frac{p}{n}+x'$ in die gegebene Gleichung $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots+u=0$ einsetzt. Hiedurch erhält man eine neue Gleichung von der Gestalt $x'^n+q'x'^{n-2}+\ldots+u'=0$, wo $q', \ldots, u'$ rationale Functionen von $p, q, \ldots, u$ sind. Alsdann enthält x' nur irrationale Wurzelelemente. Addirt man nämlich alle Wurzeln einer Gleichung, so ist die Summe dem negativ gesetzten ersten Coef-

ficienten gleich; und da dieser rational ist, müssen sich die Irrationalitäten bei der Summirung aufheben; die Summe der rationalen Bestandtheile muss dann für sich gleich Null sein, und da der rationale Bestandtheil in jeder Gleichungswurzel derselbe ist, muss er auch gleich Null sein. Folglich enthält der algebraische Ausdruck der Wurzeln einer Gleichung, in der das zweite Glied fehlt, keine rationale Grösse ausserhalb eines Wurzelzeichens, d. h. keinen einwerthigen Bestandtheil. Bezeichnet man nun die absoluten Werthe der Wurzelelemente mit e_1, e_2, e_3, ... und die zugehörigen Vorsetzungen, welche natürlich keine andern Einheitswurzeln, als dem Grade des Wurzelelements entsprechen, sein dürfen, mit j, j', j'', ..., so haben die Wurzeln der Gleichung $x^n + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \ldots + u = 0$ die Gestalt:

$$x_1 = j_1 e_1 + j'_1 e_2 + j''_1 e_3 + \ldots; \quad x_2 = j_2 e_1 + j'_2 e_2 + j''_2 e_3 + \ldots;$$
$$x_k = j_k e_1 + j'_k e_2 + j''_k e_3 + \ldots; \quad x_n = j_n e_1 + j'_n e_2 + j''_n e_3 + \ldots.$$

Die Zahl der Wurzelelemente e_1, e_2, e_3, ... ist genau gleich dem um 1 verminderten Grad der Gleichung, also gleich $n - 1$. Für den Specialfall $n = 3$ haben wir diesen Satz in der dritten Nummer des vorigen Capitels bewiesen. Die Verallgemeinerung für jeden Werth von n ist nur eine Erweiterung der dortigen Ausführung. Man kann nämlich die Coefficienten der Gleichung als Summen der binären, ternären u. s. w. Combinationen der Gleichungswurzeln und folglich auch durch die Wurzelelemente darstellen. So ergeben sich dann $n - 1$ Gleichungen zwischen den Wurzelelementen. Wäre nun die Anzahl der Wurzelelemente kleiner als $n - 1$, etwa gleich $n - 1 - m$, so würde man diese durch Functionen von $n - 1 - m$ Gleichungscoefficienten ausdrücken können; und da die übrigen m Coefficienten auch Functionen der Wurzelelemente sind, so müssten sie sich durch die ersten $n - 1 - m$ Coefficienten ausdrücken lassen. Die Anzahl der Wurzelelemente ist also nicht kleiner als die Anzahl der von einander unabhängigen Coefficienten; bei einer Gleichung, deren Coefficienten in keiner Beziehung zu einander stehen, ist also die Zahl der Wurzelelemente wenigstens $n - 1$. Grösser kann sie aber auch nicht sein; denn dann hätten die Wurzelelemente keine bestimmten Werthe. Die Gleichungen zwischen den Coefficienten und den Wurzelelementen zeigen nämlich, dass, wenn ebensoviele Wurzelelemente als Coefficienten vorhanden sind, jene durch diese völlig bestimmt werden; ist aber die Anzahl der Wurzelelemente grösser, so hat man sogenannte unbestimmte

Gleichungen vor sich, da die Elemente nur von den Coefficienten abhängen sollen und, wenn die Gleichung algebraisch lösbar ist, algebraische Functionen jener Coefficienten sind. In jenem Fall kann man nun aber sovielen Wurzelelementen, als Coefficienten vorhanden sind, einen besondern Werth beilegen, indem man die übrigen gleich Null setzt; dann sind aber eben nur $n-1$ Elemente vorhanden. Es ist also bewiesen, dass die Anzahl der Wurzelelemente bei einer des zweiten Gliedes entledigten Gleichung dem um eine Einheit verminderten Grad dieser Gleichung genau gleich ist.

Die Vorsetzungen $j_1, j'_1, j''_1, \ldots, j_2, j'_2, j''_2, \ldots, j_3, \ldots$ kann man alle als Potenzen einer und derselben Einheitswurzel J darstellen, deren Grad dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen m aus den Gradzahlen der Wurzelelemente gleich ist. Setzt man daher an Stelle von j_1 J^{α_1}, für j_2 J^{α_2}, für j'_1 $J^{\alpha'_1}$ u. s. w., so hat man $x_k = J^{\alpha k} e_1 + J^{\alpha' k} e_2 + J^{\alpha'' k} e_3 + \ldots$ Hier ist x_k auf die Form eines werthigen Polynoms gebracht, dem jedoch einzelne Glieder fehlen können. Es besteht nun ein allgemeines Gesetz, dass eine algebraische, rationale und ganze Function eines werthigen Polynoms $z = e_0 + j e_1 + j^2 e_2 + j^3 e_3 + \ldots + j^{m-1} e_{m-1}$ wiederum ein werthiges Polynom von derselben Gestalt ist, welches wir mit $Z = E_0 + j E_1 + j^2 E_2 + j^3 E_3 + \ldots + j^{m-1} E_{m-1}$ bezeichnen werden. Hier repräsentirt j, wie immer, alle Einheitswurzeln $m$ten Grades. Setzt man nämlich den Ausdruck für z in die betreffende ganze Function von z ein und ordnet nach Potenzen von j, so kann man die Glieder mit solchen Potenzen von j, deren Exponenten durch m dividirt denselben Rest geben und welche deshalb gleich sind, welchen seiner m Werthe j auch repräsentiren möge, zusammenziehen und erhält so eine Reihe, in der j in keiner höhern als der $(n-1)$ten Potenz vorkommt. Die Coefficienten der Potenzen von j sind natürlich unabhängig von dem jeweiligen Werth von j und hiemit haben wir für Z ein dem für z ähnliches werthiges Polynom. Da nun die linke Seite der Gleichung $x^n + q x^{n-2} + r x^{n-3} + \ldots + u = 0$ eine algebraische, rationale und ganze Function von x ist und jeder Werth von x, wie gezeigt, auf die Form eines werthigen Polynoms gebracht werden kann, so liefert letzterer, in die Gleichung eingesetzt, eine neue Gleichung von der Gestalt $X = 0$, in der X ein werthiges Polynom von der Form $E_0 + J E_1 + J^2 E_2 + J^3 E_3 + \ldots + J^{m-1} E_{m-1}$ ist, wobei E_0,

E_1, E_2, E_3, ..., E_{m-1} ganze Functionen der Wurzelelemente und der Coefficienten der ursprünglichen Gleichung sein müssen, dabei auch den Werth Null haben können.

Wir werden nun zeigen, dass nicht blos dieser eine Werth von $X = 0$ ist, sondern dass es auch alle andern sein müssen, und dass folglich alle verschiedenen Werthe des werthigen Polynoms x_k ebenfalls Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Zu diesem Zweck müssen wir den folgenden Satz beweisen, den wir noch öfter brauchen werden: Wenn ein Werth eines mehrwerthigen Polynoms von der Gestalt $E_0 + jE_1 + j^2E_2 + j^3E_3 + \ldots + j^{m-1}E_{m-1}$, worin j eine primitive $m$te Einheitswurzel bezeichnet, gleich Null ist, so sind alle Werthe dieses Polynoms, die man dadurch erhält, dass man j die verschiedenen $m$ten Einheitswurzeln repräsentiren lässt, auch gleich Null, vorausgesetzt, dass E_1, E_2, E_3, ..., E_{m-1} keine ausziehbaren Wurzeln sind. Wie wir nämlich weiter unten sehen werden, können zwei unreducirbare algebraische Ausdrücke, d. h. zwei algebraische Ausdrücke, die keine ausziehbare Wurzel und keine rational durch die andern ausdrückbare Wurzelgrösse enthalten, einander nicht numerisch gleich sein, wenn einer von ihnen weniger Wurzelgrössen enthält als der andere oder gar rational ist; dieses Gesetz werden wir das der Ungleichheit nennen. Ist nun ein Werth des Polynoms $E_0 + jE_1 + j^2E_2 + j^3E_3 + \ldots + j^{m-1}E_{m-1}$ gleich Null, so muss das erste Glied E_0 der negativen Summe der übrigen gleich sein. Wären nun aber auch alle Grössen E_1, E_2, E_3, ..., E_{m-1} rational durch eine von ihnen ausdrückbar, so bliebe doch diese eine als unausziehbare Wurzel stehen und könnte nicht rational durch E_0 und die unter den Wurzelzeichen stehenden Grössen ausgedrückt werden; denn der Begriff der Unausziehbarkeit widerspricht dem der Rationalität. Nach dem erwähnten Gesetz der Ungleichheit kann auch E_0 dem irrationalen Ausdruck $-(jE_1 + j^2E_2 + j^3E_3 + \ldots + j^{m-1}E_{m-1})$ nicht gleich sein, da letzterer selbst, auf eine unreducirbare Form gebracht, immer noch eine Wurzelgrösse enthielte, welche in E_0 nicht enthalten ist. Da nun der Voraussetzung gemäss E_1, E_2, E_3, ..., E_{m-1} keine ausziehbaren Wurzeln sein sollen und da die fragliche Gleichung ferner, wie eben nachgewiesen, nicht bestehen könnte, falls jene Grössen unausziehbare Wurzeln wären, so bleibt nur der dritte Fall übrig, dass die fraglichen Grössen und folglich auch E_0 gleich Null seien. Dann sind natürlich alle

Werthe des Polynoms $E_0 + jE_1 + j^2E_2 + j^3E_3 + \ldots + j^{m-1}E_{m-1}$ ebenfalls gleich Null, was bewiesen werden sollte.

Es ist nun aber noch zu zeigen, dass in dem gegebenen Falle $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{m-1}$ keine ausziehbaren Wurzeln sein können. Die Elemente $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{m-1}$ können nämlich, da sie werthige Signirungen haben, nur durch Wurzelausziehung entstanden sein, und wir dürfen annehmen, dass diese Wurzeln unausziehbar, d. h. rational nicht ausziehbar sind. Wir sind nämlich nicht genöthigt, eine Wurzelform mit ausziehbaren Wurzeln anzunehmen, da wir eine solche durch Ausziehung der Wurzeln auf eine einfachere Form zurückführen könnten. Der Umstand, dass hiebei die Einheitswurzeln, die als Signirungen vor den Wurzeln stehen, nicht mitreducirt würden, tritt unserm Raisonnement nicht in den Weg, da wir es hier nur mit der Zusammensetzung eines einzigen Wurzelwerths zu thun haben, und die Signirungen vor den Wurzeln nicht von vornherein als Zeichen der Mehrwerthigkeit, sondern nur als constante Coefficienten anzusehen sind. Es sei nun h eine Grösse, die eine unausziehbare $m$te Wurzel aus einer beliebigen rationalen Function von solchen Grössen bezeichnet, wie sie unter den Wurzelzeichen von e_1, e_2, $e_3, \ldots, e_{m-1}$ stehen und in e_0 enthalten sind. Diese Art Grössen kann als relativ einwerthig und rational angesehen werden, so dass h eine $m$werthige Grösse vorstellt. Alsdann sind die Quotienten $\frac{e_1}{h}, \frac{e_2}{h^2}, \frac{e_3}{h^3}, \ldots, \frac{e_{m-1}}{h^{m-1}}$ relativ einwerthig und folglich auch rationale Grössen, da die mehrwerthige Signirung bei der Division wegfällt. Man kann daher das Polynom x auf die Form

$$e_0 + \frac{e_1}{h} Jh + \frac{e_2}{h^2} (Jh)^2 + \frac{e_3}{h^3} (Jh)^3 + \ldots + \frac{e_{m-1}}{h^{m-1}} (Jh)^{m-1}$$

bringen. Setzt man diesen Ausdruck in irgend eine ganze Function X von x ein und ordnet nach Potenzen von Jh, so bleiben die Coefficienten von Jh dieselben, welchen seiner m Werthe J auch vorstellen möge, wie wir oben hinsichtlich der ganzen Functionen werthiger Polynome allgemein bewiesen haben. Wir haben also $X = A_0 + A_1 Jh + A_2 (Jh)^2 + A_3 (Jh)^3 + \ldots + A_{m-1} (Jh)^{m-1}$, wobei die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{m-1}$ relativ einwerthige und rationale Grössen sind. Nun ist z. B. $E_1 = A_1 h$, also $E_1^m = A_1^m h^m$. Die $m$te Wurzel aus $A_1^m h^m$ lässt sich offenbar nicht rational ausziehen; denn wäre dies der Fall, so erhielte man durch Division mit der ebenfalls rationalen

Grösse A_1 einen rationalen Werth für h, was gegen die Voraussetzung ist. Demgemäss lässt sich die $m$te Wurzel aus dem Ausdruck für E_1^m nicht ausziehen, und auf analoge Weise folgt, dass auch E_2, E_3, ..., E_{m-1} unausziehbare Wurzeln sind, was bewiesen werden sollte. Fassen wir nun Alles zusammen, was bisher festgestellt wurde, so ergiebt sich, dass, wenn man einen Ausdruck für x hat, man $m-1$ andere erhält, indem man in diesem Ausdruck der Signirung J ihre verschiedenen andern Werthe ertheilt.

Hieraus folgt nun auch schon, dass m nicht grösser als n sein darf; denn sonst würde eine Gleichung $n$ten Grades mehr als n Wurzeln haben, was nach einem der ersten Hauptsätze der Algebra unmöglich ist. Folglich können die Wurzelelemente, aus denen die Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades zusammengesetzt sind, nur Wurzelgrössen vom $n$ten oder niedrigeren Grade sein. Ist n eine Primzahl, so können sie nur vom $n$ten Grade sein. Es ist nämlich nothwendig, dass die Summe der Vorsetzungen jedes einzelnen Wurzelelements in allen Wurzeln der Gleichung Null sei, da die Summe der Wurzeln Null ist und die Wurzelelemente von einander unabhängig sind; eine Summe von n Einheitswurzeln ist aber, wenn n eine Primzahl ist, nicht gleich Null, wenn die Einheitswurzeln von niedrigerem als $n$tem Grade sind. Folglich ist $m=n$. Nun müssen die Vorsetzungen $j, j', j'', \ldots$ der verschiedenen Wurzelelemente von einander verschieden sein, weil sonst zwei oder mehr Elemente sich in ein einziges zusammenziehen liessen. Hieraus folgt weiter, dass, da die verschiedenen primgradigen Einheitswurzeln als Potenzen einer unter ihnen dargestellt werden können, für die Exponenten $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ einfach die ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n-1$ zu setzen sind. Die Wurzeln einer Gleichung ohne zweites Glied, deren Grad eine Primzahl ist, haben also die Gestalt $x_1 = j e_1 + j^2 e_2 + j^3 e_3 + \ldots + j^{n-1} e_{n-1}$; $x_2 = j^2 e_1 + j^4 e_2 + j^6 e_3 + \ldots + j^{n-2} e_{n-1}$; $x_3 = j^3 e_1 + j^6 e_2 + j^9 e_3 + \ldots + j^{n-3} e_{n-1}$; ... $x_n = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_{n-1}$. Hier bezeichnet j eine primitive $n$te Einheitswurzel.

2. Ist der Grad der Gleichung keine Primzahl, so sind zwei Fälle besonders hervorzuheben, der, in welchem der Grad der Gleichung eine Potenz einer Primzahl und der, in welchem er aus lauter ungleichen Factoren zusammengesetzt ist. Es wird gezeigt werden, dass in letzterm Falle die unter den obigen Vor-

aussetzungen über die Beschaffenheit der Elemente allein mögliche Wurzelform dieselbe ist, wie bei den primgradigen Gleichungen. Die Vorsetzungen vor den Wurzelelementen bilden hienach, wenn man die Ausdrücke der verschiedenen Gleichungswurzeln untereinandersetzt, eine Tabelle aus n Vertical- und $n-1$ Horizontalreihen. Jede zweite Reihe, ob horizontal oder von oben nach unten genommen, enthält die Quadrate derjenigen Grössen, die in der ersten Reihe stehen, jede dritte Reihe die Kuben, jede vierte die Biquadrate u. s. w. Oben in der linken und in der rechten Ecke steht je eine nothwendig primitive Einheitswurzel, während in der untersten Horizontalreihe sich nur positiv reelle Einheiten vorfinden. Die Tabelle würde völlig ebenmässig sein, wenn man rechts in eine Verticalreihe noch die einwerthigen Bestandtheile der Wurzel stellte, falls man eine Gleichung vor sich hätte, in welcher der Coefficient des zweiten Gliedes nicht Null ist. Es sollen jedoch der Kürze wegen hier immer unmittelbar nur solche Gleichungswurzeln untersucht werden, die kein einwerthiges Element enthalten, was selbstverständlich der Allgemeinheit der Schlüsse keinen Eintrag thut.

Es ist zunächst zu zeigen, dass, was m auch sein möge, es doch immer ein Theiler von n sein müsse. Man denke sich eine beliebige ganze rationale Function von x und setze in diese den Ausdruck $J^{\alpha} e_1 + J^{\alpha'} e_2 + J^{\alpha''} e_3 + \ldots$ ein. Dann ist der allgemeinste Ausdruck für jedes Glied der Function $C. J^{a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' + \ldots}$ $e_1^{a} . e_2^{b} . e_3^{c} \ldots.$, wo C ein Coefficient und $a, b, c, \ldots$ Exponenten sind, die von der Gestalt der Function abhängen und, da man eine beliebige Function wählen darf, beliebig gesetzt werden können. Dieses Glied hat im Allgemeinen n Werthe, da die Exponenten α, α', α'', ... soviele haben. Im besondern Fall kann sich die Anzahl der Werthe nur auf einen Bruchtheil von n, etwa auf $\frac{n}{l}$ Werthe reduciren, die sich l mal wiederholen. Da $a, b, c, \ldots$ beliebig gewählt werden können, so müssen die verschiedenen Werthe von α, α', α'', ... so beschaffen sein, dass jede beliebige ganze lineare Function davon $\frac{n}{l}$ Werthe hat, die sich l mal wiederholen, wobei l entweder die Einheit oder ein beliebiger Divisor von n ist. Dies kann nur dann geschehen, wenn J irgend eine $n$te Wurzel der Einheit, also $J^n = 1$ ist. Wenn nun gleichzeitig J eine primitive $m$te Einheitswurzel sein

soll, so muss n ein Vielfaches von m, also m ein Divisor von n sein, was bewiesen werden sollte.

Aus dem soeben hergeleiteten Satze folgt nun, dass wenn der Grad der Gleichung aus lauter ungleichen Primfactoren zusammengesetzt ist, er dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen m der Grade der Wurzelelemente gleich sein muss. Denn die Grade von J^{α}, $J^{\alpha'}$, $J^{\alpha''}, \ldots$ sind, da α, α', $\alpha'', \ldots$ ganze Zahlen sein sollen, jedenfalls nur gleich m oder Divisoren von m; das Product aus Divisoren einer Zahl m wird nun aber entweder die Factoren dieser Zahl mehrfach enthalten oder ihr gleich oder kleiner sein. Da aber n nicht kleiner als m sein kann und denselben Factor immer nur einmal enthält, so bleibt nur noch die Möglichkeit, dass n und m einander gleich sind, d. h. dass die vielwerthigsten Elemente, die in der Wurzelform vorkommen, zugleich die primitivsten Einheitswurzeln $n$ten Grades zu Vorsetzungen haben müssen. Unter dem Grade der Primitivität einer Einheitswurzel verstehen wir hiebei den Exponenten der niedrigsten Potenz, zu der man sie erheben muss, um die positive und reelle Einheit zu erhalten, so dass die primitivsten Einheitswurzeln diejenigen sind, bei denen dieser Exponent am grössten ist. Der grösste Werth, den dieser Exponent haben kann, ist n, so dass denjenigen Einheitswurzeln, die man gewöhnlich schlechthin primitiv nennt, der äusserste Grad der Primitivität zukommt.

Es ist oben gezeigt worden, dass, wenn man in einem Werth für x den Vorsetzungen ihre verschiedenen Werthe giebt, man andere Werthe für x erhält. Wir haben nun eben gesehen, dass in der Wurzelform einer Gleichung, deren Grad n aus lauter ungleichen Primfactoren zusammengesetzt ist (z. B. der Gleichung des sechsten Grades), die Vorsetzungen aller Wurzelelemente Potenzen einer primitiven $\sqrt[n]{1}$ sind; also ist, wenn man $\sqrt[n]{1}$ mit j bezeichnet, $x = j^{\alpha} e_1 + j^{\alpha'} e_2 + j^{\alpha''} e_3 + \ldots$ Man erhält also alle n Werthe für x, indem man j alle seine n Werthe giebt. Die Grössen α, α', $\alpha'', \ldots$ können sämmtlich kleiner als n gemacht werden; ihre Zahl ist $n - 1$; sie müssen übrigens alle von einander verschieden sein; denn wenn mehrere Elemente in allen Gleichungswurzeln gleiche Vorsetzungen hätten, so würden sie sich zu einem zusammenziehen lassen. Ihre Anzahl muss aber, wie oben gezeigt worden, $n - 1$ sein; und da die Zahlen α, α', $\alpha'', \ldots$ nur ganze Werthe zwischen 0 und n annehmen können, so sind ihre $n - 1$ verschiedenen Werthe eben alle ganzen Zahlen von 1 bis $n - 1$.

Man hat also $x = j e_1 + j^2 e_2 + j^3 e_3 + \ldots + j^{n-1} e_{n-1}$. Dies ist dieselbe Wurzelform, wie bei Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist. Man erhält nun die Werthe von $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, indem man in dem eben angegebenen allgemeinen Ausdruck für x an Stelle des allgemeinen j seine verschiedenen Werthe j, j^2, $j^3, \ldots$, 1 substituirt. Das Gesetz der Auswahl und Combination der Einheitswurzeln ist also, wie schon angekündigt, für Gleichungen, deren Gradzahl aus lauter ungleichen Primfactoren zusammengesetzt ist, dasselbe wie für die Wurzelformen primgradiger Gleichungen.

Kehren wir jedoch zu dem allgemeinen Fall zurück. Wenn man in der Wurzelform $J^{\alpha} e_1 + J^{\alpha'} e_2 + J^{\alpha''} e_3 + \ldots + J^{\alpha^{(n-2)}} e_{n-1}$ alle möglichen Combinationen der Elementevorsetzungen bildet, erhält man soviele verschiedene Ausdrücke, als das Product der Grade der Wurzelelemente Einheiten enthält. Die Gleichung hat jedoch nur n Wurzeln; es müssen daher, wie schon gesagt, bestimmte Beziehungen zwischen den Vorsetzungen der verschiedenen Elemente vorhanden sein, wie wir es bei den primgradigen Gleichungen gesehen haben. Diese Beziehungen zwischen den Vorsetzungen können nur darauf beruhen, dass die verschiedenen Werthe der Wurzelelemente von den entsprechenden Werthen anderer Elemente abhängen. Um dies zu untersuchen, ist es der Einfachheit der Darlegung wegen nöthig, die Elemente auf Ausdrücke zurückzuführen, die alle gleich viele Werthe haben. Dazu ist, da die Anzahl der Werthe jedes Wurzelelements entweder m oder ein Theiler von m ist, nur nöthig, aus jedem Wurzelelement, das nicht grade m Werthe hat, eine gewisse Wurzel auszuziehen, die es $m$werthig macht. Die so erhaltenen Grössen mögen, anstatt mit $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}$ bezeichnet zu werden, $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{n-1}$ heissen. Zwischen zweien solcher Grössen, etwa h_1 und h_2, findet nun entweder eine Beziehung statt, die ihre Vorsetzungen von einander abhängig macht, oder es findet keine solche Beziehung statt. Im erstern Falle muss diese Beziehung eine rationale und einwerthige sein; denn wäre sie irrational, so gehörten zu einem Werth von h_1 mehrere Werthe von h_2 oder umgekehrt, was gegen die Voraussetzung ist, dass h_1 und h_2 gleichviele Werthe haben sollen. Im andern Fall sind die Werthigkeiten von h_1 und h_2, also auch die entsprechenden von e_1 und e_2, von einander unabhängig, und man kann daher der Wurzelform soviele Werthe geben, als das Product der Grade von e_1

und e_2 Einheiten enthält. Sind aber h_1 und h_2 rationale Functionen von einander, so kann man der Wurzelform nicht mehr Werthe geben, als der Grad des höhergradigen der beiden Elemente e_1 und e_2 Einheiten enthält.

Untersucht man nun eine dritte Grösse h_3, so ist diese entweder von h_1 oder von h_2 oder von beiden zusammen oder von keiner von beiden abhängig. Für den Fall, dass h_3 eine Function von h_1 und h_2 zusammen ist, muss diese Function natürlich auch eine rationale sein, denn sonst hätte h_3 mehr Werthe als h_1 und h_2, was gegen die Voraussetzung ist. Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen kommt man zu dem Ergebniss, dass man der Wurzelform durch Combination der Vorsetzungen soviele Werthe geben darf, als das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aus m und dem Product der Grade derjenigen Gruppe von Wurzelelementen, in der jedes von jedem andern unabhängig ist, Einheiten enthält. Die Gruppe gegenseitig unabhängiger Wurzelelemente ist indess keine bestimmte, sondern man kann aus der Reihe aller Wurzelelemente allerlei solche Gruppen bilden. Wir werden auch bald sehen, dass es verschiedene Wurzelformen für dieselbe Gleichungswurzel giebt, bei denen die Anzahl der unabhängigen Wurzelelemente verschieden oder nur eins ist. Jedoch wissen wir a priori, dass man hiebei immer nur dieselbe Anzahl möglicher Werthigkeitscombinationen erhalten kann.

3. In der vorigen Nummer ist dargethan worden, dass, wenn der Grad einer Gleichung aus lauter ungleichen Primfactoren zusammengesetzt ist, die unter den gemachten Voraussetzungen einzig zulässige Wurzelform dieselbe ist, wie bei den primgradigen Gleichungen. Es ist indessen nicht wahrscheinlich, dass diese Wurzelform unter allen überhaupt möglichen die einfachste sei. Nach einem von Abel angekündigten Satze über die Lösbarkeitsbedingungen der Gleichungen zusammengesetzten Grades, den wir gegen Ende dieses Capitels beweisen werden, wird z. B. die einfachste Wurzelform für die Gleichung $x^6 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$, soweit diese lösbar ist, aus drei Elementen bestehen, von denen das eine eine Quadratwurzel, die beiden andern Kubikwurzeln sind. Die Ausdrücke aber, die unter den Kubikwurzeln stehen, sind nicht, wie bei der Cardanischen Formel, blos aus einem rationalen Bestandtheil und der Quadratwurzel einer rationalen Grösse zusammengesetzt, deren Werth bei der einen Kubikwurzel positiv, bei der andern negativ wäre, sondern

unter und neben dieser Quadratwurzel müssen auch noch Quadratwurzeln aus rationalen Grössen stehen, deren Werthigkeit von der des zweiwerthigen Elements abhängt. Es ist indessen ausserdem noch der Fall möglich, dass unter der Quadratwurzel des quadratisch irrationalen Elements sich nicht blos ein rationaler Bestandtheil, sondern auch noch zwei Kubikwurzeln nach Art der Cardanischen Formel befinden, deren Werthigkeit durch diejenige der dreiwerthigen Elemente bestimmt wird, die jedoch in diesem Falle nicht complicirter zusammengesetzt sind, als in der Cardanischen Formel.

Beide Arten von Wurzelformen kann man auf die Gestalt $je_1 + j^2e_2 + j^3e_3 + j^4e_4 + j^5e_5$ bringen, wodurch aber die Schachtelung der Wurzeln noch vermehrt wird. Es sei nämlich

$$x = \pm\sqrt{a} + (j, j^2, j^3)\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{a} + \sqrt{d \pm e\sqrt{a}}} + (j^2, j, j^3)$$

$$\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{a} - \sqrt{d \pm e\sqrt{a}}},$$ wo a, b, c, d, e rationale und ganze Functionen der Coefficienten der vorgelegten Gleichung sind. Setzt man nun

$$e_2{}^3 = \frac{1}{8}\left(\sqrt[3]{b + c\sqrt{a} + \sqrt{d + e\sqrt{a}}} + \sqrt[3]{b - c\sqrt{a} + \sqrt{d - e\sqrt{a}}}\right)^3$$

und

$$e_5{}^6 = \frac{1}{64}\left(\sqrt[3]{b - c\sqrt{a} + \sqrt{d - e\sqrt{a}}} - \sqrt[3]{b + c\sqrt{a} + \sqrt{d + e\sqrt{a}}}\right)^6;$$

bezeichnet die analogen Ausdrücke, die man erhält, wenn man $\sqrt{d \pm e\sqrt{a}}$ negativ setzt, mit $e_4{}^3$ und $e_1{}^6$ und setzt $a = e_3{}^2$, so wird $x = je_1 + j^2e_2 + j^3e_3 + j^4e_4 + j^5e_5$. Auf analoge Weise könnte man auch die andere der beiden Abelschen Wurzelformen in die unsrige verwandeln. Es sei noch bemerkt, dass, wenn die erste Form statthat, unser Wurzelelement e_3 die Quadratwurzel aus einer rationalen Grösse ist.

Was nun die Gleichungen anbetrifft, deren Grad mehrere gleiche Primfactoren enthält, so sind mehrere Wurzelformen möglich. Nimmt man, da nichts dem entgegensteht, an, eins der Wurzelelemente sei von demselben Grade wie die Gleichung, so ist aus den oben mitgetheilten Regeln zu ersehen, dass dann die Wurzelform ebenso beschaffen sein muss, wie bei den Gleichungen, deren Grad eine Primzahl oder aus lauter ungleichen Factoren zusammengesetzt ist. Ausserdem sind aber noch, wie sogleich

ausgeführt werden wird, soviele Wurzelformen möglich als der Grad der Gleichung Theiler enthält, welche so beschaffen sind, dass sie selbst alle verschiedenen Primfactoren des Gleichungsgrades enthalten. Hat man z. B. die Gleichung vom 72. Grade, so ist $n = 2^3 . 3^2$ und m kann die Werthe 6, 12, 18, 24, 72 annehmen, so dass es fünf verschiedene Wurzelformen giebt, in denen die primitivsten Wurzelelemente vom 6ten, 12ten, 18ten, 24sten oder 72sten Grade sind. Um es z. B. zu veranstalten, dass kein Wurzelelement mehr als sechswerthig werde, genügt es, zwei sechswerthige und ein zweiwerthiges oder ein sechs-, ein drei- und zwei zweiwerthige oder zwei drei- und drei zweiwerthige als unabhängig zum Ausgangspunkt zu nehmen. Am einfachsten wird immer die Wurzelform, wenn man für jeden Primfactor des Grades der Gleichung ein unabhängiges Wurzelelement, bei der Gleichung 72. Grades also zwei drei- und drei zweiwerthige Wurzelelemente annimmt.

In der vorigen Nummer haben wir gesehen, dass, da nicht die Werthigkeiten aller Wurzelelemente von einander unabhängig sein können, sie als abhängig von den Werthigkeitsvorsetzungen j, j', j'', ... einer gewissen Anzahl unabhängiger unter ihnen angesehen werden müssen. Diese Abhängigkeit hat darin ihren Grund, dass die betreffenden Wurzelelemente Functionen derjenigen Wurzelelemente, deren Werthigkeiten von einander nicht abhängen, und zwar einwerthige und rationale Functionen derselben sind. Man hat nämlich immer unter allen Wurzelelementen die Wahl, von welchen unter ihnen man als unabhängigen ausgehen wolle, um die übrigen zu berechnen, und kann sie demgemäss so wählen, dass das Product ihrer Grade durch m theilbar, also dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aus sich selbst und m, d. h. dem Grade der Gleichung gleich sei. Dann sind auch die andern Wurzelelemente rationale Functionen davon, da ihr Grad ein Divisor des Grades der Gleichung ist. Es ist daher auch die Gleichungswurzel x selbst eine rationale Function der unabhängigen Wurzelelemente. Man setze hienach $x = f\,(j e_1, j' e_2, j'' e_3, \ldots)$. Wäre die Function f eine gebrochene, so könnte man sie, wie jede gebrochene, in eine ganze verwandeln. Die Glieder werden also stets die Vorzeichen j, j', j'', $\ldots, jj', jj'', \ldots, j'j'', \ldots$ j^2, $j'^2, \ldots$ und im Allgemeinen wird das Vorzeichen jedes Gliedes die Form $j^\beta j'^{\beta'} j''^{\beta''} \ldots$. haben, wo β, β', β'', ... positive Zahlen vorstellen, die kleiner

als der Grad der betreffenden Einheitswurzel oder gleich Null sind. Ordnet man nun die Glieder nach ihren Vorsetzungen, so zerfällt der Ausdruck für x in genau n Stücke, von denen eines einwerthig und folglich gleich Null ist; die übrigen sind offenbar als die Wurzelelemente anzusehen.

Bei den Gleichungen, deren Grad die νte Potenz einer Primzahl p ist, hindert nichts, die Wurzelform aus lauter $p$ten Wurzeln zusammenzusetzen. Die Wurzelform für die Gleichung $x^{p^\nu} + qx^{p^\nu - 2} + rx^{p^\nu - 3} + \ldots + u = 0$ ist alsdann $x = j_1 e_1 + j_2 e_2 + j_3 e_3 + \ldots + j_\nu e_\nu + j_1 j_2 e_{\nu+1} + \ldots$ Dadurch, dass man den Vorsetzungen $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_\nu$ alle ihre p Werthe und alle p^ν Combinationen dieser Werthe giebt, erhält man die p^ν Gleichungswurzeln. Ein Beispiel hiezu möge die aus drei Quadratwurzeln bestehende Wurzelform der Gleichung vierten Grades sein. Die Vorsetzungen zweier Wurzelelemente müssen von einander unabhängig sein, damit die Gleichung vier Wurzeln habe; aber das dritte Wurzelelement ist von diesen beiden rational abhängig; denn sonst hätte die Gleichung mehr als vier Wurzeln. Die einzig mögliche Wurzelform ist demgemäss $x = j e_1 + j' e_2 + jj' e_3$, wie sie im sechsten Capitel bei der Auflösung der Gleichung vierten Grades gebraucht worden ist. Nun ist e_3 als Quadratwurzel zweiwerthig und kann folglich nur eine Zweiwerthigkeit als Vorsetzung haben. Alle aus den j und j' zu bildenden Zweiwerthigkeiten sind j, j' und jj'; die beiden ersteren sind für das Element e_3 natürlich ausgeschlossen; es bleibt daher nur jj' als Vorsetzung übrig.

Für eine Gleichung achten Grades ohne zweites Glied ist die Wurzelform $x = j e_1 + j' e_2 + j'' e_3 + jj' e_4 + jj'' e_5 + j'j'' e_6 + jj'j'' e_7$, worin j, j', j'' wiederum drei von einander unabhängige quadratische Einheitswurzeln vorstellen. Bezeichnet man mit j, j' zwei kubische Einheitswurzeln, so ist für die Gleichung neunten Grades ohne zweites Glied $x = j e_1 + j' e_2 + j^2 e_3 + jj' e_4 + j'^2 e_5 + j^2 j' e_6 + jj'^2 e_7 + j^2 j'^2 e_8$. Eine analoge Zusammensetzung hat die Wurzelform für jede andere Gleichung, deren Grad die Potenz einer Primzahl ist.

Was nun die Gleichungen anbetrifft, deren Grad aus verschiedenen Factoren besteht, so sind, infolge freier Wahl hinsichtlich unabhängiger Wurzelelemente, soviel Wurzelformen möglich, als es Arten giebt, den Grad der Gleichung in Factoren zu zerlegen. Diese verschiedenen Wurzelformen sind aber nur dann

mehr als blos durch die Reihenfolge der Elemente von einander verschieden, wenn die kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Grade der unabhängigen Wurzelelemente, also die Grössen m verschieden sind. Die Beschaffenheit dieser verschiedenen Wurzelformen ist schon oben an der Gleichung 72. Grades erläutert worden. Für die Gleichungen, deren Grad die Potenz p^ν einer Primzahl p ist, giebt es, wie aus dem eben Festgestellten hervorgeht, soviel Wurzelformen, als der Exponent ν Einheiten enthält. Die einfachste Wurzelform ist jedoch diejenige, die aus lauter $p$ten Wurzeln besteht. In diesem Fall ist nämlich, wie sich durch eine am Schluss dieses Capitels anzugebende Verfahrungsart zeigen lässt, die Resolvente höchstens vom Grade $p^\nu - 1$.

4. Die in den vorigen Nummern eingeschlagenen Wendungen, in denen bei einzelnen Punkten von Gleichungen niedrigeren Grades her bekannte Analogien maassgebend wurden, enthielten nur insofern etwas Hypothetisches, als vorausgesetzt wurde, dass die Grössen, welche in den Wurzelelementen unter dem Wurzelzeichen stehen, Irrationalitäten niedrigeren Grades seien. Ohne letztere Voraussetzung nämlich bliebe das Raisonnement gegen Ende der ersten Nummer ohne die gehörige Stütze. Dieser hypothetische Charakter einer der Beweisstützen soll nun endgültig beseitigt und zugleich, unter Verfolgung der in dieser Richtung liegenden, aber unvollendet gebliebenen Untersuchungen Abels dargethan werden, dass die von uns vorausgesetzten Wurzelformen in der Natur algebraischer Ausdrücke überhaupt und specieller in der Natur von Gleichungswurzeln begründet sind. Auch werden wir hiebei die Abelschen Untersuchungen ergänzen, da das, was er hinsichtlich der Wurzelform sowie in Beziehung auf die Lösungsbedingungen gefunden hat, ebenso wie bei Galois sich auf die primgradigen Gleichungen beschränkt. Alles, was wir für zusammengesetzte Grade von diesen beiden Mathematikern haben, besteht im günstigsten Fall in unbewiesenen Aussprüchen und Behauptungen bezüglich besonderer Beispiele. Alles dies beschränkt sich darauf, dass gelegentlich in Briefen oder in unvollendeten Bruchstücken geäussert wird, irreducible Gleichungen zusammengesetzter Grade würden nur lösbar sein, wenn sie nach Maassgabe der Factoren des Exponenten zerlegbar wären. Letzteres erläutert sich bestimmter dahin, dass eine Gleichung vom Grade mn nur lösbar sein könne, wenn sie sich

in m Factorengleichungen vom $n$ten Grade zerfällen lasse, deren Coefficienten von einer Gleichung $m$ten Grades abhängen. Hiebei können m und n irgend welche zwei Factoren des Exponenten sein. Nun haben derartige Verlautbarungen oder Vorwegnahmen auch ohne Beweise immerhin Werth; wir aber werden hier die Beweise geben, die bisher Niemand geliefert hat.

Es ist zunächst nöthig, sich zurückzurufen, dass jede einwerthige, algebraische und ganze Function auch rational sein muss. Bekäme man etwa dafür in der Rechnung einen irrationalen Ausdruck, so wäre nur der rationale Bestandtheil desselben zu berücksichtigen; die Irrationalitäten müssten sich aufheben, weil, wie im fünften Capitel gezeigt worden, Mehrwerthigkeiten und Einwerthigkeiten jede für sich in Gleichung stehen müssen. Wenn wir nun solche Grössen, die in den mathematischen Problemen als direct gegeben und von keiner andern Grösse abhängig vorkommen, in den hiehergehörigen Aufgaben also z. B. die Coefficienten der gegebenen Gleichung, deren Wurzeln untersucht werden sollen, Elementargrössen nennen, so ist jede Grösse entweder eine Function von Elementargrössen oder selbst eine Elementargrösse. Alle Grössen, die als gebrochen, mehrwerthig, irrational oder transcendent bezeichnet werden, können keine Elementargrössen sein, da diese Wörter keine Eigenschaften bezeichnen können, die eine Grösse an sich selbst hätte, sondern eine Beziehung zu andern Grössen andeuten. Elementargrössen müssen aber in jedem Problem der reinen und angewandten Mathematik vorkommen; das Gegenstück dazu sind die Operationen, durch welche die andern Grössen aus den Elementargrössen zusammengesetzt werden und die das Wesen der Form jeder Function ausmachen. Man muss also den eben bewiesenen Satz der Genauigkeit wegen so aussprechen: eine algebraische und ganze Function, die der Form nach einwerthig ist, muss deswegen in Beziehung auf ihre Elementargrössen auch rational sein. Ein analoges Gesetz besteht auch für die transcendenten Functionen. Erhielte man nämlich für eine einwerthige ganze transcendente Function einen der Form nach mehrwerthigen Ausdruck, so müssen sich die mehrwerthigen Bestandtheile des letzteren aufheben, da eine Einwerthigkeit nicht zugleich eine Mehrwerthigkeit sein kann.

Mit Hülfe dieser beiden Sätze kann man nun jeder gebrochenen, sei es algebraischen, sei es transcendenten mehr-

werthigen Function eine solche Form geben, dass die Mehrwerthigkeit blos im Zähler vorkommt, während der Nenner einwerthig wird. Man kann nämlich zuerst alle Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen und erhält so einen Quotienten zweier ganzer Functionen, die wir F und f nennen wollen. Bezeichnet man nun mit $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ die verschiedenen Werthe der Function f und multiplicirt dann den Zähler und Nenner von $\frac{F}{f_1}$ mit dem Product $f_2 . f_3 . f_4 \ldots . f_n$, so wird der Nenner zu einer einwerthigen Function und der Zähler enthält nur diejenigen Mehrwerthigkeiten, die auch in f und F vorkommen. Das Product aller Werthe einer mehrwerthigen Grösse ist nämlich immer einwerthig; denn wenn man den Factoren andere Werthe giebt, so vertauschen sie sich nur unter einander und der Werth eines Products ist ja immer von der Reihenfolge der Factoren unabhängig. Ebenso ist jede Function der verschiedenen Werthe einer mehrwerthigen Grösse einwerthig, wenn sie die Eigenschaft hat, dass eine Versetzung dieser verschiedenen Werthe nur die Reihenfolge der Glieder oder Factoren, nicht aber die Form und den numerischen Werth dieser Function ändert. Da nun eine Function von n Grössen, welche die Eigenschaft hat, dass keine der $n!$ Permutationen, die man zwischen diesen Grössen ausführen kann, jemals den numerischen Werth oder auch nur die Form der betreffenden Function ändert, eine symmetrische genannt wird, so kann man den allgemeinen Satz aussprechen, dass jede symmetrische und zugleich den Rechnungsoperationen nach einwerthige Function aller Werthe einer mehrwerthigen Grösse einwerthig sei. Wenn man dagegen alle Werthe einer mehrwerthigen Grösse bis auf einen miteinander multiplicirt, so ist das Product gleich dem Quotienten aus dem einwerthigen Product aller Werthe und diesem einen Werth und hat folglich ebensoviele Werthe, wie dieser eine Werth. Diese Thatsache lässt sich ebenfalls verallgemeinern, so dass man den Satz erhält: eine symmetrische Function von $n - 1$ Werthen einer n werthigen Grösse hat n Werthe. Demgemäss kann man, wie gesagt, eine gebrochene mehrwerthige Function als den Quotienten aus einer ganzen ebensovielwerthigen und einer ganzen einwerthigen darstellen. Der Satz, dass eine einwerthige Function auch von einwerthiger Form sein müsse, gilt also auch für jede gebrochene

einwerthige Function, da eine solche sich hienach als Quotient zweier ganzer einwerthiger Functionen ausdrücken lässt.

Der Vollständigkeit des Zusammenhangs wegen und um für das Weiterfolgende keine Lücke zu lassen, wiederholen wir in dieser und den folgenden Nummern auch den Beweisgang Abels, der wenigstens für primgradige Gleichungen kein Bruchstück geblieben ist, hinsichtlich der zusammengesetztgradigen aber nur bis zu dem von jenem Mathematiker aufgefundenen Exponentengesetz reicht. Wenn ein irrationaler algebraischer Ausdruck Wurzelgrössen enthält, die als rationale Functionen anderer, in demselben algebraischen Ausdruck enthaltener Wurzelgrössen dargestellt werden können, so kann man jene beseitigen, indem man an ihrer Stelle die ihnen entsprechenden Ausdrücke in den andern Wurzelgrössen einsetzt. In der Cardanischen Formel z. B. ist die eine der beiden Kubikwurzeln rational durch die andere ausdrückbar; denn man hat $lm = \frac{p^2}{9} - \frac{q}{3}$ und folglich $m = \frac{p^2 - 3q}{9l}$ oder $l = \frac{p^2 - 3q}{9m}$. Schreibt man aber $x = -\frac{p}{3} + l + \frac{p^2 - 3q}{9l}$, so hat man x auf eine Form gebracht, welche keine Wurzelgrösse mehr enthält, die durch eine rationale Function einer andern ausdrückbar wäre. Bei der Gleichung vierten Grades ist das Product der drei Wurzelelemente l, m, n, wenn wir die aus drei Quadratwurzeln bestehende Form voraussetzen, gleich $\frac{-p^3 + 4pq - 8r}{64}$. Wenn man aber $x = -\frac{p}{4} + l + m + \frac{-p^3 + 4pq - 8r}{64\,lm}$ setzt, so enthält dieser Ausdruck keine Wurzelgrösse mehr, die rational durch eine andere ausgedrückt werden könnte. Wir wollen nun diejenigen Wurzelgrössen eines algebraischen Ausdrucks, die selbst unter einem Wurzelzeichen stehen (also z. B. die Quadratwurzel in der Cardanischen Formel, die Kubik- und die darunter stehenden Quadratwurzeln im Wurzelausdruck der Gleichung vierten Grades), innere, die übrigen dagegen äussere Wurzelgrössen nennen. Wenn eine Wurzelgrösse in einem algebraischen Ausdruck sowohl isolirt als unter einem Wurzelzeichen vorkommen sollte, wollen wir sie ebenfalls eine innere nennen. Diejenigen Werthe, die eine Wurzelgrösse dadurch annimmt, dass man ihr die ver-

schiedenen ihrem Exponenten entsprechenden Einheitswurzeln vorsetzt, sollen die äussern Werthe dieser Wurzel heissen; diejenigen aber, die dadurch entstehen, dass man dem unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdruck, falls derselbe irrational ist, seine verschiedenen Werthe giebt, mögen die innern Werthe dieser Wurzelgrösse heissen. Dementsprechend werden wir auch von den äussern und innern Werthen eines irrationalen algebraischen Ausdrucks zu reden haben. Sodann werden wir jedem irrationalen algebraischen Ausdruck eine solche Form geben, dass er nur Wurzelgrössen mit Primzahlexponenten enthält; denn man kann eine Wurzelgrösse zusammengesetzten Grades durch eine Ineinanderschachtelung von primgradigen Wurzeln, z. B. $\sqrt[6]{a}$ durch $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ oder durch $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ ausdrücken.

Zu diesen, bereits von Abel angegebenen Transformationen eines algebraischen Ausdrucks, welche nothwendig sind, um Schlüsse hinsichtlich des Baues eines solchen algebraischen Ausdrucks zu machen, der Wurzel einer gegebenen rationalen Gleichung sein soll, fügen wir der grössern Bequemlichkeit und Einfachheit wegen noch eine hinzu, welche darin besteht, dass wir auch eventuell alle diejenigen Wurzelgrössen, die sich etwa durch die fünf rationalen Grundoperationen aus den übrigen und deren etwaigen verschiedenen inneren Werthen zusammensetzen lassen sollten, eliminiren, indem wir sie durch die ihnen entsprechenden Functionen ersetzen. Wenn hienach ein algebraischer Ausdruck neben irgend einer Wurzelgrösse auch noch einen oder mehrere andere innere Werthe derselben enthält, so müssen diese als verschiedene selbständige Wurzelgrössen angesehen werden. Dies findet, wie wir sehen werden, bei allen algebraischen Ausdrücken statt, die Wurzeln einer sogenannten irreducibeln Gleichung sind, deren Gradzahl irgend einen Primfactor mehrfach enthält.

5. Wenn ein irrationaler algebraischer Ausdruck, der in jeder Beziehung nach den Ausführungen der vorigen Nummer umgeformt worden, gebrochen ist, so kann man ihn, nach der am Anfange derselben angegebenen Methode für gebrochene Functionen überhaupt, in einen ganzen, d. h. in einen Quotienten aus einem ganzen irrationalen und einem ganzen rationalen Ausdruck, verwandeln. Es ist jedoch nöthig, noch besonders zu zeigen, dass bei diesem Verfahren keine neuen Wurzelgrössen

eingeführt werden, dass die neue Form deshalb auch keine Wurzelgrösse enthalten kann, die rational durch die übrigen und deren innere Werthe ausgedrückt werden könnte. Die Umwandlung wird nämlich, wie oben gezeigt, dadurch bewerkstelligt, dass man zunächst alle Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner f bringt und so den betreffenden gebrochenen algebraischen Ausdruck als den Quotienten $\frac{F}{f}$ zweier ganzer Ausdrücke darstellt. Multiplicirt man alsdann Zähler und Nenner mit dem Product aller andern äussern Werthe des Nenners, so wird hiedurch keine neue Wurzelgrösse oder ein anderer innerer Werth einer solchen eingeführt. Der Nenner des neu gewonnenen Ausdrucks enthält nun keine Wurzelgrösse mehr, die in dem vorigen Ausdruck eine äussere war; denn da das Product aller Werthe einer mehrwerthigen Function einwerthig und f eine durch seine äussern Wurzelgrössen mehrwerthige Function der innern ist, muss das Product aller dieser Werthe eine einwerthige Function der innern Wurzelgrössen sein und enthält folglich die äussern Wurzelgrössen von f nicht mehr. Ist der Nenner rational, so ist damit die Aufgabe gelöst; wo nicht, so kann man dieses Verfahren nun an dem neuen Ausdruck für $\frac{F}{f}$ wiederholen, und es lässt sich dann dieselbe Schlussweise anwenden. Da nun f eine endliche Anzahl Wurzelgrössen enthält, muss man durch Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich zu einem Ausdruck mit rationalem Nenner kommen, dessen Zähler nach den eben gemachten Ausführungen keine neue Wurzelgrösse enthält.

Wir werden einen ganzen algebraischen Ausdruck unreducirbar nennen, wenn er entweder rational ist oder im Falle der Irrationalität keine Wurzelgrösse enthält, deren Exponent eine zusammengesetzte Zahl ist oder die rational durch die andern Wurzelgrössen und die verschiedenen inneren Werthe derselben ausdrückbar wäre, es sei denn, dass sie selbst ein anderer innerer Werth einer in dem betreffenden algebraischen Ausdruck enthaltenen Wurzelgrösse wäre. Wir haben gesehen, dass man jeden algebraischen irrationalen Ausdruck auf eine derartige Form bringen kann; und da die Wurzel einer algebraisch lösbaren Gleichung schon dem Begriff der algebraischen Lösbarkeit gemäss eine algebraische Function ihrer Coefficienten sein und entweder rational sein oder eine endliche Anzahl Wurzelgrössen

enthalten muss, so muss die Wurzel einer algebraisch lösbaren Gleichung durch einen unreducirbaren algebraischen Ausdruck darstellbar sein. Ausserdem sei noch bemerkt, dass, wenn eine Gleichung irrationale Coefficienten hat, und man eliminirt aus jedem Coefficienten alle Wurzelgrössen, die als rationale Functionen der in allen Coefficienten enthaltenen Wurzelgrössen und deren verschiedener innerer Werthe darstellbar sind, und macht ihn ganz, falls er gebrochen ist, so werden wir sagen, dass diese irrationale Gleichung auf die unreducirbare Form gebracht oder dass ihre Coefficienten unreducirbar gemacht worden seien.

Die wichtigsten Eigenthümlichkeiten, welche ein unreducirbarer algebraischer Ausdruck besitzt, sind die, dass erstens die Werthe, die er annimmt, wenn man den darin enthaltenen äussern Wurzelgrössen ihre verschiedenen Werthe ertheilt, sämmtlich von einander numerisch verschieden sind und zweitens, dass kein anderer unreducirbarer algebraischer Ausdruck vorhanden sein kann, welcher aus denselben Wurzelgrössen zusammengesetzt wäre und denselben numerischen Werth hätte; oder mit andern Worten, dass eine algebraische Function nicht zwei oder mehrere Gestalten haben kann, die zugleich unreducirbar wären und aus denselben Wurzelgrössen beständen. Diese Sätze, die zur Feststellung der Wurzelform einer Gleichung nothwendig sind, lassen sich auf folgende Art beweisen. Es sei $F = f(x)$ eine algebraische, rationale und ganze Function der Grösse x, die selbst wieder eine rationale und ganze Function gewisser Elementargrössen, zu denen auch die primgradigen Einheitswurzeln gerechnet werden müssen, und der Wurzelgrössen $w, w', w'', \dots$ ist, von denen keine durch die andern rational ausdrückbar sein möge. Der Ausdruck $x = \varphi(w, w', w'', \dots)$ kann also eine beliebige algebraische Function vorstellen. Nun ist F eine Function von x und folglich auch der Grössen, von denen x selbst Function ist, also auch eine Function von $w, w', w'', \dots$ Wir schreiben daher $F = \psi(w, w', w'', \dots)$.

Es ist klar, dass die Form der Function ψ nicht von den Werthen abhängt, welche die Grössen $w, w', w'', \dots$ haben, wie überhaupt die Form einer Function mit den Werthen ihrer Argumente nichts zu thun hat. Wenn man also x einen andern Werth repräsentiren lässt, indem man einer oder mehreren der Wurzelgrössen $w, w', w'', \dots$ andere Werthe giebt, so erhält man den entsprechenden Werth von $F = f(x)$, indem man in dem Aus-

druck $\psi(w, w', w'', \ldots)$ dieselben Werthänderungen an den Wurzelgrössen vornimmt, wie sie in $\varphi(w, w', w'', \ldots)$ vorgenommen wurden, um den andern Werth von x zu erhalten. Nachdem dies festgestellt ist, ergiebt sich zunächst, dass, wenn ein Werth von $f(x)$ gleich Null ist, es auch alle übrigen sind. Ordnet man nämlich den Ausdruck von $f(x)$ nach den Potenzen einer darin enthaltenen Wurzelgrösse $w = \sqrt[m]{z}$ und setzt ihn gleich Null, so erhält man eine Gleichung in w, von welcher eine Wurzel zugleich Wurzel der Gleichung $w^m - z = 0$ ist, da ja $w = \sqrt[m]{z}$ ist. Jene Gleichung ist vom $(m-1)$ten Grade in w, da eine höhere Potenz von w als eine Potenz von z oder als Product einer Potenz von z mit einer niedrigeren als $m$ten Potenz von w aufzufassen ist. Hieraus schliessen wir, dass die Coefficienten der Gleichung in w, die wir mit $A, B, C, D, \ldots, K$ bezeichnen wollen, alle gleich Null sein müssen. Hat man nämlich $A + Bw + Cw^2 + Dw^3 + \ldots + Kw^{m-1} = 0$, worin $A, B, C, D, \ldots, K$ rationale Functionen von z und den andern Wurzelgrössen sind, so folgt daraus $A = -(Bw + Cw^2 + Dw^3 + \ldots + Kw^{m-1})$. Die linke Seite der Gleichung ist relativ, d. h. in Beziehung auf z und die übrigen Wurzelgrössen, rational; die rechte Seite aber relativ irrational, da w nicht rational durch die in $A, B, C, D, \ldots, K$ enthaltenen Wurzelgrössen ausgedrückt werden kann.

Ein rationaler Ausdruck kann nun offenbar nicht einem irrationalen gleich sein, es sei denn, dass letzterer nur der Form nach irrational und die Wurzeln ausziehbar wären. Um jedoch noch deutlicher zu machen, dass auch durch Combination mehrerer unausziehbarer Wurzeln keine Rationalität entstehen könne, wollen wir den Satz streng beweisen, indem wir zeigen, dass die Gleichung $A + Bw + Cw^2 + Dw^3 + \ldots + Kw^{m-1} = 0$ mit der Gleichung $w^m - z = 0$ keine Wurzel gemeinsam haben könnte, wenn eine der Grössen $A, B, C, D, \ldots, K$ einen von Null verschiedenen Werth hätte. Nach einem Satz der allgemeinen Gleichungstheorie müssen nämlich zwei Gleichungen, die eine oder mehrere Wurzeln gemeinschaftlich haben, einen oder mehrere gemeinschaftliche rationale Divisoren haben, die, gleich Null gesetzt, Gleichungen vorstellen, deren Wurzeln beiden Gleichungen gemeinschaftlich sind. Diesen gemeinschaftlichen rationalen Divisor oder, wenn mehrere vorhanden sind,

denjenigen, der den niedrigsten Grad in w hat, werden wir mit $w^k + aw^{k-1} + bw^{k-2} + \dots + h$ bezeichnen, wo dann die Coefficienten $a, b, \dots, h$ rationale Functionen derjenigen Wurzelgrössen sind, die ausser w in dem Ausdruck von x enthalten sind. Wäre nun $k = 1$, so hätte man $w + a = 0$, woraus $w = -a$ folgt, was nicht möglich ist, da dann w, der Voraussetzung zuwider, rational durch die übrigen Wurzelgrössen ausdrückbar wäre. Es ist also k grösser als 1, und da sämmtliche Wurzeln der Gleichung $w^k + aw^{k-1} + bw^{k-2} + \dots + h$ auch Wurzeln von $w^m - z$ sind, so ist, wenn w_1 eine Wurzel dieser Gleichung bezeichnet, jw_1 eine andere, wenn man mit j einen imaginären Werth von $\sqrt[m]{1}$ bezeichnet. Man hat also auch $j^k w_1{}^k + aj^{k-1} w_1{}^{k-1} + bj^{k-2} w_1{}^{k-2} + \dots + h = 0$. Multiplicirt man die erste Gleichung mit j^k und zieht diese davon ab, so erhält man eine Gleichung in w_1 vom Grade $k - 1$. Diese Gleichung hat die Wurzel w_1 mit der Gleichung $k$ten Grades gemeinschaftlich; beide haben also einen gemeinschaftlichen Divisor, der zugleich gemeinschaftlicher Divisor der ursprünglichen Gleichungen in w ist; dies wäre aber gegen die Voraussetzung, derzufolge die Gleichung $k$ten Grades der niedrigstgradige gemeinsame Divisor jener beiden Gleichungen sein sollte. Es liesse sich noch einwenden, dass die Coefficienten der Gleichung $(k - 1)$ten Grades alle gleich Null sein könnten. Aber der letzte Coefficient dieser Gleichung ist gleich $h(j^k - 1)$; wäre dieser gleich Null, so müsste entweder h oder $j^k - 1$ gleich Null sein. Es kann aber h nicht gleich Null sein; denn dann wäre die Gleichung $w^k + aw^{k-1} + bw^{k-2} + \dots + h = 0$ durch w theilbar und folglich nicht der kleinste Divisor von der Gleichung $A + Bw + Cw^2 + Dw^3 + \dots + Kw^{m-1} = 0$. Sollte aber $j^k - 1 = 0$ sein, so müsste $j^k = 1$ sein, was unmöglich ist, da die Potenz einer von Eins verschiedenen primgradigen Einheitswurzel nicht gleich 1 sein kann, sofern nicht ihr Exponent durch m theilbar ist; k ist aber kleiner als m.

Die Gleichungen $A + Bw + Cw^2 + Dw^3 + \dots + Kw^{m-1} = 0$ und $w^m - z = 0$ haben also keine Wurzel gemeinschaftlich, da eine solche Voraussetzung auf einen Widerspruch führt. Es ist daher $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $\dots$, $K = 0$ und die Gleichung $f(x) = 0$ bleibt demgemäss noch bestehen, wenn man w einen beliebigen seiner m äussern Werthe giebt. Wendet man dieselbe Schluss-

weise auf die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0, \ldots, K = 0$ an, so ergiebt sich, dass man auch jeder andern in $A, B, C, D, \ldots, K$ enthaltenen äussern Wurzelgrösse alle ihre äussern Werthe geben darf, ohne dass die Gleichung $f(x) = 0$ unerfüllt bleibt. Auch die innern Wurzelgrössen können alle ihre Werthe annehmen, da die Coefficienten der äussern Wurzelgrössen, unter denen sie stehen, zu Null werden. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich zu dem angekündigten Satze, dass, wenn ein Werth von $f(x) = 0$ ist, es auch alle übrigen sein müssen. Es besteht hienach ein allgemeines Gesetz, dass, wenn irgend eine Function eines Werthes eines algebraischen Ausdrucks gleich Null ist, dieselbe Function jedes andern Werthes desselben algebraischen Ausdrucks ebenfalls gleich Null sein müsse. Zugleich zeigt sich, dass, wenn eine Gleichung zwischen Wurzelgrössen besteht, von denen keine rational durch die andern ausdrückbar ist, diese Gleichung auch dann noch bestehen bleibt, wenn man den darin enthaltenen äussern Wurzelgrössen ihre verschiedenen Werthe giebt. Aus diesem Gesetze folgt dann auch das Gesetz der Ungleichheit der aus der Mehrwerthigkeit der äussern Wurzelgrössen entstehenden verschiedenen Werthe eines unreducirbaren algebraischen Ausdrucks. Um dies zu beweisen, ist es zunächst nöthig, den schon oben angekündigten Satz zu beweisen, dass, wenn zwei algebraische Ausdrücke numerisch gleich sind, sie auch der Form nach identisch sein müssen, vorausgesetzt, dass sie auf die unreducirbare Form gebracht worden und einer von ihnen keine Wurzelgrösse enthalten soll, die der andere nicht auch enthielte. Die beiden Ausdrücke mögen x und x' heissen und es sei w eine beiden gemeinschaftliche äussere Wurzelgrösse. Man ordne nun beide nach den Potenzen von w, so hat man $x = a + bw + cw^2 + \ldots + hw^{m-1}$ und $x' = a' + b'w + c'w^2 + \ldots + h'w^{m-1}$. Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so erhält man $x - x' = 0 = (a - a') + (b - b')w + (c - c')w^2 + \ldots + (h - h')w^{m-1}$. Da wir vorausgesetzt haben, dass die Ausdrücke x und x' unreducirbar sind, so kann w nicht rational durch die in $a, a', b, b', c, c', \ldots, h, h'$ enthaltenen Wurzelgrössen ausgedrückt werden, woraus dann folgt, dass die Coefficienten der letzteren Gleichung alle einzeln gleich Null sind, so dass man $a = a'$, $b = b'$, $c = c', \ldots, h = h'$ hat. Es ist deshalb nöthig, den Satz auch für die algebraischen Ausdrücke a und a', b und b', c und

c', ..., h und h' zu beweisen; man kann also den Beweis des Satzes für den Fall, dass x und x' m Wurzelgrössen enthalten, auf den Fall, dass sie höchstens $m - 1$ Wurzelgrössen enthalten, zurückführen. Den Fall für algebraische Ausdrücke mit $m - 1$ Wurzelgrössen kann man aber ebenso auf den von $m - 2$ Wurzelgrössen zurückführen und so fortfahren, bis man zu dem Ergebniss kommt, dass zwei numerisch identische, auf die unreducirbare Form gebrachte algebraische Ausdrücke der Form nach identisch sind, sofern dies für Ausdrücke mit 0 Wurzelgrössen, d. h. für rationale Ausdrücke, stattfindet. Die in den beiden Ausdrücken unter den Wurzelzeichen enthaltenen rationalen Ausdrücke müssen nun aber nicht nur numerisch, sondern auch der Form nach identisch sein, weil es sonst die Wurzelgrössen nicht sein könnten; und hiemit ist jener Satz erwiesen, den wir das Gesetz der Gleichheit nennen wollen.

6. Wenn ein Werth eines algebraischen Ausdrucks oder einer mehrwerthigen Gleichung auf die unreducirbare Form gebracht worden ist, so haben natürlich alle Werthe, die derselbe infolge der Mehrwerthigkeit der darin enthaltenen Wurzelgrössen durch die verschiedene Signirung derselben annimmt, die gleiche Eigenschaft. Da nun zwei Werthe von x, die sich nur durch verschiedene Signirung einer oder mehrerer äusserer Wurzelgrössen unterscheiden, aus denselben Wurzelgrössen zusammengesetzt und beide unreducirbar sind, so können sie auch nicht numerisch gleich sein; denn nach dem Gesetz der Gleichheit müssten sie dabei auch der Form nach identisch sein; dies sind sie aber nicht, weil sie verschiedene Einheitswurzeln enthalten. Demnach sind alle verschiedenen Werthe eines algebraischen Ausdrucks, die derselbe infolge der Mehrwerthigkeit seiner äussern Wurzelgrössen anzunehmen vermag, auch numerisch von einander verschieden, welches Gesetz wir kurz als Gesetz der Ungleichheit bezeichnen.

Wir haben oben gezeigt, dass, wenn eine algebraische, rationale und ganze Function eines Werthes eines unreducirbaren algebraischen Ausdrucks gleich Null ist, dieselbe Function jedes andern Werthes desselben algebraischen Ausdrucks auch gleich Null sein müsse. Wenn also ein Werth eines unreducirbaren algebraischen Ausdrucks einer solchen Gleichung, deren Coefficienten entweder die Elementargrössen des algebraischen Ausdrucks oder rationale Functionen der letzteren sind, oder, kurz

gesagt, einer rationalen Gleichung genügt, so thun es alle Werthe dieses algebraischen Ausdrucks gleichfalls. Ist die Gleichung jedoch irrational, so genügen ihr im Allgemeinen nur diejenigen Werthe des algebraischen Ausdrucks, welche aus der Mehrwerthigkeit von Wurzelgrössen entstehen, die nicht in den Coefficienten dieser Gleichung enthalten sind. Ein Seitenstück zu diesen Gesetzen ist jenes, dass, wenn ein keine gleichen Wurzeln aufweisender Werth einer mehrwerthigen, d. h. einer solchen Gleichung, die irrationale Coefficienten hat und deswegen mehrere Gleichungen repräsentirt, Divisor oder Factor einer rationalen Gleichung ist, alle andern Werthe dieser Gleichung es auch sein müssen. Ist nämlich $f(x) = 0$ die rationale Gleichung und $\varphi(x) = 0$ die mehrwerthige, so ist entweder $f(x)$ durch $\varphi(x)$ theilbar oder nicht. Im erstern Falle ist das Gesetz festgestellt; im letztern Falle bleibt ein Rest übrig, von dem jedoch ein Werth gleich Null sein muss, weil wir vorausgesetzt haben, dass $f(x)$ durch einen Werth von $\varphi(x)$ theilbar sei. Der Rest kann deshalb kein x mehr enthalten; denn sonst stellte sein Nullwerth eine Gleichung dar, die niedrigeren Grades als die Gleichung $\varphi(x) = 0$ wäre und alle Wurzeln mit ihr gemeinschaftlich hätte. Letzteres ist aber unmöglich, da der Voraussetzung gemäss $\varphi(x) = 0$ lauter ungleiche Wurzeln hat. Es könnte also der Rest nur ein algebraischer Ausdruck ohne x sein, der jedoch unreducirbar sein müsste, weil die Coefficienten des Divisors $\varphi(x)$ unreducirbar sind und durch die Operation der Division keine neuen Wurzelgrössen eingeführt werden; ist aber ein Werth eines algebraischen Ausdrucks unreducirbar, so sind es alle andern auch und daher kann keiner gleich Null sein. Folglich ist es unmöglich, dass $f(x)$ durch einen Werth von $\varphi(x)$ theilbar sei, wenn es nicht zugleich auch durch alle andern theilbar ist, was wir zu beweisen hatten.

Wenn man eine Anzahl verschiedener Grössen $a, b, c, \ldots$ hat, so kann man daraus immer eine Gleichung bilden, die diese Grössen und keine andern zu ihren Wurzeln hat, indem man das Product $(x - a)(x - b)(x - c) \ldots$ entwickelt und gleich Null setzt. Dieser Gleichung wird dann und nur dann genügt, wenn man x einen der Werthe $a, b, c, \ldots$ giebt, weil nur hiedurch ein Factor des Products und folglich dieses selbst gleich Null wird; wenn aber kein Factor Null ist, so kann es auch das Product nicht sein und folglich hat die Gleichung keine Wurzel weiter, als $a, b, c, \ldots$. Das Product $(x - a)(x - b)(x - c) \ldots$

ist überdies, wie man sieht, eine symmetrische Function von a, $b, c, \ldots$, woraus sich ergiebt, dass, wenn man aus allen Werthen einer mehrwerthigen Grösse eine Gleichung bildet, diese Gleichung einwerthig ist, d. h. einwerthige Coefficienten hat. Folglich ist die Gleichung, die man nach der erwähnten Methode aus allen Werthen eines unreducirbaren algebraischen Ausdrucks bilden kann, rational. Wenn man jedoch nicht aus allen Werthen eines algebraischen Ausdrucks, sondern nur aus denjenigen, die er durch die Mehrwerthigkeit einer äussern Wurzelgrösse oder einer gewissen Anzahl äusserer Wurzelgrössen annimmt, eine Gleichung bildet und diese auf die unreducirbare Form bringt, so enthalten die Coefficienten dieser Gleichung die betreffenden Wurzelgrössen nicht, wohl aber alle übrigen äussern. Denn wenn man die andern Wurzelgrössen als relativ rational ansieht, so ist eine symmetrische Function der Werthe, die der algebraische Ausdruck wegen der Mehrwerthigkeit der erwähnten äussern Wurzelgrössen annimmt, eine symmetrische Function aller Werthe einer Irrationalität, also rational und kann deshalb die betreffenden äussern Wurzelgrössen nicht mehr enthalten. Der Grad dieser Gleichung ist gleich dem Product der Exponenten dieser Wurzelgrössen; ihre Coefficienten müssen deshalb alle andern äussern Wurzelgrössen enthalten. Enthielten sie dieselben nämlich nicht, so müsste die Gleichung mehr Wurzeln haben, als ihr Grad Einheiten enthält, da sie, wie oben gezeigt, alle Werthe des algebraischen Ausdrucks zu Wurzeln hat, die durch Mehrwerthigkeit dieser Wurzelgrösse entstehen, wodurch, da diese verschiedenen Wurzelwerthe sämmtlich von einander verschieden sind, die Anzahl ihrer Wurzeln so oft vervielfacht wird, als der Exponent der betreffenden Wurzelgrösse Einheiten enthält. Durch Hervortreten dieses Widerspruchs ist das fragliche Gesetz indirect bewiesen. Ein Seitenstück hiezu ist das auf analoge Weise nachweisbare Gesetz, dass das Product aller Werthe einer auf die unreducirbare Form gebrachten mehrwerthigen Gleichung, die dieselbe infolge der Mehrwerthigkeit einer gewissen Anzahl der in ihren Coefficienten enthaltenen äussern Wurzelgrössen annimmt, eine Gleichung ist, deren Coefficienten, wenn sie unreducirbar gemacht werden, diese Wurzelgrössen nicht, wohl aber alle andern äussern enthalten.

7. Ehe wir zu der Untersuchung der Beschaffenheit derjenigen algebraischen Ausdrücke übergehen, die Wurzeln ratio-

naler Gleichungen sind, stellen wir alle Sätze, die wir in den beiden vorigen Nummern gewonnen haben, behufs grösserer Uebersichtlichkeit zusammen:

1) Jede symmetrische Function, insbesondere das Product der verschiedenen Werthe einer mehrwerthigen Grösse, ist einwerthig. Da eine mehrwerthige Grösse dadurch entsteht, dass an einer oder mehreren Elementargrössen, die übrigens selbst beschaffen sein können, wie sie wollen, aber relativ als einwerthig angesehen werden müssen, eine Functionsoperation vorgenommen wird, die für einen Werth dieser Grössen mehrere Werthe der functionellen Grösse liefert, so ist jede symmetrische Function aller dieser Werthe eine ihrer Natur nach einwerthige Function der Elementargrössen.

2) Es ist demgemäss jede symmetrische Function der verschiedenen Werthe eines irrationalen algebraischen Ausdrucks eine rationale Function der Elementargrössen dieses Ausdrucks, da jede einwerthige algebraische Function auch rational sein muss.

3) Eine symmetrische Function derjenigen Werthe eines algebraischen Ausdrucks, die man erhält, wenn man einer gewissen Anzahl darin enthaltener äusserer Wurzelgrössen ihre verschiedenen äussern Werthe giebt, während alle übrigen Wurzelgrössen unverändert bleiben, ist eine rationale Function der letzteren. Da nun die Coefficienten einer Gleichung, welche die durch die Mehrwerthigkeit einer gewissen Anzahl äusserer Wurzelgrössen entstehenden Werthe eines algebraischen Ausdrucks zu Wurzeln hat, symmetrische Functionen dieser Werthe sind, so enthalten dieselben die fraglichen Wurzelgrössen nicht. Sie enthalten jedoch alle andern äussern Wurzelgrössen und das Gleiche gilt von der durch Multiplication der verschiedenen äussern Werthe einer mehrwerthigen Gleichung entstehenden Gleichung.

4) Wenn ein Werth eines unreducirbaren algebraischen Ausdrucks einer rationalen Gleichung genügt, so thun dies alle andern Werthe auch. Wenn ferner ein Werth eines unreducirbaren algebraischen Ausdrucks einer irrationalen Gleichung genügt, so thun dies alle Werthe auch, in welchen die Werthe derjenigen Wurzelgrössen unverändert enthalten sind, welche durch die in den Coefficienten der Gleichung enthaltenen Wurzelgrössen rational ausdrückbar sind. Wenn ausserdem eine Gleichung

zwischen Wurzelgrössen besteht, von denen keine rational durch die andern ausgedrückt werden kann, so bleibt diese Gleichung auch noch bestehen, wenn man den darin enthaltenen Wurzelgrössen alle ihre Werthe giebt.

5) Die verschiedenen Werthe eines unreducirbaren algebraischen Ausdrucks, die derselbe infolge der Mehrwerthigkeit der äussern Wurzelgrössen annimmt, sind von einander verschieden.

Nach dieser Zusammenstellung fahren wir zunächst in dem von Abel in seinem nachgelassenen Memoire über die Lösung der algebraischen Gleichungen entwickelten Beweisgange fort. Wenn man aus den verschiedenen Werthen, die ein unreducirbarer algebraischer Ausdruck durch die Verschiedenheit der äussern Werthe einer oder mehrerer äusserer Wurzelgrössen annimmt, eine Gleichung bildet, so ist diese Gleichung eine sogenannte irreducible; d. h. sie besitzt die Eigenschaft, dass jede andere Gleichung, deren Coefficienten aus denselben Wurzelgrössen und Elementargrössen zusammengesetzt wären und welche gleichzeitig eine oder mehrere Wurzeln mit ihr gemeinschaftlich haben soll, von höherem Grade sein und diejenige, die man irreducibel nennt, als Factor enthalten muss. Allgemein nennt man nämlich ein Polynom irreducibel, welches keinen in Beziehung auf die darin vorkommenden Elementargrössen rationalen Divisor hat. Nun kann jene mehrwerthige Gleichung, deren Coefficienten eine gewisse Anzahl Wurzelgrössen nicht enthalten, niemals eine kleinere Gradzahl haben, als das Product der Exponenten aller dieser Wurzelgrössen, weil sie nach den Ausführungen der vorigen Nummer sämmtliche durch die Mehrwerthigkeit dieser Wurzelgrössen entstehenden Werthe von x zu Wurzeln haben und diese überdies sämmtlich von einander verschieden sein müssen. Es lässt also jene mehrwerthige Gleichung alle Werthe von x zu, die durch die Mehrwerthigkeit der fraglichen äussern Wurzelgrössen entstehen. Die Gleichung, die alle diese Werthe zu Wurzeln hat, ist mithin irreducibel.

Ist ein Werth einer mehrwerthigen Gleichung eine irreducible Gleichung, so sind es alle andern natürlich auch. Bildet man nun aus allen äussern Werthen eines unreducirbaren algebraischen Ausdrucks eine Gleichung, so sind alle Werthe derselben irreducibel, und ihre Coefficienten sind entweder rational oder enthalten nur noch solche Wurzelgrössen, die in jenem algebraischen Ausdruck innere sind. Diejenigen Wurzelgrössen aber, welche

in den Coefficienten dieser Gleichung äussere sind, wollen wir mit den äussern des Wurzelausdrucks unter der Bezeichnung Hauptwurzelgrössen zusammenfassen. Multiplicirt man nun alle äussern Werthe dieser mehrwerthigen Gleichung mit einander, so ist die neu gewonnene Gleichung ebenfalls irreducibel und ein Divisor der rationalen Gleichung, von der x abhängt, sofern sie nicht mit dieser identisch ist. Die in ihren Coefficienten enthaltenen äussern Wurzelgrössen werden wir ebenfalls Hauptwurzelgrössen nennen. Es ist klar, dass bei Fortsetzung des Verfahrens alle Wurzelzeichen verschwinden und man schliesslich eine rationale Gleichung erhalten muss, deren Grad dem Product der Exponenten aller Hauptwurzelgrössen gleich ist. Diese rationale Gleichung ist diejenige, die bei dem niedrigsten Grad die Eigenschaft hat, den algebraischen Ausdruck x zur Wurzel zu haben. Es kann keine andere rationale Gleichung geben, die niedrigeren Grades wäre oder bei höherem Grade nicht diese zum Divisor hätte, weil diese eine irreducible sein muss. Hieraus ergiebt sich das schon von Abel bewiesene Gesetz der Exponenten: Der Grad einer irreducibeln Gleichung ist gleich dem Product der Exponenten aller in ihrem Wurzelausdruck enthaltenen Hauptwurzelgrössen.

8. Nachdem wir die Wurzelgrössen eines algebraischen Ausdrucks in Haupt- und Nebenwurzelgrössen gesondert haben, wollen wir zur grössern Bequemlichkeit in der Bezeichnung folgende Ordnung der Hauptwurzelgrössen zu Grunde legen: Die äussern Wurzelgrössen von x mögen die erste Stelle einnehmen und Wurzelgrössen erster Ordnung heissen; die in den Coefficienten der aus allen äussern Werthen von x gebildeten Gleichung enthaltenen äussern Wurzelgrössen seien zur zweiten Ordnung gerechnet; die äussern Wurzelgrössen derjenigen Gleichung, die durch Multiplication aller äussern Werthe dieser mehrwerthigen Gleichung entsteht, seien Wurzelgrössen dritter Ordnung u. s. f. In jeder Ordnung sollen dann wieder die Wurzelgrössen nach der Reihenfolge ihrer Exponenten geordnet werden, so dass diejenige äussere Wurzelgrösse von x, die den grössten Exponenten hat, die erste genannt werde. Eine solche Anordnung macht es möglich, die rationale Gleichung niedrigsten Grades, die einen gegebenen unreducirbaren algebraischen Ausdruck zur Wurzel hat, oder, kürzer gesagt, die Ursprungsgleichung eines irrationalen Ausdrucks aus letzterem durch eine Reihe von mehrwerthigen Zwischengleichungen, deren jede eine Hauptwurzelgrösse weniger

enthält als die vorangehende und welche wir Zerlegungsgleichungen nennen werden, entstehen zu lassen; diese Operation, welche Rückzerlegung genannt werden möge, wird dadurch ausgeführt, dass man aus allen Werthen des algebraischen Ausdrucks, die derselbe durch die Mehrwerthigkeit der ersten Hauptwurzelgrösse annimmt, eine Gleichung bildet, dann aus den Werthen dieser Gleichung, welche dieselbe wegen der Mehrwerthigkeit der zweiten Hauptwurzelgrösse repräsentirt, wiederum eine Gleichung bildet und so fortfährt, bis keine Wurzelgrösse mehr übrig bleibt und man folglich zu der Ursprungsgleichung gelangt ist.

Hieraus sieht man zugleich, auf welche Weise eine Gleichung zusammengesetzten Grades zerlegbar sein müsse, wenn sie einen algebraischen Ausdruck zur Wurzel haben soll. So enthält z. B. der Wurzelausdruck einer algebraisch lösbaren Gleichung sechsten Grades nach dem Gesetz der Exponenten zwei Hauptwurzelgrössen, eine vom zweiten und eine vom dritten Grade. Ist letztere eine äussere, so kann man nach den obigen Ausführungen eine zweiwerthige Gleichung dritten Grades bilden, deren Coefficienten eine Hauptwurzelgrösse und zwar eine zweiten Grades enthalten. Sie sind also Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades, und die Gleichung sechsten Grades zerfällt demnach in diesem Fall in zwei Gleichungen dritten Grades, deren Coefficienten von einer Gleichung zweiten Grades abhängen. Ist dagegen die Wurzelgrösse zweiten Grades eine äussere, so ergiebt sich auf dieselbe Weise, dass die Gleichung in drei Gleichungen zweiten Grades zerlegbar sei, deren Coefficienten von einer Gleichung dritten Grades abhängen. Sind beide Hauptwurzelgrössen äussere, so sind beide Zerlegungsarten möglich, wie dies z. B. bei denjenigen Gleichungen der Fall ist, von denen die Sechstheilung des Winkels oder die Dreizehntheilung des Kreises abhängt, insbesondere auch bei der einfachen binomischen Gleichung $x^6 - 1 = 0$. Auf dieselbe Weise zeigt sich, dass jede algebraisch lösbare Gleichung vom Grade mn, wo m und n zwei beliebige complementäre Factoren des Grades sind, entweder in m Gleichungen n ten Grades oder in n Gleichungen m ten Grades zerfällt, deren Coefficienten von einer Gleichung m ten beziehungsweise n ten Grades abhängen.

Dieses Gesetz erfährt jedoch eine Modification für den Fall, dass der Exponent der Gleichung einen oder mehrere Primfactoren mehrfach enthält. In diesem Fall darf man im Allgemeinen bei

der Zerlegung die Hauptwurzelgrössen mit gleichem Exponenten nicht trennen. Alsdann spielen die Nebenwurzelgrössen eine eigenthümliche Rolle, weil die gleichgradigen Hauptwurzelgrössen nur verschiedene innere Werthe von einander sind. Es ist hiemit jedoch das Problem der Auflösung einer Gleichung zusammengesetzten Grades darauf zurückgeführt, Gleichungen zu lösen, deren Grad eine Primzahl oder die Potenz einer solchen ist. Um nun die Wurzelform für diese Art Gleichungen zu erhalten, ist es zunächst nöthig, den von Abel geführten Beweis des Satzes darzulegen, dass jede Wurzelgrösse, die im algebraischen Ausdruck einer Gleichungswurzel vorkommt, rational durch die verschiedenen Werthe dieser Gleichungswurzeln ausgedrückt werden könne. Ist also $w = \sqrt[m]{z}$ eine äussere oder innere Wurzelgrösse von x, oder ein aus solchen zusammengesetzter Ausdruck oder auch eine rationale Grösse, die unter dem Wurzelzeichen steht, so hat man immer $w = \varphi\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, wenn n den Grad der Gleichung und φ eine rationale Function bezeichnet. Der Ausdruck $\varphi\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ kann ausser den Wurzeln noch Zahlencoefficienten, Einheitswurzeln und andere bekannte Grössen enthalten; die Coefficienten der Gleichung brauchen nicht mit darin enthalten zu sein, da man dieselben ebenfalls durch rationale Wurzelfunctionen ersetzen kann. Eine solche Wurzelfunction kann man ferner, wenn sie gebrochen ist, durch Anwendung der in der vierten Nummer aufgestellten Sätze als Quotient zweier ganzer Wurzelfunctionen, von denen die Nennerfunction symmetrisch ist, darstellen. Alsdann kann man auch voraussetzen, sie sei in Beziehung auf $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ eine ganze Function, enthalte jedoch gebrochene rationale Coefficientenfunctionen; denn es giebt allgemeine Methoden, nach denen man den Werth jeder symmetrischen Function als Function der Coefficienten berechnen kann.

Wir dürfen also voraussetzen, dass jede in dem algebraischen Ausdruck der Wurzel einer Gleichung enthaltene Wurzelgrösse eine ganze und rationale Function der verschiedenen Werthe dieser Gleichungswurzel ist. Der Beweis, den Abel hiefür gegeben hat, ist folgender. Man setze $x = f_0 + f_1 w + f_2 w^2 + f_3 w^3 + \ldots + f_{m-1} w^{m-1}$, wie oben. Alsdann substituire man für w den Ausdruck $\frac{e}{f_1}$, wodurch die Wurzelform die Gestalt $f_0 + e + \frac{f_2}{f_1^{\,2}} e^2 + \frac{f_3}{f_1^{\,3}} e^3 + \ldots + \frac{f_{m-1}}{f_1^{\,m-1}} e^{m-1}$ annimmt. Es seien nun

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ die verschiedenen Werthe für x, die man erhält, wenn man für e $je, j^2 e, j^3 e, \ldots, j^m e$ setzt, wobei j eine primitive $m$te Einheitswurzel bedeutet. Berechnet man nun die Summe $j^{m-1}x_1 + j^{m-2}x_2 + j^{m-3}x_3 + \ldots + x_m$, so findet man dafür e; analog findet man $j^{m-2}x_1 + j^{m-4}x_2 + j^{m-6}x_3 + \ldots + x_m = \frac{f_2}{f_1^2} e^2$ und ebenso die übrigen Glieder des Ausdrucks für x als Functionen der verschiedenen Werthe von x. Erhebt man den Ausdruck für e zur $m$ten Potenz, so findet man e^m als Function der verschiedenen Werthe von x. Ebenso kann man die Werthe von $f_0, \frac{f_2}{f_1^2}, \frac{f_3}{f_1^3}, \ldots, \frac{f_{m-1}}{f_1^{m-1}}$ rational durch $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ ausdrücken. Austatt $\sqrt[m]{z}$ hätte man auch eine andere äussere Wurzelgrösse nehmen können, etwa $\sqrt[m']{z'}$ und hätte dann alle Glieder des Ausdrucks für x ebenfalls durch Functionen der verschiedenen Werthe von x darstellen können, so dass alle im Ausdruck von x vorkommenden äussern Wurzelgrössen diese Eigenschaft besitzen.

Auch die innern Wurzelgrössen können auf diese Weise ausgedrückt werden. Zerlegt man z. B. e^m in derselben Weise wie vorher x in einzelne Glieder, so können diese analog wie oben durch die verschiedenen Werthe von $(j^{m-1}x_1 + j^{m-2}x_2 + j^{m-3}x_3 + \ldots + x_m)^m$ rational ausgedrückt werden und folglich auch durch die verschiedenen Werthe von x. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man schliesslich alle Wurzelgrössen als rationale Functionen der verschiedenen Werthe von x. Diese Functionen kann man alsdann, wenn sie gebrochen sind, auf die in der vorigen Nummer angegebene Weise in ganze verwandeln.

Eine solche Wurzelfunction wird nun durch gewisse Permutationen der Werthe von x geändert. Wird sie durch alle Permutationen der Werthe von x geändert, so hat sie $1.2.3.\ldots n$ Werthe; wenn aber gewisse Permutationen nur die Reihenfolge ihrer Glieder und die Reihenfolge der Factoren in ihren Gliedern ändern, so ist die Anzahl der Werthe, die sie durch die andern Permutationen annimmt, ein Theiler von $1.2.3.\ldots n$. Diese verschiedenen permutativen Werthe entsprechen verschiedenen Werthen der Irrationalität; doch ist die Anzahl der permutativen Werthe einer Wurzelfunction, wie man später sehen wird, im Allgemeinen viel grösser als die Anzahl der Werthe, welche die entsprechende Irrationalität infolge der Mehrwerthigkeit ihrer Wurzeln hat. Wurzelfunctionen, die durch dieselben Permutationen geändert

werden und durch dieselben ungeändert bleiben, und deren permutativ verschiedene Werthe auch numerisch alle verschieden sind, heissen ähnliche Functionen und haben, wie Lagrange entdeckt hat, die Eigenschaft, dass man jeden Werth der einen durch jeden Werth der andern rational ausdrücken kann. Ueberhaupt kann man jeden Werth einer Wurzelfunction rational durch jeden Werth einer andern ausdrücken, vorausgesetzt, dass die erste Function durch keine Permutation geändert werde, welche die letztere nicht ändert, die permutativ verschiedenen Werthe daher auch numerisch von einander verschieden sind und die eine Function nicht eine solche ist, die blos durch Permutation von Werthen von x aus der andern entsteht. Es müssen jedoch immer die Coefficienten der Gleichung bekannt sein, deren Wurzeln die Argumente der fraglichen Functionen sind.

Ein Beispiel von ähnlichen Functionen sind die Wurzelelemente $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}$ der primgradigen Gleichungen. Multiplicirt man die Gleichheiten $x_1 = -\frac{p}{n} + je_1 + j^2e_2 + j^3e_3 + \ldots + j^{n-1}e_{n-1}$, $x_2 = -\frac{p}{n} + j^2e_1 + j^4e_2 + j^6e_3 + \ldots + j^{n-2}e_{n-1}$, $x_3 = -\frac{p}{n} + j^3e_1 + j^6e_2 + j^9e_3 + \ldots + j^{n-3}e_{n-1}$, $\ldots$, $x_n = -\frac{p}{n} + e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_{n-1}$ beziehungsweise mit $j^{n-1}, j^{n-2}, j^{n-3}, \ldots, 1$ und addirt, so erhält man $e_1 = j^{n-1}x_1 + j^{n-2}x_2 + j^{n-3}x_3 + \ldots + x_n$. Analog findet man $e_2 = j^{n-2}x_1 + j^{n-4}x_2 + j^{n-6}x_3 + \ldots + x_n$ u. s. w. Diese Functionen sind in der That ähnlich; da aber durch Einsetzung von j^2 an die Stelle von j aus e_1 e_2, aus e_2 e_4, aus e_4 e_8 u. s. w. entsteht, so ist ersichtlich, dass e_4 dieselbe rationale Function $\vartheta(e_2)$ von e_2 ist, als e_2 selbst von e_1 ist. Man hat also $e_2 = \vartheta(e_1)$, $e_4 = \vartheta(e_2)$, $e_8 = \vartheta(e_4)$ u. s. w. Setzt man analog $e_3 = \vartheta'(e_1)$, so ist $e_9 = \vartheta'(e_3)$, $e_{27} = \vartheta'(e_9)$ u. s. w. Ist nun c eine Zahl, die die Eigenschaft hat, dass die $(n-1)$te Potenz von ihr, durch n dividirt, den Rest 1 lässt, d. h. die sogenannte primitive Wurzel von n, so kann man alle Wurzelelemente in einer solchen Reihenfolge ordnen, dass jedes dieselbe Function des zunächst Vorangehenden wird. Man erhält in diesem Falle alle Wurzelelemente aus e_1, indem man in dem Ausdruck $e_1 = j^{n-1}x_1 + j^{n-2}x_2 + j^{n-3}x_3 + \ldots + x_n$ nacheinander $j^c, j^{c^2}, j^{c^3}, \ldots, j^{c^{n-2}}$ an die

Stelle von j setzt; denn die Potenzen j^c, j^{c^2}, $j^{c^3}, \ldots, j^{c^{n-2}}$ sind alle unter sich und von j verschieden, da nach einem Satze der Zahlentheorie die verschiedenen Potenzen von c und die Reste derselben in Beziehung auf n von einander verschieden sind, wenn c^{n-1} durch n dividirt den Rest 1 lässt und n eine Primzahl ist. Dieselben Eigenschaften haben aber auch die $n$ten Potenzen von $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}$.

Bildet man nun die Gleichung $(y - e_1{}^n)(y - e_2{}^n)(y - e_3{}^n) \ldots (y - e_{n-1}{}^n) = 0$, so ist dieselbe eine sogenannte Abelsche Gleichung; denn so nennt man bereits herkömmlich jede irreducible Gleichung, welche die Eigenschaft hat, dass ihre Wurzeln in einer solchen Reihenfolge aufgestellt werden können, dass jede folgende dieselbe Function der unmittelbar vorangehenden und die erste eine ebensolche Function der letzten wird. Eine Abelsche Gleichung hat die Eigenschaft, dass in dem Ausdruck ihrer Wurzeln nur Hauptwurzelgrössen, aber keine Nebenwurzelgrössen enthalten sind. Wir werden später zeigen, dass jene Gleichung, deren Wurzeln $e_1{}^n, e_2{}^n, e_3{}^n, \ldots, e_{n-1}{}^n$ sind, eine Gleichung $(n-1)$ten Grades mit rationalen Coefficienten ist; und da sie zugleich eine Abelsche Gleichung ist, so enthält ihr Wurzelausdruck nur solche Wurzelgrössen, deren Exponenten Factoren von $n - 1$ sind. Man kann nun der Wurzel einer Abelschen Gleichung $(n-1)$ten Grades stets die Form $\iota l_1 + \iota^2 l_2 + \iota^3 l_3 + \ldots + \iota^{n-1} l_{n-1}$ geben, wo ι eine $(n-1)$te Einheitswurzel bezeichnet und $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{n-1}$ Wurzeln aus rationalen Grössen sind. So ergiebt sich z. B., dass die Wurzel einer irreducibeln Gleichung fünften Grades aus vier fünften Wurzeln besteht, unter deren jeder eine rationale Grösse, eine Quadratwurzel und zwei vierte Wurzeln aus rationalen Grössen stehen. Bei allen primgradigen Gleichungen sind also die Wurzelelemente zweiter Ordnung Wurzeln aus rationalen Grössen. Stellt man diese rationalen Grössen nach der oben angegebenen Methode als Functionen der verschiedenen Gleichungswurzeln dar, so haben diese Functionen die Eigenschaft, dass sie durch alle möglichen Permutationen der Gleichungswurzeln nur $(n-2)!$ verschiedene Formen annehmen, die man schon erhält, wenn man blos $n - 2$ Wurzeln unter einander permutirt, während andererseits jede Permutation, die nicht zwei Wurzeln zugleich an ihrer Stelle lässt, die Form dieser Functionen nicht verändert. Auf diese kritischen Functionen werden wir im

neunten Capitel zurückkommen und bemerken hier nur, dass, da zwei ähnliche Functionen von Gleichungswurzeln rational durch einander und die Coefficienten der Gleichung ausdrückbar sind, jede Function der Wurzeln einer primgradigen irreducibeln lösbaren Gleichung, welche durch alle Permutationen, die niemals zwei Wurzeln an ihrer Stelle lassen, nicht geändert wird, rational durch die Coefficienten ausdrückbar sein muss. Dieser Satz, sowie seine Umkehrung ist von Galois direct bewiesen und zur Grundlage seiner Forschungen gemacht worden. Wir werden jedoch hier den Abelschen Beweisgang wiederholen, bei dem der Hauptzweck, nämlich die Beschaffenheit der Wurzelelemente, unmittelbar erreicht wird.

9. Wenn man in dem Ausdruck $f_0 + f_1 \sqrt[n]{z} + f_2 (\sqrt[n]{z})^2 + f_3 (\sqrt[n]{z})^3 + \ldots + f_{n-1} (\sqrt[n]{z})^{n-1}$ einer andern Wurzelgrösse als $\sqrt[n]{z}$ einen andern Werth giebt, so verwandeln sich dadurch die Werthe von $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-1}$ sowie von z in andere, die wir mit $f'_1, f'_2, f'_3, \ldots, f'_{n-1}$ und z' bezeichnen werden. Die n Werthe, die der so veränderte Ausdruck durch die verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{z'}$ annimmt, müssen jedoch auch die n Wurzeln der gegebenen Gleichung sein. Man erhält dann $x_1 = \varphi(f', z', n, \alpha_1)$, $x_2 = \varphi(f', z', n, \alpha_2)$, $x_3 = \varphi(f', z', n, \alpha_3)$, $\ldots$, $x_n = \varphi(f', z', n, \alpha_n)$, wenn man mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ die von einander verschiedenen Exponenten der zu den verschiedenen Werthen von x gehörigen Einheitswurzeln bezeichnet.

Da nun alle in dem Wurzelausdruck enthaltenen Wurzelgrössen als rationale Functionen der Gleichungswurzeln ausgedrückt werden können, diese aber wieder rationale Functionen von $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-1}$ und einem Werthe von w sein müssen, so hat man $w' = \varphi(f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-1}, w)$. Erhebt man nun diese Gleichung zur $n$ten Potenz, so hat man, wenn man nach Potenzen von w ordnet, $z' = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \ldots + a_{n-1} w^{n-1}$. Hieraus folgt $z' = a_0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $\ldots$, $a_{n1-} = 0$. In der Gleichung $\sqrt[n]{z'} = \varphi(w)$ kann man also w alle seine n Werthe geben; die entsprechenden Werthe von w' sollen die Vorzeichen $j^{\alpha_1}, j^{\alpha_2}, j^{\alpha_3}, \ldots, j^n$ haben. Man hat also beispielsweise $w' = h_0 + h_1 w + h_2 w^2 + h_3 w^3 + \ldots + h_{n-1} w^{n-1}$ und zugleich $j^{\alpha_1} w' = h_0 + h_1 j w + h_2 j^2 w^2 + h_3 j^3 w^3 + \ldots +$

$h_{n-1} j^{n-1} w_{n-1}$. Multiplicirt man die erste Gleichung mit j^{α_1} und zieht sie von der zweiten ab, so erhält man $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{\alpha_1-1}, h_{\alpha_1+1}, \ldots, h_{n-1} = 0$, also $w' = h_{\alpha_1} w^{\alpha_1}$. Nun ist $f'_0 + f'_1 w' + f'_2 w'^2 + f'_3 w'^3 + \ldots + f'_{n-1} w'^{n-1} = f_0 + f_1 w + f_2 w^2 + f_3 w^3 + \ldots + f_{n-1} w^{n-1}$, woraus folgt $f'_1 w' = f_{\alpha_1} w^{\alpha_1}$. Hieraus folgt weiter, dass die verschiedenen Glieder von x die verschiedenen Werthe von $f_1 w$ sind und dieses höchstens $n - 1$ innere Werthe hat. Hiemit findet sich die in der ersten Nummer vorausgesetzte Wurzelform bestätigt, indem sich zeigt, dass sie die einfachste und natürlichste ist, die man überhaupt bei algebraisch lösbaren Gleichungen voraussetzen kann. Ausserdem zeigt sich, dass die $n$ten Potenzen der Wurzelelemente, wie schon angekündigt, Wurzeln einer Gleichung $(n - 1)$ten Grades sind. Was nun die Gleichungen anbetrifft, deren Grad die νte Potenz einer Primzahl p ist, so könnte man auf ähnliche Weise zeigen, dass die einfachste Wurzelform im Falle der Lösbarkeit die in der dritten Nummer hergeleitete sein muss, dass die Wurzelelemente lauter $p$te Wurzeln sind und alle durch ν von ihnen rational ausdrückbar sein müssen, sowie dass ihre $p$ten Potenzen Wurzeln einer lösbaren Gleichung sind, die höchstens vom $(p^\nu - 1)$ten Grade sein kann. Da diese Sätze aber schon aus den Ausführungen der dritten Nummer folgen, so verzichten wir auf die Herleitung derselben, welche derjenigen für primgradige Gleichungen ganz analog ist.

Hiemit haben wir nun alle Sätze bewiesen, die Abel theilweise ebenfalls bewiesen, theilweise aber, wie namentlich für die Gleichungen zusammengesetzter Grade, blos angekündigt hatte. Ueberdies wird der überlegende Leser, vorausgesetzt dass er in den Gegenstand selbstthätig eingedrungen ist, nunmehr auch ermessen können, inwiefern von der ganzen Möglichkeit algebraischer Wurzelformen eine vollständige und abschliessende Rechenschaft gegeben sei, über die hinaus sich keine wesentliche Frage mehr absehen lässt, die unerledigt geblieben wäre. Im Allgemeinen und für jeden Fall liegt die algebraisch mögliche Verfassung der Wurzel einer algebraischen Gleichung klar vor Augen, so dass sich mit Hülfe unserer Lineamente jedesmal nicht nur der Hauptrahmen des Wurzelausdrucks, sondern auch alle Bestandtheile dieses Rahmens angeben lassen. Wie sich aber der hiemit festgestellte Rahmen nun auch mit einem Bilde, also die Wurzelform überall mit einem Wurzelinhalt nach zum Theil neuen

algebraischen Methoden ausfüllen lasse, wird, soweit es nicht schon früher geschehen ist, in den beiden nächsten Capiteln gezeigt werden.

Achtes Capitel.

Behandlung überviergradiger Gleichungen.

1. Die Fixirung der Untersuchungen auf allgemeine Wurzelelemente, verbunden mit den Rechnungsvortheilen, die sich aus der äusserlich sichtbar gemachten und leicht zu handhabenden Werthigkeit dieser Elemente ergeben, setzt uns in den Stand, nicht blos vereinzelte Typen der Gleichungen ohne Rücksicht auf die Höhe des Grades nach dem gewöhnlichen Gange algebraischer Operationen zu lösen, sondern auch überhaupt eine tiefer eindringende und mehr übersichtliche Behandlung aller Gleichungen eintreten zu lassen. Zunächst beginnen wir mit der Bestimmung derjenigen Typen, die sich ohne Weiteres und in der elementarsten Weise als nach der Werthigkeitsrechnung lösbar erweisen. Die Gleichungen zwischen den Coefficienten und den Wurzelelementen müssen bezüglich der fraglichen Gleichungstypen in ähnlicher Weise den Angelpunkt der Operationen bilden, wie dies bezüglich der Gleichungen bis zum vierten Grade im sechsten Capitel der Fall war.

Es würde nur eine unnütze Erschwerung der Uebersichtlichkeit sein, wenn wir darauf Gewicht legen wollten, die Feststellungen auch der Form und den Zeichen nach ganz im Allgemeinen für den $n$ten Grad auszuführen. Man hält das Verfahren in der Hauptsache nicht weniger allgemein, wenn man das einfachste Schema bearbeitet, welches zugleich Beispiel ist, dessen Rahmen aber beliebig erweitert werden kann. Ohnehin müssten wir zunächst die primgradigen Fälle von den andern sondern, und da sich überdies der erste entscheidende Schritt für die Theorie der Lösung der Gleichungen übervierten Grades auf diejenigen fünften Grades gerichtet hat, und dieser Ausgangspunkt auch für alles Uebrige der natürliche ist, so bethätigen wir auch die neuen Verfahrungsarten vorzugsweise an diesem Fundamentalfall.

Aus den früher angegebenen Gründen können wir, da sich das rationale Wurzelelement k auch nach unserer Methode sehr einfach bestimmt, sofort von einer Gleichung fünften Grades ohne vierte Potenz von x, also von der Gleichungsform $x^5 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$ ausgehen. Die zugehörige Wurzelform ist alsdann nach den Ausführungen des vorigen Capitels $x = jl + j^2m + j^3n + j^4o$, in welchem Ausdruck j fünf Werthe repräsentirt und zwar an erster Stelle irgend eine der vier primitiven Einheitswurzeln fünften Grades und ausserdem noch alle übrigen in irgend einer, am besten aber in derjenigen Reihenfolge, dass sie durch j^2, j^3, j^4, j^5 dargestellt werden. Denken wir uns hienach die besondern Werthe für die einzelnen Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5 einen unter den andern hingeschrieben, so ist sowohl in den Horizontal- als in den Verticalreihen die Abfolge der Potenzen maassgebend, und ein einziges primitives j liefert alle Werthigkeitsvorsetzungen der Wurzelelemente. Zur speciellen Erläuterung und Veranschaulichung des fraglichen tabellarischen Gesetzes vergleiche man die folgenden Parallelen. Es ist

$$\begin{array}{ll}
x_1 = jl + j^2m + j^3n + j^4o & jl + j^2m + j^3n + j^4o \\
x_2 = j^2l + j^4m + j^6n + j^8o & j^2l + j^4m + jn + j^3o \\
x_3 = j^3l + j^6m + j^9n + j^{12}o & j^3l + jm + j^4n + j^2o \\
x_4 = j^4l + j^8m + j^{12}n + j^{16}o & j^4l + j^3m + j^2n + jo \\
x_5 = j^5l + j^{10}m + j^{15}n + j^{20}o & j^5l + j^5m + j^5n + j^5o
\end{array}$$

Während die Werthe links die Bildungsart der Elementwerthigkeiten für die verschiedenen Wurzeln erkennen lassen, zeigen die auf die kleinsten Potenzen reducirten Werthe rechts, dass die vier Wurzeln von primitiver Werthigkeitsform dieselben Elementwerthigkeiten, aber versetzt und zwar nur derartig versetzt enthalten, dass stets die nämlichen Elemente, binär verbunden gedacht, Einwerthigkeiten ergeben. Hier im speciellen Fall muss das Product der äussern Elemente l und o und ebenso dasjenige der innern m und n in jeder Wurzel einwerthig ausfallen. Verallgemeinert man sich diese Bemerkung, so kann man im Voraus absehen, dass in jeder allgemeinen Form, die man als werthiges Polynom für eine Gleichungswurzel aufstellt, die Werthigkeitsergebnisse aus den Elementverbindungen an der unmittelbaren ersten Form des repräsentativen Schema auch in dem angegebenen Sinne für die andern Formen, d. h. für die andern Wurzeln gelten. In der That heisst dies auch nichts weiter, als dass, wenn sich aus der unmittelbar repräsentativen Form durch

Verbindung von Elementen eine Einwerthigkeit ergiebt, diese nicht dadurch verschwinden kann, dass sie potenzirt wird.

Durch Einsetzung der Wurzelform in die Gleichung würde diese in die erforderlichen Theilgleichungen zerfallen. Der praktisch bequemere Weg ist aber, wie wir im sechsten Capitel gezeigt haben, das sofortige Anknüpfen an die bekannten Gleichungen zwischen den Coefficienten und den Summen der Wurzelpotenzen. Diese wurden für q, r und s bereits im sechsten Capitel bei Gelegenheit der kubischen und der biquadratischen Gleichungen angeführt. Hier brauchen wir ausserdem noch $t = \frac{1}{6} S(x^2) S(x^3) - \frac{1}{5} S(x^5)$. Denkt man in die fünf Gleichungen dieser Art nun unsere Wurzelformen für x_1, x_2 u. s. w. eingesetzt, verfährt aber nach der früher begründeten abkürzenden Regel, dass aus den Potenzen für das allgemeine x nur die Einwerthigkeiten zurückzubehalten sind, so lassen sich mit Hülfe so geringfügiger Rechnung, dass diese im Kopf auszuführen ist, folgende Coefficientengleichungen hinschreiben: $q = -5(lo + mn)$; $r = -5(l^2 n + lm^2 + mo^2 + n^2 o)$; $s = -5(l^3 m - l^2 o^2 + lmno + ln^3 + m^3 o - m^2 n^2 + no^3)$; $t = -(l^5 - 5 l^3 no + 5 l^2 m^2 o + 5 l^2 mn^2 - 5 lm^3 n - 5 lmo^3 + 5 ln^2 o^2 + m^5 + 5 m^2 no^2 - 5 mn^3 o + n^5 + o^5)$.

Es versteht sich, dass sich derartige Gleichungen zwischen den Coefficienten und den Elementen auch für jeden andern Gleichungsgrad mit entsprechender Bequemlichkeit bilden lassen, mag dieser Primgrad sein oder nicht, sobald man nur jedesmal die im vorigen Capitel schematisirte Wurzelform anwendet und nach dem Princip verfährt, aus den Wurzelpotenzen die Einwerthigkeiten zurückzubehalten. Es hat aber vorläufig weiter kein Interesse, derartige Coefficientengleichungen in höheren Graden allgemein aufzusuchen, da wir zunächst nur auf specielle Fälle derselben einzugehen haben werden.

2. Schon aus den für den fünften Grad angegebenen Coefficientengleichungen lässt sich absehen, wie sich im Allgemeinen die Gleichung für ein Wurzelelement stellen müsste. Die Gleichung für q ist zweidimensional und zweiten Grades und danach steigen die Dimensionen und Grade für die übrigen. Nach den allgemeinen Grundsätzen müsste daher der Grad der Schlussgleichung, wenn man vorher auch alle Künste der höhern Eliminationsmethoden aufböte, die ihn nicht über sein natürliches Maass steigern, die Zahl 2.3.4.5 erreichen. Das Wurzel-

element würde also Wurzel einer Gleichung 120sten Grades sein und demgemäss 120 Werthe haben. Aus der Ebenmässigkeit der Wurzelelemente lässt sich aber auch im Voraus ermessen, dass sich für jedes Element dieselbe Gleichung ergeben muss und so würden wir denn 120 Werthe haben, von denen, falls man 30 für das eine setzt, je 30 auf die andern drei fallen. Es fallen also immer 90 der 120 Werthe eines jeden Elements mit denen der andern zusammen. Da jedes Element schon nach Maassgabe der Wurzelform fünf ausdrückliche Werthigkeiten hat, so folgt hieraus, dass in den fünften Potenzen der Elemente die Fünfwerthigkeiten fortfallen müssen, also nur 24 Werthe übrig bleiben können; denn jeder der 24 Werthe wird dadurch, dass man von ihm die fünf Wurzeln nimmt, verfünffacht. Es werden also l^5, m^5, n^5 und o^5 in der Schlussgleichung nur 24werthig, d. h. die etwa in l ausgedrückte Schlussgleichung vom 120sten Grade ist in Beziehung auf l^5 nur vom 24sten, und analog ist es dieselbe Gleichung in Beziehung auf m^5, n^5 und o^5. Die fraglichen vier fünften Potenzen sind also Wurzeln einer und derselben Gleichung 24sten Grades. Ausserdem wissen wir, dass die Elemente einander vertreten können, da immer nur von den 120 Werthen für das einzelne Element je 30 individuell in Anschlag zu kommen brauchen. Hieraus folgt, dass analog die fünften Potenzen einander vertreten, d. h. dass von den 24 Werthen für jede einzelne Potenz individuell nur jedesmal sechs in Anschlag zu kommen brauchen, und dass die übrigen Werthe alsdann in den andern Potenzen gegeben sind. Fasst man hienach die vier Potenzen zu einer Summe $l^5 + m^5 + n^5 + o^5$ zusammen, so liegt in der angegebenen Vertheilung der Werthe bereits die Thatsache, dass in der Summe nur sechs bestehen bleiben; denn nur zu je sechs lassen sich nebeneinander aus den 24 Werthen wirkliche Verschiedenheiten formiren; die übrigen Formationen würden sich nur durch die Reihenfolge der Nebenordnung unterscheiden, welche aber bei einer Summe gleichgültig ist. So ist denn die Function $l^5 + m^5 + n^5 + o^5$ sechswerthig und muss die Wurzel einer Gleichung sechsten Grades sein.

Wir wollen die eben angeführte Function die kritische Function nennen, weil durch ihre Beziehung zu den Coefficienten über die algebraische Lösbarkeit oder Nichtlösbarkeit entschieden wird. Im besondern Fall kann sie auch die Lösungsfunction heissen, da durch ihre besondere Gestaltung nicht nur die

Lösungsbedingungen erfüllt, sondern der Regel nach auch die Lösungen selbst vermittelt werden. Ist für irgend eine Gleichung die kritische Function einer gegebenen Function der Coefficienten gleich, so liegt in dieser Thatsache bereits das Wesentliche der Lösung. Auch können wir den Satz vorwegnehmen, dass nur da, wo eine Gleichung zwischen der kritischen Function und einer Function der Coefficienten zu beschaffen ist, für das Wurzelelement und mithin für die Wurzeln der Hauptgleichung eine reine algebraische Form, d. h. eine solche existirt, in die keine Transcendente eingemischt zu werden braucht. In allen bisherigen Lösungsfällen, die wir im sechsten Capitel erledigt haben, ergab sich das, was wir jetzt kritische Function genannt haben, von selbst als einer Function der Coefficienten gleich. So hatten wir für die Gleichung des dritten Grades die kritische Function $l^3 + m^3 = - r$ und für die biquadratische Gleichung $l^2 + m^2 + n^2 = - \frac{q}{2}$. Für den jetzt vorliegenden Fall einer Gleichung fünften Grades zeigt ein Blick auf die letzte Coefficientengleichung für t, dass die kritische Function, welche in dieser Gleichung ebenfalls als Bestandtheil vorkommt, erst in Summation zu einer Anzahl anderer Elementefunctionen mit einem Coefficienten in Gleichung steht. Auch kann man von vornherein wissen, dass es zunächst keine derartige einwerthige Coefficientenfunction geben kann; denn das wäre ein Widerspruch gegen die bereits festgestellte Sechswerthigkeit der kritischen Function. Auch sind im Allgemeinen, wie sich später zeigen wird, keine Mittel vorhanden, aus der sechswerthigen Function durch algebraische Operationen, wie durch Potenziren, Summiren u. dgl. eine Function von einer geringern Werthzahl, also von drei oder zwei Werthen, zu entwickeln. Lässt sich aber überhaupt keine solche Function der Wurzelelemente finden, von welcher, während ihr Werth durch eine Coefficientenfunction ausgedrückt werden kann, zugleich ein algebraischer Rückweg wieder zum Wurzelelement führt, so ist klar, dass hiemit auch die Lösung selbst abgeschnitten ist. Irgend eine solche Function der Wurzelelemente muss es offenbar sein, vermöge deren sich eine Lösung vollziehen kann.

3. In der Elementegleichung für t sind ausser der kritischen Function nur noch Glieder enthalten, in deren jedem drei der Elemente und zwar multiplicativ verbunden vorkommen. Setzt man also im besondern Fall eine solche Gleichung voraus, für

welche irgend welche zwei der werthigen Wurzelelemente gleich Null werden, so bleibt in jener letzten Coefficientengleichung nur die kritische Function, von welcher aber ebenfalls zwei Glieder gleich Null werden, stehen, und es ist so dem Kriterium der Lösbarkeit entsprochen. Nennen wir alle derartigen Gleichungen, in deren Wurzelform nur zwei mehrwerthige Elemente vorzukommen brauchen, zweielementige, so können wir sagen, dass sich die Lösung der zweielementigen Gleichungen vermöge unserer Coefficientengleichungen ebenso leicht bewerkstelligt, wie diejenige der kubischen Gleichungen, die ja übrigens auch der Classe der zweielementigen zugerechnet werden können. Was an den Coefficientengleichungen des fünften Grades unmittelbar sichtbar ist, lässt sich auch für jeden sonstigen Grad nachweisen. Es gilt also ohne irgend welche Beschränkung auf einen Grad der allgemeine Satz, dass alle zweielementigen Gleichungen auf dem Wege der Werthigkeitsrechnung lösbar sind.

Betrachten wir zunächst wieder den Fall des fünften Grades. Hier ist ein Unterschied zu machen, je nachdem man zwei Elemente, deren Product einwerthig ist, oder aber zwei andere beibehält. Diese Unterscheidung ergiebt, wie man sich leicht überzeugen kann, wesentlich nur zwei Fälle; denn ob man beispielsweise die äussern oder die innern Elemente nimmt, ändert nur die Reihenfolge der Wurzeln. Behalten wir also l und o, indem wir m und n gleich Null setzen, so reducirt sich die kritische Function auf $l^5 + o^5 = -t$. Die andern drei Coefficientengleichungen verwandeln sich in $q = -5lo$, $r = 0$ und $s = 5l^2o^2 = \frac{q^2}{5}$. Entnehmen wir aus der Gleichung für q einen Ausdruck für eines der Elemente, etwa $o = -\frac{q}{5l}$, und setzen ihn in die Gleichung der kritischen Function ein, so erhalten wir nach Wegschaffung des Bruches $l^{10} + tl^5 - \left(\frac{q}{5}\right)^5 = 0$, eine Gleichung, die in Beziehung auf l^5 quadratisch und die eigentliche Resolvente ist. Aus ihr ergiebt sich

$$l = \sqrt[5]{-\frac{t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{5}\right)^5 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}}.$$

Analog würde sich $o = \sqrt[5]{-\frac{t}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{5}\right)^5 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}}$ ergeben

haben. Ebenso steht die Gestaltung der Coefficienten und die nothwendige Beziehung zwischen ihnen fest. Es muss $r = 0$ und $s = \frac{q^2}{5}$ sein.

Dieser ganz specielle Fall zweielementiger Gleichungen, in denen überdies das Product der beiden Elemente einwerthig ausfällt, repräsentirt die wichtige Classe derjenigen Gleichungen, von denen die Winkeltheilung und hier im besondern Beispiel des fünften Grades die Fünftheilung des Winkels abhängt. Bisher hat man sich diese Gleichungen nur auf transcendentem Wege mit Hülfe der Moivreschen Formel herstellen können und sie auch meist Moivresche Gleichungen genannt. Unser Weg ist ein einfach algebraischer und auch ganz allgemein; denn nicht etwa blos die primgradigen Gleichungen, sondern auch die aller zusammengesetzten Grade lassen sich auf diese Weise behandeln. Selbstverständlich wird man sich nicht die Mühe geben, die Coefficientengleichungen erst ganz im Allgemeinen aufzustellen, um dann in ihnen alle Elemente, mit Ausnahme der zwei zurückzubehaltenden, gleich Null zu setzen, sondern man wird von vornherein von einer abgekürzten Wurzelform ausgehen. Man wird beispielsweise für den sechsten Grad sofort $x = jl + j^5 g$ setzen und sich hieraus nach den früher gegebenen Regeln die fünf Gleichungen zwischen den Coefficienten und den Wurzelelementen aufstellen. Auch liessen sich alle diese Gleichungen ganz allgemein für den $n$ten Grad behandeln, indem man von der Wurzelform $x = jl + j^{n-1} e$ ausginge und ebenso allgemein nach unsern frühern Regeln die $n - 1$ Coefficientengleichungen bildete. Zur Ersparung von Raum verzichten wir jedoch auf die Veranschaulichung des blossen Mechanismus, der übrigens von Jedem, der sich für die Ausführung der Verallgemeinerung interessirt, ohne Weiteres ergänzt werden kann.

Dagegen sei noch auf die andere Abart von Gleichungen hingewiesen, die dann entsteht, wenn man zwei Elemente beibehält, deren Product nicht einwerthig wird. Auch diese Gleichungen werden auf dieselbe Art behandelt. Behält man also in unserm Beispielsfall des fünften Grades l und m zurück, indem man n und o gleich Null setzt, so wird die kritische Function $l^5 + m^5 = -t$ und die übrigen Coefficientengleichungen verwandeln sich in $q = 0$; $r = -5lm^2$; $s = -5l^3m$. Ausschliesslich aus den Gleichungen für r und s erhält man bereits

die beiden Elemente, und die Gleichung der kritischen Function drückt alsdann nur die Beziehungen der letzten drei Coefficienten aus. Entwickelt man zunächst eines der Elemente, also etwa m aus derjenigen Gleichung, in welcher es linear vorkommt und setzt den gefundenen Ausdruck in die andere ein, so hat man nach Wegschaffung des Bruches eine reine Gleichung fünften Grades, nämlich $l^5 + \frac{s^2}{5r} = 0$. Durch die Entwicklung des andern Elements findet sich $m^5 - \frac{r^3}{25s} = 0$. Wir haben also $x = j\sqrt[5]{-\frac{s^2}{5r}} + j^2\sqrt[5]{\frac{r^3}{25s}}$, wobei daran erinnert werden mag, dass j alle fünften Einheitswurzeln repräsentirt. Die Gleichung der kritischen Function verwandelt sich, indem man für l^5 und m^5 die gefundenen Werthe setzt, in eine Bestimmung von t durch die Coefficienten r und s, nämlich in $t = \frac{s^2}{5r} - \frac{r^3}{25s}$. Die Gleichung zu den gefundenen Wurzelwerthen müsste also die Form $x^5 + rx^2 + sx + \frac{s^2}{5r} - \frac{r^3}{25s} = 0$ haben. Es versteht sich, dass auch bei dieser Abart die Gleichung des fünften Grades nur ein erster Typus ist, nach welchem sich auch die übrigen Grade und zwar nicht blos die Primgrade erledigen lassen.

4. Wie wir oben gesehen haben, ist eine in Beziehung auf die Elemente rationale Function dieser Elemente mit einer angebbaren Function der Coefficienten in Gleichungsbeziehung zu setzen, wenn eine Lösung der Hauptgleichung stattfinden soll. Wir gelangen also mit der fraglichen Elementefunction, deren Beziehung zu den Coefficienten ein Kriterium der Lösbarkeit ist, an diejenige Grenze, jenseit deren sich jede weitere Behandlung der Elemente und irgend welcher Functionen derselben von selbst verschliesst, falls nicht ebenso von selbst jene Beziehung der kritischen Function auf die Coefficienten mitgegeben ist. Letzteres hat im Allgemeinen bei den überviergradigen Gleichungen nicht statt; denn in der letzten Coefficientengleichung sind noch andere Glieder mitenthalten. Hieraus folgt, dass die fragliche erforderliche Beziehung auf besondern Gestaltungen beruht, die wir aufzusuchen haben; denn es wäre eine willkürliche Voraussetzung, über die zwischen den Elementen und den Coefficienten in unsern betreffenden Gleichungen allgemein und erschöpfend formulirten

Beziehungen hinaus noch andere speciellere anzunehmen, die ebenfalls allgemeingültig und trotzdem nicht in den vorigen enthalten wären. Derartiges wäre ein vollendeter Widerspruch; denn ein Specielles, welches nicht in dem Allgemeinen enthalten ist, schränkt dasselbe gleichsam von aussen ein und muss daher auf besondere Gründe zurückgeführt werden. Ist daher die Gleichung der kritischen Function von der entsprechenden Coefficientengleichung verschieden, so kann sich die Allgemeinheit der letzteren nicht mit der Specialität der ersteren decken, oder, mit andern Worten, jene völlige Allgemeinheit der Beziehungen, die aus einer allgemein gefassten Hauptgleichung folgt, besteht nicht mehr. Demgemäss haben wir uns nach besondern Einschränkungen umzusehen, vermöge deren die kritische Function auch zur lösenden werde.

Für die Untersuchung dieser Einschränkungen bieten die Wurzelelemente der Regel nach keine Handhabe, obwohl wir in den zweielementigen Gleichungen einen Fall nachgewiesen haben, für welchen eine solche Handhabe vorhanden war. Das Hinderniss weiterer Behandlung ist der Umstand, dass die kritische Function in Beziehung auf die einfachen absoluten Ausdrücke der Wurzelelemente nur einwerthig ist, während sie mit Rücksicht auf die Vielwerthigkeit jedes Elements effectiv sechswerthig sein muss, wie wir dies aus der Gradzahl der Endgleichung im Voraus bestimmt haben. Diese sechs Werthe sind nun von anderer Beschaffenheit, als diejenigen zwanzig, die wir als eine Combination von gewöhnlichen Fünfwerthigkeiten und von denjenigen Vierwerthigkeiten behandeln konnten, die dadurch repräsentirt sind, dass jedes Element auch die andern zu Werthen hat. Jene fünfmal vier Werthe liessen sich daher unmittelbar an den Elementen selbst erkennen und signalisiren; denn nicht erst die Wurzeln der Endgleichung, sondern die auch schon von vornherein in der Wurzelform bestehende Vertauschbarkeit der Elemente machte die fragliche Vierwerthigkeit bemerklich. Nun aber ist im Bereich der Elemente selbst von weitern Werthunterscheidungen nichts mehr unmittelbar sichtbar. Man muss schon auf die Endgleichung ausgreifen, um nur die Zahl 120 als die nothwendige Werthezahl jedes Elements zu erschliessen. Man würde diese Endgleichung selbst brauchen, um auf dem eingeschlagenen Wege Weiteres über die Werthunterschiede zu erfahren. Dies hiesse aber, das Ziel erreicht haben müssen, um

über die Mittel zu verfügen, mit denen es erreicht werden soll. Die Betrachtungen über die Werthe sind nur Mittel, um zu lösenden Gleichungen oder Functionen zu gelangen. Es ist daher ein anderer Weg nöthig, die fraglichen Sechswerthigkeiten und alle analogen Werthzahlen, die ihnen in kritischen Functionen höhergradiger Gleichungen entsprechen, sichtbar zu machen.

In den von uns aufgestellten Wurzelformen ist jede einzelne Wurzel als lineare Function der Wurzelelemente ausgedrückt. Diese Ausdrücke sind eine genügende Anzahl von Gleichungen, um die Elemente als lineare Functionen der Wurzeln zu erhalten. Hatten wir sonst die Wurzel als lineare Function des sich nach vier Werthen individualisirenden Wurzelelements, so können wir jetzt auch die Umkehrung der Function, nämlich das Wurzelelement als Function der sich fünfwerthig unterscheidenden Wurzel haben. Für die vier Elemente genügten sogar vier Gleichungen; aber diese vier sind unter den fünf vorhandenen beliebig wählbar, und da doch alle diese Möglichkeiten auf irgend eine Weise mitberücksichtigt werden müssten, so empfiehlt es sich, von vornherein gleich alle fünf Gleichungen an der Bildung der Wurzelfunction theilnehmen zu lassen. Das Wurzelelement als Wurzelfunction betrachten, nimmt sich zunächst etwas sonderbar aus. Doch zeigt sich bei näherer Ueberlegung, dass in Rücksicht auf Werthigkeit es ganz in der Ordnung ist, eine 120werthige Function aus Bestandtheilen zusammenzusetzen, deren jeder nur fünfwerthig ist. Obwohl daher die Auffassung ganz natürlich ist, die Wurzel als aus ihren Elementen zusammengesetzt vorzustellen, und demgemäss nach der algebraischen Constitution das Wurzelelement einfacher ist als die Wurzel, so kehrt sich doch der Gesichtspunkt der Einfachheit gradezu um, sobald man die Werthezahl zum Maass macht. Nach Maassgabe der Werthezahl ist die Wurzel 24 mal einfacher als ihr Element. In der Ordnung der Werthgrade gehen wir also zum Einfacheren über, wenn wir in der Zusammensetzung der Ausdrücke vom Wurzelelement zur Wurzel selbst fortschreiten.

Letzterer Sachverhalt ist, wenn auch nicht der bewusste Grund, so doch die in der Natur des Gegenstandes thatsächlich treibende Ursache gewesen, aus welcher Lagrange von vornherein den Weg der Wurzelfunctionen eingeschlagen hat. Er wurde hiedurch der Begründer der modernen Gleichungstheorie, und wenn der Ausdruck moderne Algebra im Unterschiede von der-

jenigen des 16. und 17. Jahrhunderts überhaupt noch einen Sinn haben soll, so muss er auf jene epochemachende Methode Lagranges bezogen werden, die man wohl am besten als die der Wurzelfunctionen bezeichnen kann. Auf ihr hat bisher alles Spätere beruht und insbesondere haben Abel und Galois im Rahmen dieser Methode die wichtigsten Einsichten gewonnen, die bisher seit Lagrange zu Tage gefördert worden sind. Es sei jedoch sogleich bemerkt, dass Lagrange seine Methode der Wurzelfunctionen dadurch etwas unmotivirt, ja man könnte sagen, willkürlich einleitet, dass er ohne weitere Vermittlung sofort von der Idee ausgeht, alle Methoden der Gleichungslösung würden schliesslich immer darauf zurückkommen, eine Function der Wurzeln zu suchen, die selbst Wurzel einer lösbaren Gleichung sei. Der willkürliche Zug des Verfahrens steigert sich noch dadurch, dass von vornherein mit irgend einer Wurzelfunction begonnen wird, ohne dass man erfährt, warum grade diese Wurzelfunction und nicht eine andere gewählt worden sei. Stillschweigend ist freilich das Wurzelelement auch der Compass gewesen; denn Lagrange ist von den Eulerschen Betrachtungen ausgegangen, und diese hatten irgend welche, wenn auch noch sehr unbestimmte und unzulängliche Vorstellungen über die Wurzelform im Auge. Wir haben also das naturgemässe System hergestellt, indem wir von den Wurzelelementen ausgingen, eine Function der Elemente als die Lösungsfunction im Sinne hatten und dann, als die Werthbetrachtungen dazu führten, den Ausdruck der Elemente und mithin auch der lösenden Function durch die Wurzeln als denjenigen erkannten, der zum werthig Einfacheren führe.

5. Bleiben wir bei dem Typus der Gleichung fünften Grades, an welchem sich die jetzt fragliche Wendung in hinreichender Allgemeinheit kennzeichnen lässt. Aus den Gleichungen $x_1 = jl + j^2m + j^3n + j^4o$, $x_2 = j^2l + j^4m + j^6n + j^8o$ u. s. w. erhält man l, indem man jede dieser Gleichungen mit einer solchen Potenz von j multiplicirt, dass l, wo es dies nicht schon ist, einwerthig wird, und alsdann alle Gleichungen addirt. Auf diese Weise ergiebt sich $l = \frac{1}{5}(j^4x_1 + j^3x_2 + j^2x_3 + jx_4 + x_5)$. Auf analogem Wege oder auch dadurch, dass man in dem für l gefundenen Ausdruck nacheinander j^2, j^3 und j^4 für j setzt, findet man die entsprechenden Ausdrücke für m, n und o. Auch wissen wir bereits und brauchen es nicht erst aus dem Wurzel-

ausdruck der Elemente zu erfahren, dass die Elemente Werthe von einander sind, und dass daher im Allgemeinen eigentlich nur ein Element e existirt, welches die vier Werthe $e_1 = l$, $e_2 = m$, $e_3 = n$ und $e_4 = o$ annimmt. Wir brauchen daher vorläufig unsere Aufmerksamkeit nur auf eine einzige Wurzelgestalt des Elements zu richten. Diese sei $e = l = \frac{1}{5}(j^4 x_1 + j^3 x_2 + j^2 x_3 + j x_4 + x_5)$.

Die allgemeine Gleichungswurzel x ist in demselben Sinne fünfwerthig, wie wir dies in unserer Werthigkeitsrechnung für die fünfte Einheitswurzel j erprobt haben, d. h. wie bei letzterer die Repräsentation durch ein primitives j zugleich alle übrigen Einheitswurzeln mitvorstellte, so wird man auch, wo man speciell x_1, x_2 u. s. w. schreibt, noch die übrigen vier Wurzeln als nacheinander an die Stelle der speciell gesetzten tretend mitzuberücksichtigen haben. Die Rolle irgend einer speciellen Wurzel ist willkürlich fünffach bestimmbar; denn sie ist nichts als die Rolle der allgemeinen Wurzel, die an der betreffenden Stelle mit irgend einem ihrer willkürlich wählbaren Werthe figuriren soll. In diesem Sinne kann man also sagen, dass jede fünfte Wurzel auch da, wo sie ausdrücklich nur mit einem einzelnen Werthe gesetzt wird, electiv fünfwerthig sei. Gewöhnlich beruft man sich unmittelbar auf eine gegenseitige Vertauschbarkeit der Wurzeln; in unserm Werthigkeitssystem ist es jedoch angemessener, den Sachverhalt sogleich in der angegebenen Art vorzustellen. Nebenbei bemerkt, müssen sich die Gleichungswurzeln überhaupt zu ähnlichen Werthigkeitsschlüssen verwenden lassen, wie die Einheitswurzeln. Bildet man beispielsweise aus ihnen ähnliche werthige Polynome mit einwerthigen Coefficienten, wie aus den Einheitswurzeln, so wird die Nullsetzung dieser Polynome in analoger Weise eine Nullsetzung der Coefficienten, d. h. ähnliche Gleichungsspaltungen mitsichbringen, wie diejenigen, die sich aus unserer bisherigen Werthigkeitsrechnung ergaben. Hier bedürfen wir jedoch dieser Eigenschaft der Wurzeln nicht, sondern haben unsere Schlüsse rein aus der electiven Fünfwerthigkeit zu machen.

Die für e in den Wurzeln aufgestellte Functionsform ist in Folge der electiven Fünfwerthigkeit jeder Wurzel 120 werthig; denn dies ist die Zahl der Permutationen, welche zwischen den fünf nebengeordneten Wurzeln möglich ist, und jede dieser Permutationen ändert, da die Wurzeln verschiedene Vorsetzungen

haben, auch in der That den Werth der Function. So zeigt sich denn hier bei dem werthigen Wurzelausdruck des Elements an den Permutationswerthen, was wir schon aus der Natur der Coefficientengleichungen entnahmen. Hier schliessen wir unmittelbar auf die Werthzahl 120 und entnehmen daraus, es müsse das Wurzelelement Wurzel einer Gleichung 120sten Grades sein. Dort schlossen wir direct auf den Grad der Gleichung und mit diesem zugleich auf die Werthzahl. Der Weg Lagranges war der, unmittelbar von der fraglichen Wurzelfunction auszugehen und aus dieser erst eine Function zu bestimmen, welche in unserer Bezeichnungsweise $5^6 . e^5$ sein würde. Alsdann treten weitere Classificirungen und Eintheilungen der Permutationsgruppen ein, welche, von unerheblichen Zahlencoefficienten abgesehen, schliesslich auch zu dem führen, was wir die kritische Function genannt haben. Angesichts dieser sechswerthigen Wurzelfunction erklärte Lagrange, dass schwer abzusehen sein dürfte, ob sich die zugehörige Gleichung sechsten Grades, deren ersten Coefficienten er nach der Methode der symmetrischen Functionen wirklich berechnet hatte, noch weiter zerlegen lassen würde. Alle Bemühungen der Späteren, namentlich Abels und Galois', haben wesentlich an diesen Punkt angeknüpft, sowohl rücksichtlich der Verneinung der Zerlegbarkeit, als auch bei der Formulirung specieller Lösungskriterien.

Unsere Aufgabe ist nach dem bisherigen Gange des Verfahrens zunächst eine ganz einfache. Wir bedürfen der vorbereitenden Permutationsclassificationen Lagranges nicht, da uns schon die unmittelbare Behandlung der Wurzelelemente auf die entscheidende Function geführt hat. Wir haben unsern Ausdruck der kritischen Function $l^5 + m^5 + n^5 + o^5 = e_1{}^5 + e_2{}^5 + e_3{}^5 + e_4{}^5$ nur aus der Sprache der Elemente in die Sprache der Wurzeln zu übersetzen und können dabei die Zahlencoefficienten weglassen, da es sich in dem Wurzelausdruck der kritischen Function doch immer nur um die Wurzelproducte und deren Werthveränderung durch die Permutationen handelt. Wir können daher auch kurzweg den so gewonnenen Wurzelausdruck als kritische Wurzelfunction oder einfach als kritische Function bezeichnen, wie überhaupt auch noch alle andern sechswerthigen Functionen der Elemente oder Wurzeln, zu denen man durch andere Combinationen gelangen mag, den wesentlichen Charakter kritischer Functionen haben und daher in der Hauptsache unsere

specielle kritische Function vertreten können. So würde beispielsweise die Function *lmno*, wie sich schon an den Elementen unmittelbar erkennen lässt, ebenfalls sechs Werthe haben und dabei nur vierdimensional sein. Ebenso würde es sich mit der Combination $l^2 o^2 + m^2 n^2$ verhalten, und es liessen sich diese Fälle durch die verschiedensten Dimensionen hindurch vermehren, ja wenn man gewisse Dimensionsgrenzen setzte, innerhalb dieser erschöpfen.

6. Nach dem Vorangehenden haben wir jetzt zwei Kriterien der Functionswerthigkeit, nämlich erstens das durch die Einheitswurzeln und nunmehr auch das durch die Wurzelversetzungen. In letzterer Beziehung müssen nun permutative Gestalten und permutative Grössenwerthe oder kurzweg permutative Werthe unterschieden werden. Eine symmetrische Function gestattet alle Permutationen, ohne dass ihr Werth geändert würde. Sie nimmt mithin alle permutativen Gestalten an, hat aber nur einen permutativen Werth. Die Gestaltänderung besteht dabei ausschliesslich in der Aenderung der Reihenfolge der Glieder. Nachdem wir auf diese Weise den Begriff des permutativen Werths festgestellt haben, können wir innerhalb desselben von Neuem unterscheiden und ausschliesslich oder rein permutativen Werth einen solchen nennen, der auf keine andere Weise als vermittelst Wurzelpermutationen sichtbar zu machen und nicht anders als auf diesem Wege in der Wertherechnung zu handhaben ist. Wo unsere durch die Einheitswurzeln gekennzeichneten Werthigkeiten aufhören, beginnen die rein permutativen Werthe. Dies steht bereits fest, lässt sich jedoch auch noch an den Wurzelfunctionen besonders zeigen, wenn man von der elementaren Wurzelfunction *e* ausgeht und eine Parallele mit denjenigen Permutationskünsten zieht, die dabei bisher ein Surrogat unserer Methode der Werthigkeiten bildeten. Die Fünfwerthigkeiten, die den fünften Wurzeln entsprechen, werden durch die fünf sogenannten cyklischen Permutationen, d. h. durch diejenigen Versetzungen dargestellt, in denen man die Indices 1 mit 2, 2 mit 3, u. s. w. bis 5 mit 6, d. h. mit 1 vertauscht, alsdann an der nun gewonnenen Permutationsgestalt dieselbe Operation wiederum vornimmt u. s. w. Wir nach unserer Methode gewinnen die fünf Werthe, indem wir nacheinander mit j, j^2, j^3 und j^4 multipliciren; denn durch diese vier Vorsetzungen müssen sich die Unterschiede der vier andern Wurzeln aus der einen zum Ausgangspunkt genommenen immer ergeben, welche Vorsetzung auch die zum Ausgangspunkt

genommene selbst schon haben möge. Um uns also in den 120 Permutationen auf unsere Weise zu orientiren und zunächst fünf charakteristische Stammwerthe zu Ausgangspunkten für alles Weitere zu erhalten, brauchen wir eben gar nicht wirklich zu permutiren, sondern nur irgend eine Form der Elementarfunction e zu nehmen und an ihr die fünf Vorsetzungen der Fünfwerthigkeit anzubringen, ihr also, kurz gesagt, die fünf Werthigkeitsgrössen zu geben. Demgegenüber ist die cyklische Permutation etwas willkürlich Gemachtes, wozu man offenbar am Leitfaden des Gesichtspunktes gelangt ist, die fünf Wurzelwerthe auf permutatorische Weise zu erzeugen. Die Setzung der verschiedenen Einheitswurzeln, deren man sich unter der Bezeichnung α früher auch, aber stillschweigend und ganz nebenbei, bediente, ist das sachlich Ursprüngliche und die cyklische Permutation das nachträglich Erfundene. Wo man überhaupt fünfte Wurzeln von einander zu unterscheiden hatte, da war man auch genöthigt, dies zunächst vermittelst der Einheitswurzeln zu thun. Unser Verfahren aber hat erst ein Gebiet werthiger eigentlicher Vorsetzungen, gleich den gewöhnlichen Rechnungszeichen, kenntlich gemacht und hieran eine systematische Rechnungsart geknüpft.

Noch gekünstelter als die Beschaffung der fünfwerthigen Permutationsgruppe ist die permutatorische Erzeugung der Vierwerthigkeiten, welche den vier Elementen l, m, n und o entsprechen. Hier bedarf man der sogenannten Multiplication der Indices, nämlich nacheinander mit 3, 2 und 4. Wir aber setzen einfach nacheinander j^2, j^3 und j^4 für j ein, d. h. wir stellen die zum werthigen Polynom gehörigen Werthe nur thatsächlich hin und haben hiemit die vier Elemente. Nebenbei bemerkt, ergiebt sich auch das fünfte, welches in unserm Fall gleich Null ist, sobald wir auch noch j^5 einsetzen. Stellen wir die fraglichen Vierwerthigkeiten an jeder der Fünfwerthigkeiten dar, so erhalten wir diejenigen zwanzig Werthe jedes Wurzelelements, die von j abhängen, und deren jeder innerhalb seiner selbst sechs Wurzelversetzungen, d. h. sechs rein permutative Werthe liefert. Diese beruhen bei jedem der zwanzig Ausgangspunkte auf den sechs möglichen Versetzungen dreier Wurzeln unter sich, während die jedesmal zugehörigen zwei andern Wurzeln unversetzt bleiben. Dagegen bleiben bei den cyklischen und den erwähnten multiplicativen Permutationen nie zwei Wurzeln an ihrer Stelle.

Um die kritische Function zu erhalten oder vielmehr, da

deren specielle Darstellung nicht einmal erforderlich ist, gewisse Eigenschaften an ihr sichtbar zu machen, haben wir die Elementarfunction e oder besser, da es auf die Zahlencoefficienten nicht ankommt, einfach die Function $5e$, vor der kein Bruch mehr steht, zunächst in die fünfte Potenz zu erheben. Um jedoch ein für allemal die für die Beurtheilung gleichgültigen Zahlencoefficienten zu beseitigen, wollen wir von nun an unter e_1, e_2 u. s. w. die von jenen Coefficienten befreiten Werthe der Elementarfunction verstehen. Wir haben alsdann $e_1{}^5$, indem wir von der ersten Form der Elementarfunction ausgehen, d. h. $(j^4x_1 + j^3x_2 + j^2x_3 + jx_4 + x_5)^5$ zu bilden. Dies muss nach unsern frühern Grundsätzen wieder ein werthiges Polynom von derselben Form geben, sich also, wenn wir in der gewöhnlichen Weise ordnen, durch das Schema $K + jL + j^2M + j^3N + j^4O$ kennzeichnen, in welchem K, L u. s. w. absolut genommene Wurzelfunctionen sind. Setzen wir in diesem Schema nacheinander j^2, j^3 und j^4 an die Stelle von j, so erhalten wir die Schemata für $e_2{}^5$, $e_3{}^5$ und $e_4{}^5$. Auch die fünfte Potenz des fünften Elements oder vielmehr des Fünffachen davon, welches in unserm Falle Null und sonst dem negativen ersten Coefficienten gleich ist, erhalten wir, wenn wir j^5 an die Stelle von j in das Schema einsetzen. Wir haben hier dann speciell die fünfte Potenz des fünften Elements $0 = K + L + M + N + O$. Addiren wir die so gewonnenen fünf Schemata, so erhalten wir $e_1{}^5 + e_2{}^5 + e_3{}^5 + e_4{}^5 + e_5{}^5 = 5\,K$. Sehen wir wieder vom gleichgültigen Zahlencoefficienten ab, so ist K die kritische Function. Sie ist der in Beziehung auf die Vorsetzungen einwerthige Bestandtheil, wie er sich in jeder einzelnen der fünften Potenzen der vier Elemente findet. Ueberhaupt braucht man im Falle primgradiger Gleichungen aus der fünften Potenz der Elementarfunction immer nur die einwerthige Wurzelfunction zurückzubehalten und man hat hiemit die kritische Function. Auch alle sonstigen Operationen und Schemata stellen sich bei allen Primgraden analog.

Die Werthezahl der kritischen Function, die kein j mehr enthält, kann auch nicht von j abhängig sein. Diese Zahl muss die der rein permutativen Werthe sein, welche nach den Operationen mit den Vorsetzungen noch übrig bleiben. Diese rein permutativen Werthmöglichkeiten können aber in der kritischen Function nur diejenigen sein, die schon in der Elementarfunction bestanden. Von den je zwanzig Werthen als Ausgangspunkten

liessen sich je sechs durch ausschliessliche Permutation je dreier Wurzeln unter sich bilden. In der kritischen Function sind die zwanzig von den Vorsetzungen abhängigen Werthe oder vielmehr Werthclassen verschwunden; es bleiben also in ihren sämmtlichen 120 Permutationsgestalten nur die Permutationen je dreier Wurzeln unter sich wirklich werthändernd und ergeben, wie es sein muss, die sechs überhaupt noch bestehenbleibenden Werthe. An diesen Charakter der Ursache der Sechswerthigkeit werden wir bei den Kriterien der Lösbarkeit der Gleichung anknüpfen müssen. Er gestaltet sich analog bei allen Primgraden.

Was aber die zusammengesetzten Grade anbetrifft, so sind bezüglich der Unterscheidung der Werthgattungen und behufs Bildung einer kritischen Function zwar ähnliche, aber doch abgeänderte Wege erforderlich, auf die wir bei Behandlung der Lösbarkeitskriterien je nach Bedürfniss specieller eingehen werden. Die Combination der eigentlichen Werthigkeiten, die von j abhängig sind, mit den rein oder wesentlich permutativen, sowie die Bildung irgend einer kritischen Function bleibt aber der Leitfaden. Die Feststellung der Lösbarkeitsnormen und der zugehörigen Lösungswege ist schon in ihrem bisherigen geschichtlichen Bestande danach geartet, bezüglich unserer neuen Wendungen eine eingehendere Hervorhebung in einem besondern Capitel räthlich zu machen. Dort wird das, was auch über den geschichtlichen Thatsachenbestand hinausgeht, nämlich unsere Theorie der zusammengesetzten Grade, seinen natürlichen Platz haben; denn durch diese Theorie wird überhaupt erst die Rubrik der Lösbarkeitskriterien, die sich bisher wesentlich auf das Galoissche Gesetz für die Primgrade beschränkten, in umfassenderer Weise ausgefüllt.

Neuntes Capitel.

Lösbarkeitskriterien und Lösungswege für Gleichungen einfacher und zusammengesetzter Grade.

1. Für die primgradigen Gleichungen bildet der Galoissche Satz den ganzen Bestand dessen, was man über die Bedingungen der Lösbarkeit allgemein zu formuliren vermocht hat. In dem

halben Jahrhundert nach Galois ist nichts hinzugekommen. Bezüglich der zusammengesetzten Grade hat man aber so gut wie nichts; denn Abel und Galois haben sich hier nur auf vereinzelte Andeutungen und unbewiesene Aussprüche beschränkt. Der erstere gerieth bei der Untersuchung zusammengesetzter Grade sogar in eine Verfassung, welche ihn in einem Briefe an einen Freund sagen liess „le diable s'y mèle".

Obwohl es Abel nicht allzu schwer erschien, über die Primgrade zu einer Lösbarkeitsbedingung zu gelangen, so hat er sich doch auch in dieser Richtung einer Lösung nur genähert. Wenn sich unter den Wurzeln einer primgradigen Gleichung eine fände, die sich durch zwei andere rational ausdrücken liesse, so wäre, nahm er in gelegentlichen brieflichen Aeusserungen richtig an, die Gleichung lösbar. Bald nach Abels Tode gelangte Galois in seiner Weise und selbständig zu der allgemeinen Formulirung, es sei zur Lösbarkeit einer primgradigen Gleichung erforderlich und genügend, dass jede Wurzel eine rationale Function von zwei beliebigen andern sei. Selbstverständlich sind immer irreducible Gleichungen vorausgesetzt; denn für die reducibeln hat man diejenigen zu setzen, auf die sie zurückgeführt werden können, und dann erst nach den allgemeinen Kriterien zu fragen. Jener Galoissche Satz beruht auf Schlussarten, die noch heute nicht grade als mathematisch populär gelten und in der That auch bei Weitem nicht einfach genug sind. Wir werden daher hier eine eigne, zum Theil an unsere Ergebnisse über den Wurzelbau anknüpfende Ableitung der fraglichen Fundamentalwahrheit vorlegen. Wir halten uns hiebei wiederum zunächst an die Gleichung fünften Grades als an den vorbildlichen Typus.

Es war im vorigen Capitel festgestellt, dass die kritische Sechswerthigkeit von der Permutation dreier Wurzeln unter sich herrühre. Kann nun diese Sechswerthigkeit keine Irrationalität sein, so bleibt im Allgemeinen nur die Transcendenz und unter speciellen Voraussetzungen die Rationalität als Möglichkeit übrig. Eine Irrationalität könnte sie nur sein, wenn sie auf andere Irrationalitäten von weniger Werthen zurückführbar wäre. Wir haben nämlich im siebenten Capitel dargethan, dass die verschiedenen Wurzeln und rationalen Grössen, aus denen der algebraische Ausdruck einer Gleichungswurzel zusammengefügt ist, stets durch permutative Wurzelfunctionen ausgedrückt werden können, gleichviel ob man es mit einer irreducibeln oder mit einer reducibeln

Gleichung zu thun habe. Dieser Satz gilt demgemäss auch für die sechsgradige Gleichung, von der jene Sechswerthigkeit die Wurzel ist. Wie man sich nun auch eine algebraische Form für diese kritische Function zu denken versuchen möchte, so würde man jedenfalls annehmen müssen, alle darin vorkommenden und eingeschachtelten Irrationalitäten seien Ausdrücken äquivalent, die man durch Addition, Multiplication, Potenzirung u. s. w. aus den verschiedenen Permutationswerthen der kritischen Function zusammensetzen kann. Ein derartig zusammengesetzter Ausdruck kann jedoch durch keine cyklische oder multiplicative Permutation geändert werden, da seine Bestandtheile, wie im vorigen Capitel gezeigt, diese Art Versetzungen zulassen. Er könnte demgemäss nur durch solche Permutationen geändert werden, durch welche die kritische Function ihre sechs Werthe erhält. Liesse er aber noch irgend eine andere Versetzung zu, so wäre er zugleich symmetrisch; denn man kann durch Ausführung aller cyklischen und multiplicativen Permutationen jene etwa noch zulässige Versetzungsmöglichkeit auf andere Wurzeln übertragen; und da durch jene Permutationen der Werth der Function nicht geändert wird, so ist ersichtlich, dass eine solche Versetzung hienach bei allen Wurzeln würde platzgreifen können. Der fragliche Functionsausdruck müsste also die Eigenschaft haben, dass, wenn irgend zwei Wurzeln versetzt werden dürften, ohne dass, sein Werth geändert würde, dieselbe Versetzung an zwei beliebigen Wurzeln ausgeführt werden könnte; eine derartige Voraussetzung aber macht ihn symmetrisch. Jede Irrationalität also, welche in dem hypothetisch angenommenen irrational algebraischen Ausdruck der kritischen Function enthalten wäre, müsste eine entweder sechswerthige oder aber symmetrische Wurzelfunction sein. Wäre sie symmetrisch, so wäre sie hiemit auch einwerthig und rational. Es bleibt also nur übrig, dass sie sechswerthig sei; denn unserm bisherigen Beweise gemäss kann es zwischen der Sechswerthigkeit und der Einwerthigkeit kein Drittes geben. Die innersten Irrationalitäten im Bau der Gleichungswurzeln sechsten Grades müssten also sechste Wurzeln aus rationalen Grössen sein. Erhebt man aber eine sechste Wurzel ins Quadrat, so erhält man eine Dreiwerthigkeit, was bei der sechswerthigen Wurzelfunction, wie vorher nachgewiesen, nicht der Fall sein kann. Dies ist ein Widerspruch, der die Voraussetzung, dass die kritische Sechswerthigkeit eine algebraische Irrationalität sein könne, unzulässig macht. Mit

dieser Nachweisung ist in unserer neuen und kurzen Weise das entschieden, bezüglich dessen Lagrange die Frage noch offen liess, indem er äusserte, es werde sich schwer a priori absehen lassen, ob jene Resolvente sechsten Grades noch zerlegt werden könne. Da wir nun an dieser Stelle keine transcendente Lösung, sondern die Vorbedingungen einer algebraischen suchen und da eine irrationale Lösung als unmöglich ausgeschlossen ist, so bleibt nur die Rationalisirung eines der kritischen sechs Werthe und, wenn man will, aller übrig.

Diese Rationalisirung bedeutet aber, wenn sie an einem der sechs Werthe der kritischen Function vollzogen werden soll, nichts Anderes, als ein Gleichgültigmachen der Permutirung derjenigen drei Wurzeln unter sich, durch deren Versetzungen aus dieser bestimmten Functionsform die fünf übrigen erzeugt werden. Wir haben nämlich diese bestimmte Ursache der kritischen Sechswerthigkeiten im vorigen Capitel bereits festgestellt, und die Beseitigung dieser Ursache ist daher auch die specielle Bedingung der Lösbarkeit. Die Elementarfunction muss sich auf eine Zwanzigwerthigkeit reduciren, sobald in ihr jene Ursache der Versechsfachung ihrer Werthe weggeschafft wird. Wir brauchen also die kritische Function, wenn wir nicht wollen, gar nicht unmittelbar zu betrachten und zu behandeln; denn wir wissen im Voraus, dass wenn wir in der Elementarfunction oder überhaupt in irgend einem Beisammen der fünf Wurzeln die Ursache der permutativen Sechswerthigkeiten aufheben, nur Zwanzigwerthigkeiten oder deren Reducirungen übrigbleiben können. Ist nun jede von den drei fraglichen Wurzeln, also etwa x_1, x_2 und x_3 eine rationale Function von x_4 und x_5, d. h. aus diesen und den Gleichungscoefficienten rational zusammengesetzt, so kann man sich x_1, x_2 und x_3 in lauter Wurzeln ausgedrückt denken, indem man für die Coefficienten die ihnen gleichen symmetrischen Wurzelfunctionen einsetzt. Alsdann mögen die drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 unter einander beliebig vertauscht werden, — eine Werthänderung tritt hiedurch nicht ein; denn die Vertauschung geht nur innerhalb symmetrischer Functionen, d. h. solcher Functionen vor sich, welche alle möglichen Versetzungen zulassen, ohne dass eine Werthänderung einträte. Durch diejenigen Permutationen aber, welche niemals zwei Wurzeln an ihrer Stelle lassen, wird die so umgeformte kritische Function zwar ihrer Form, aber nicht ihrem Werthe nach verändert. Da nämlich die Wurzeln einer irredu-

cibeln Gleichung sich durch nichts unterscheiden, was dazu berechtigte, irgend welchen unter ihnen eine besondere Stellung einzuräumen, so muss jede Beziehung unter ihnen, die sie alle umfasst, auch noch bestehen bleiben, wenn man sie beliebig vertauscht. Die drei rationalen Functionen, welche die Abhängigkeit dreier Wurzeln der Gleichung von zwei gegebenen ausdrücken, müssen daher dieselben bleiben, wenn man diese gegebenen mit den abhängigen auf irgend eine Weise vertauscht. Hieraus folgt, dass man in der umgeformten kritischen Function, ohne deren Werth zu ändern, alle Permutationen vornehmen kann, die niemals zwei Wurzeln an ihrer Stelle lassen, weil die dadurch entstehenden zwanzig verschiedenen Gestalten nur ebensoviele Umformungen der kritischen Function sind, die man auch erhalten hätte, wenn man anstatt x_4 und x_5 irgend ein anderes der zwanzig möglichen Wurzelpaare als unabhängig zu Grunde gelegt hätte. Addirt man diese zwanzig formverschiedenen, aber numerisch gleichen Werthe der umgeformten kritischen Function, so erhält man offenbar eine symmetrische Function; dividirt man noch durch zwanzig, so ist nunmehr die kritische Function in eine symmetrische verwandelt.

Der eine der sechs Werthe, d. h. die Function, welche ihn ausdrückt, ist hiemit rationalisirt. Mit jedem der übrigen fünf kann man es ebenso machen, indem man die verschiedenen ternären Wurzelgruppen durchgeht, und jede der jedesmaligen Gruppe angehörige Wurzel als rationale Function der beiden übrigen der fünf Wurzeln vorstellt. Hiemit gewinnt man wieder die sechs Werthe, aber als rationale Werthe, und so treten auch an Stelle der kritischen Function, die im Allgemeinen sechs transcendente Werthe haben müsste, unter jener Bedingung der algebraischen Lösbarkeit sechs rationale Werthe, d. h. bei einer wirklich ausgeführten Bestimmung sechs rationale Functionen der Coefficienten. Hiemit wissen wir zugleich, dass die ganze algebraische Constitution des Wurzelelements sich in Irrationalitäten fünfmalvierten Grades erschöpft, um dann in sechsfacher Weise in Rationalitäten auszulaufen. Die Sechswerthigkeiten bleiben also auch unter den Lösbarkeitsbedingungen bestehen; aber sie sind rational. Irrational könnten sie in keinem Falle sein; denn diese Unmöglichkeit ist eben die Ursache, dass die allgemeine Gleichung fünften Grades nicht algebraisch lösbar sein kann.

2. Alle Beweisarten, mittelst deren man bisher die Unmög-

lichkeit einer allgemeinen algebraischen Lösung der Gleichung fünften Grades nachgewiesen hat, führen, genauer besehen, auf den ebengenannten Grund zurück, dass die sechswerthige kritische Function nur rational oder transcendent, nicht aber irrational sein kann. Da aber eine solche Lösungsbedingung keine quantitative, sondern nur eine qualitative Beziehung zwischen den Coefficienten einschliesst, so bliebe die Möglichkeit offen und unwiderlegt, dass diese Beziehung bei allen irreducibeln Gleichungen fünften Grades thatsächlich stattfände. Abel hat freilich zu beweisen gesucht, dass ein Werth einer mehrwerthigen Wurzelfunction nicht einer symmetrischen gleich sein könne, indem er sich darauf stützte, dass jede Gleichung zwischen den Wurzeln bestehen bleibe, wenn man dieselben beliebig permutire. Diese Voraussetzung, welche auch den von den Nachtretern Abels gemachten Modificationen seines Beweises zu Grunde liegt, wurde von Abel selbst nicht einmal besonders hervorgehoben, sondern als völlig selbstverständlich unmerklich in sein Raisonnement eingeführt. Sie ist auch thatsächlich nicht richtig, wenn eine Gleichung algebraisch lösbar ist, und die ganze Weisheit würde deshalb auf den tautologischen Satz hinauslaufen, dass eine Gleichung nur dann algebraisch lösbar sein könne, wenn sie algebraisch lösbar ist. Wir werden jedoch diese Lücke des Unlösbarkeitsbeweises hier ergänzen. Die kritische sechswerthige Function und die ihr im algebraischen Lösbarkeitsfalle entsprechende symmetrische Function sind zwei der Form nach verschiedene Functionen derselben fünf Veränderlichen. Sie müssen also, von einander abgezogen, eine nicht identische Gleichung zwischen fünf Veränderlichen liefern. Diese Gleichung schliesst eine quantitative Beziehung zwischen den fünf Grössen ein; und wenn vier beliebig gewählt werden, muss die fünfte davon abhängig sein. In diesem Fall hätte man aber keine allgemeine Gleichung mehr, weil die Wurzeln in einer quantitativen, vom Werthe der Coefficienten unabhängigen Beziehung zu einander ständen. Jede Gleichung fünften Grades, für welche die kritische Function einer symmetrischen Function gleich ist, muss also eine specielle sein, und hiemit ist bewiesen, dass bei der allgemeinen Gleichung fünften Grades diese Beziehung nicht stattfinden kann.

Man könnte hiegegen noch einwenden, dass, wenn auch für die Gleichung fünften Grades kein allgemeiner algebraischer Wurzelausdruck besteht, er doch für jede einzelne Gleichung vorhanden

sein möchte. Aber ein derartiger Ausdruck müsste doch stets eine bestimmte Beziehung zwischen den Coefficienten voraussetzen und würde also, wenn diese Beziehung transcendent wäre, auch Transcendentes miteinschliessen. Demgemäss sind nur besondere Fälle der Gleichungen fünften Grades algebraisch lösbar, während in allen andern Fällen die Wurzeln nur durch transcendente oder vielmehr transcendent und algebraisch gemischte Functionen der Coefficienten ausgedrückt werden können. Die besondern Fälle algebraischer Wurzelformen lassen sich einer allgemeinen transcendenten Lösung unterordnen, indem sie diejenigen vereinzelten Fälle sind, in denen der Werth einer der allgemeinen Form nach transcendenten Function algebraisch ist. Diese Schlussfolgerungen finden offenbar nicht blos auf die sechswerthige kritische Function und die Gleichung fünften Grades Anwendung, sondern allemal, wo die algebraische Lösbarkeit einer Gleichung von der Rationalisirung eines Werthes einer unsymmetrischen Wurzelfunction abhängt. Wir werden daher künftig als selbstverständlich voraussetzen, dass eine Gleichung nur in besondern Fällen algebraisch lösbar sein kann, sobald ihre kritische Function mehrwerthig ist.

Hätten wir anstatt des fünften Grades den siebenten, so stellten sich die eigentlichen Werthigkeiten auf 7.6 und die kritischen Werthe rein permutativen Charakters auf 5.4.3.2. Diese 120 kritischen Werthe rühren von der Versetzung von fünf Wurzeln unter sich her. Lässt man daher jede der fünf eine rationale Function der zwei übrigen sein, so wird die betreffende kritische Function symmetrisch und hiemit rational. Ihre Hundertzwanzigwerthigkeit ist weggeschafft. Auf dieselbe Weise kann jeder der 120 Werthe rationalisirt und so die Gleichung auf 120fache Weise lösbar gemacht werden. Was nun aber die Eigenschaft der kritischen Function anbetrifft, durch keinen irrational algebraischen Ausdruck darstellbar zu sein, so erweist sie sich auch auf analoge Weise, wie oben im Falle der Gleichung fünften Grades. Die in dem Ausdruck der Wurzeln der Gleichung 120sten Grades, die der kritischen Function entspricht, etwa enthaltenen Irrationalitäten müssten Wurzelfunctionen sein, die durch keine cyklische oder multiplicative Permutation geändert würden. Auf dieselbe Weise, wie bei der sechswerthigen Function, ergiebt sich alsdann, dass solche Wurzelfunctionen entweder 120 Werthe haben oder einwerthig und symmetrisch sein müssten; ein Drittes

ist nicht möglich. Die innersten Irrationalitäten im Bau der Gleichungswurzeln 120sten Grades müssten also 120ste Wurzeln aus rationalen Grössen sein. Erhebt man aber eine 120ste Wurzel ins Quadrat, so erhält man eine Sechzigwerthigkeit, während andererseits das Quadrat der entsprechenden Wurzelfunction 120-werthig bleiben müsste. Man kann sich nämlich auf analoge Weise, wie oben bei der Gleichung fünften Grades und an der Sechswerthigkeit geschehen, auch hier überzeugen, dass eine rationale Function einer solchen 120werthigen Wurzelfunction entweder wiederum 120werthig oder einwerthig und symmetrisch werden müsse. Nun wäre die quadrirte Function, wie gesagt, sechzigwerthig, also weder symmetrisch noch 120werthig, womit der Widerspruch greifbar genug zu Tage liegt. Die versuchte Voraussetzung also, es könnte die Hundertzwanzigwerthigkeit eine Irrationalität sein, muss Angesichts dieses aus ihr folgenden Widerspruchs aufgegeben werden und es bleiben nur die Transcendenz und die Rationalität als Möglichkeiten und zwar für den algebraischen Fall einzig und allein die Rationalität als Nothwendigkeit übrig.

Handelte es sich überhaupt um eine Primzahl p, so sind die algebraisch constituirten, d. h. durch die Vorsetzungen gekennzeichneten Werthe in der Anzahl $p\ (p-1)$, und die kritischen in der Anzahl $(p-2)\ (p-3)\ldots.2$ vorhanden. Diese letztern $(p-2)!$ Werthe rühren von der Versetzung von $p-2$ Elementen unter sich her. Beseitigt man die werthändernde Eigenschaft dieser Versetzungen dadurch, dass man jede der $p-2$ Wurzeln als eine rationale Function der zwei übrigen voraussetzt, so wird ein Werth der kritischen Function rational und hiemit die Gleichung lösbar. Analog kann man mit den andern Werthen verfahren. Auf gleiche Weise, wie oben für den Fall des siebenten Grades, erweist sich auch die entscheidende Eigenschaft der kritischen Function, entweder nur transcendent oder rational, nicht aber algebraisch irrational sein zu können. Hiemit weiss man also nicht blos, dass die Gleichung lösbar ist, falls $p-2$ Wurzeln die betreffende Eigenschaft haben, sondern auch, dass sie nicht etwa durch Beschaffung eines irrationalen algebraischen Werths der kritischen Function gelöst werden kann, weil die Annahme einer solchen Beschaffung auf einen Widerspruch führt. Uebrigens sei noch bemerkt, dass sich auch erweisen lässt, wie die fragliche Eigenschaft der $p-2$ Wurzeln schon daraus folgt, dass eine

Wurzel dieselbe hat. Hiemit ist zugleich die oben angeführte, von Abel aufgestellte, aber von ihm nicht bewiesene Formulirung als diejenige gekennzeichnet, welche unzweideutig ein Minimumkriterium der Lösbarkeit ausspricht, d. h. in die Angabe der Lösbarkeitsbedingung nicht noch Folgerungen aus dieser Bedingung mit aufnimmt. Letzteres that Galois, indem er von jeder der andern Wurzeln die fragliche Eigenschaft ausdrücklich verlangte, während doch mit der Eigenschaft einer einzigen Wurzel auch die gleiche Eigenschaft bei den übrigen gesetzt ist. In diesem Zuvielsagen liegt ein formeller Fehler. Dagegen hat Galois vor Abel voraus, dass er es ausdrücklich ausspricht, dass ein Weniger an Bedingungen, als in seinem Merkmal stecken, nicht hinreichen würde. Die Nichterforderlichkeit eines Mehr an Bedingungen lag bereits unmittelbar in der Abelschen Formulirung. Abels und Galois' wesentlich gleichwerthige Sätze verbessern sich daher gegenseitig. Man vergesse jedoch nicht, dass der entscheidende Fortschritt Galois über Abel hinaus darin bestand, dass er nicht nur einen Satz, sondern einen Beweis dazu gab, während es Abel nur vergönnt gewesen war, zu einer brieflichen Ankündigung eines Satzes zu gelangen, ohne einen Beweis hinzuzufügen.

3. An das Lösungskriterium schliesst sich die Frage nach dem Lösungswege. Einen solchen hat man bisher immer nur unter der Voraussetzung angeben können, dass thatsächlich die erforderlichen Beziehungen zwischen den Wurzeln vorlagen. Bei den Primgraden oder, um gleich wieder einen bestimmten Typus vor Augen zu haben, bei dem fünften Grade wird man also eine dem Galoisschen Satze oder, was hiebei dasselbe ist, der Abelschen Formulirung entsprechende Beziehung dreier Wurzeln, etwa $x_3 = R(x_4, x_5)$ als gegeben vor sich haben müssen. Eine solche Gleichung zwischen drei Wurzeln vertritt die zugehörige Hauptgleichung und zwar hier die Gleichung fünften Grades in der Beschränkung auf den Lösbarkeitsfall. Die gegebene Ersatzgleichung zwischen den drei Wurzeln, zusammen mit der Bemerkung, dass es sich um Wurzeln der Gleichung eines bestimmten, also hier des fünften Grades handle, muss Alles liefern, was man braucht. Die Hauptgleichung mit ihren Coefficienten braucht gar nicht gegeben zu sein. Es ist nicht nöthig, sie irgendwie zu kennen; denn was an Coefficienten nöthig ist, muss schon in der Ersatzgleichung, d. h. in der Dreiwurzelgleichung, enthalten sein.

Hienach ist es nicht uninteressant und in einigen Punkten

auch für die Lösung nothwendig, sich zu vergewissern, wie aus der einen für drei Wurzeln gegebenen Gleichung auch andere Gleichungen für je drei in beliebiger Weise anders combinirte Wurzeln folgen. An Stelle des bisherigen Beweises aus cyklischen Permutationen können wir einen geben, der auf die Natur der zusammengesetzten Vorzeichen gegründet ist. Er stützt sich auf unsere Wurzelform und auf den Umstand, dass aus dieser ersichtlich ist, wie die Wurzeln Functionen von j und den Wurzelelementen sind. Man hat $x_1 = jl + j^2m + j^3n + j^4o$, $x_2 = j^2l + j^4m + jn + j^3o$ u. s. w. Setzt man diese werthigen Polynome in die Dreiwurzelgleichung ein, so hat man $j^3l + jm + j^4n + j^2o = R(j^4l + j^3m + j^2n + jo, l + m + n + o)$. Die rechte Seite der Gleichung muss, wenn man sich die von der rationalen Function R angezeigten Operationen vollzogen denkt, im Allgemeinen ein ebensolches werthiges Polynom werden. Auch würde dies noch der Fall sein, wenn statt x_5 einer der primitiven Fälle der Wurzelform stände; denn alle vier primitiven Fälle der Wurzelform enthalten j, j^2, j^3 und j^4, und nur die Reihenfolge ist eine verschiedene. In jedem Falle entsteht also aus der Ersatzgleichung auf der rechten Seite ein werthiges Polynom $jr_1 + j^2r_2 + j^3r_3 + j^4r_4 + j^5r_5$, worin r_1, r_2 u. s. w. rationale Functionen von l, m, n und o sein müssen. Man hat also die Gleichung $j^3l + jm + j^4n + j^2o = jr_1 + j^2r_2 + j^3r_3 + j^4r_4 + j^5r_5$ oder $j(m - r_1) + j^2(o - r_2) + j^3(l - r_3) + j^4(n - r_4) - j^5r_5 = 0$.

Der Schluss auf das Zerfallen dieser Gleichung in Partialgleichungen beruht, da hier j nach der Voraussetzung nur als ein einziger Werth gegeben ist und eben die Möglichkeit, dafür die andern j zu setzen, erst festgestellt werden soll, auf dem Umstande, dass die Grössen r_1, $r_2, \ldots$ sowie auch l, $m, \ldots$ in sich kein j enthalten. Schon bei anderer Gelegenheit haben wir allgemein den Satz erwiesen, dass ein mit derartigen Vorsetzungen behaftetes Polynom, dessen absolute Glieder die Vorsetzungen nicht weiter enthalten, also von diesen Vorsetzungen unabhängig sind, Angesichts einer Setzung gleich Null auch die Nothwendigkeit einschliesst, dass jene absoluten Glieder einzeln gleich Null seien. Diese unsere Erweiterung der am imaginären Binom allbekannten Wahrheit wurde in der ersten Nummer des siebenten Capitels eingehender dargelegt. Dort wurde auch nachgewiesen, dass in Folge des fraglichen Zerfallens in Partialgleichungen sich

auch die Berechtigung ergiebt, an die Stelle des einen Werthes von j die übrigen zu setzen. Da nämlich die absoluten Glieder Null sind, so bleibt die Gleichung auch bestehen, wenn man für j seine andern Werthe setzt. Ein in jener Weise signirtes oder, wenn man es lieber so nennen will, (durch Vorsetzungen) charakterisirtes Polynom, welches gleich Null ist, wird demgemäss auch ein vielwerthiges sein und als solches mit Null in Gleichung stehen.

Durch das Zerfallen in Partialgleichungen, welches auf der Eigenschaft eines, wenn auch ausdrücklich einwerthig gesetzten, so doch signirten Polynoms beruht, erhalten wir $m - r_1 = 0$, $o - r_2 = 0$, $l - r_3 = 0$, $n - r_4 = 0$, $r_5 = 0$. Es sind dies, wie wir nebenbei bemerken, für die Wurzelelemente genügende Bestimmungsgleichungen und sozusagen specielle Ersatzgleichungen für unsere allgemeinen Gleichungen zwischen den Coefficienten und den Elementen. Sie verhalten sich zu diesen allgemeinen Coefficientengleichungen, wie die rationale Ersatzgleichung in den drei Wurzeln zu der Hauptgleichung. Halten wir uns jedoch an den hier leitenden Hauptgesichtspunkt, nämlich an die verschiedenen Nebengestalten dieser Ersatzgleichung. Wir hatten die drei Wurzeln x_3, x_4 und x_5 uns in Anknüpfung an bestimmte Werthe von j durch drei entsprechende Gestalten der Wurzelform vorgestellt. Aus den fraglichen Partialgleichungen zwischen Elementen und Coefficienten ist nun klar, dass ein Kern der Beziehungen von den verschiedenen Setzungen der j unabhängig ist. Jene Polynomgleichung mit ihren Folgen bliebe bestehen, wenn man j^2, j^3, ... an die Stelle von j setzte. Die Polynomgleichung ist aber nichts Anderes, als die Ersatzgleichung, in welcher man die Wurzelformen substituirt hat. Betrachtet man sie daher in ihrer ersten Form, in welcher die Operationen noch nicht als vollzogen gedacht wurden, d. h. in der obigen Form $j^3 l + jm + j^4 n + j^2 o = R\,(j^4 l + j^3 m + j^2 n + j o,\ l + m + n + o)$, so ist klar, dass man auch in dieser Form die andern Werthe für j einsetzen darf.

Der Kürze wegen und auch zur unmittelbaren Bezeichnung der Sache können wir die Wurzeln statt durch Indices durch die verschiedenen Potenzen von j unterscheiden, von denen sie Functionen sind. Wir werden also $x(j)$, $x(j^2)$, ... statt x_1, x_2, ... schreiben dürfen und uns dabei hinzuzudenken haben, dass beispielsweise mit $x(j^2)$ diejenige Gestalt der Wurzelform gemeint

ist, welche entsteht, wenn wir in der als die erste hingestellten Form j^2 an die Stelle von j setzen. Bei diesem Sinne der Bezeichnung können wir nun das Ergebniss unserer Nachweisungen dahin ausdrücken, dass wir die Ersatzgleichung, die nun die Form $x(j^3) = R[x(j^4), x(j^5)]$ annimmt, durch Einsetzung von j^2 und j^4 an Stelle von j umwandeln dürfen. Auf diese Weise erhalten wir $x(j) = R[x(j^3), x(j^5)]$ und $x(j^2) = R[x(j), x(j^5)]$. In die Sprache der Indices zurückübertragen, haben wir demgemäss die drei Gleichungen $x_3 = R(x_4, x_5)$, $x_1 = R(x_3, x_5)$, $x_2 = R(x_1, x_5)$. Substituiren wir in der zweiten aus der ersten den Werth von x_3, so erhalten wir eine Schachtelung der Function R, und wenn wir diese combinirte Function der Einfachheit wegen mit R' bezeichnen, so haben wir $x_1 = R'(x_4, x_5)$. Substituiren wir diesen Werth von x_1 in die dritte Gleichung, so erhalten wir, wenn wir die so entstehende Functionsform abkürzend mit R'' bezeichnen, die dritte erforderliche Wurzel als Function derselben zwei, nämlich $x_2 = R''(x_4, x_5)$. Auf diese Weise sind aus der einen Functionsform R die beiden andern zu gewinnen. Erschöpft sind hiemit die Gestalten der Ersatzgleichung nicht; aber wir brauchen für unsern nächsten Zweck auch nicht die Ersatzgleichung in ihrer ganzen Tragweite, vermöge deren sie alle fünf Wurzeln wie fünf Unbekannte bestimmt. Durch die letztere Rolle wird der Name Ersatzgleichung erst völlig berechtigt. Da wir aber hier zunächst in den gewöhnlichen Lösungsweg einzulenken haben, so genügt uns der Ausdruck der drei Wurzeln in den zwei andern, um in Anknüpfung an gewisse Folgerungen aus den allgemeinen Eigenschaften einer Gleichung fünften Grades und an die Coefficienten dieser Gleichung alle Wurzeln zu bestimmen.

4. Um die Gleichung wirklich zu lösen, ist zunächst die kritische Function zu rationalisiren und es genügt, wenn dies für einen der sechs Werthe geschieht; denn man erhält durch die Wiederholung der Operation an den fünf übrigen bei der Zusammensetzung der Wurzeln aus den Elementen zwar andere Formen, aber nicht andere Werthe. Ueberdies ist die Methode klar, sobald sie sich für einen der sechs kritischen Werthe erläutert findet. Nun geschieht jene Rationalisirung dadurch, dass man nach Maassgabe der Ersatzgleichung, wie sie in der vorigen Nummer gekennzeichnet ist, die drei rationalen Wurzelausdrücke, also etwa $x_3 = R(x_4, x_5)$, $x_1 = R'(x_4, x_5)$, $x_2 = R''(x_4, x_5)$ in die kritische Function einsetzt. Hiemit ist letztere eine rationale

Function von x_4 und x_5. Setzt man an die Stelle der darin vorkommenden Coefficienten deren Wurzelwerthe, so wird die kritische Function eine symmetrische Function der Wurzeln. Nun lässt sich nach bekannten einfachen Regeln jede symmetrische Function rational in lauter Coefficienten ausdrücken. Es ist dies sozusagen nur eine Uebersetzerarbeit, die in eine ähnliche leichte Operationsgattung gehört, wie die, vermöge deren man beispielsweise die Coefficienten durch Summen der Wurzelpotenzen ausdrückt. Es ist also die nunmehr in eine symmetrische Wurzelfunction umgewandelte kritische Function aus der Sprache der Wurzeln in die der Coefficienten zu übertragen. Auf diese Weise erhält man in den Coefficienten, wenn man die kritische Function mit Rücksicht auf die betreffenden Zahlencoefficienten genau gleich $l^5 + m^5 + n^5 + o^5$ bestimmt hat, den Werth für diese letztere Elementefunction. Diese liefert nun aber, negativ gesetzt und zu einem Viertel genommen, unmittelbar das erste Wurzelelement zweiter Ordnung, d. h. das erste Glied, welches unter den fünften Wurzeln, durch welche die Elemente erster Ordnung repräsentirt werden, zu stehen kommt.

Zur vollständigen Darstellung des Wurzelelements und hiemit aller Wurzeln ist nun nichts weiter mehr nöthig, als auf analoge Weise auch die andern drei Wurzelelemente zweiter Ordnung zu ermitteln. Nach den näheren Bestimmungen, welche über den Begriff und die Eigenschaften der Wurzelelemente zweiter Ordnung in der vierten Nummer des siebenten Capitels platzgefunden haben, lassen sich diese als Functionen der Elemente erster Ordnung und folglich auch der Wurzeln ausdrücken. Eine solche Function war es ja auch, die wir bereits für das erste Element zweiter Ordnung benützt haben. Bei den drei irrationalen Elementen zweiter Ordnung sind es deren entsprechende Potenzen, für welche wir die fraglichen zu rationalisirenden Functionen suchen müssen. Angesichts der Wahl zwischen den verschiedenen Wurzelformen vierten Grades ist hier nicht die aus drei Quadratwurzeln bestehende, sondern die allgemeine die zweckmässigste, weil sie in der algebraischen Wurzelformel für den fünften Grad mit den beiden vierten und der einen zweiten Wurzel alle Irrationalitäten abschliesst, wie dies im siebenten Capitel nachgewiesen worden ist. Die ebenmässige Form in lauter Quadratwurzeln würde unter zweien derselben noch eine weitere Quadratwurzel einschliessen. Demgemäss haben wir, wenn wir

mit den griechischen Buchstaben die Elemente zweiter Ordnung bezeichnen, $l^5 = \varkappa + \iota\lambda + \iota^2\mu + \iota^3\nu$, $m^5 = \varkappa + \iota^2\lambda + \iota^4\mu + \iota^2\nu$, $n^5 = \varkappa + \iota^3\lambda + \iota^2\mu + \iota\nu$ und $o^5 = \varkappa + \lambda + \mu + \nu$, wobei ι eine primitive vierte Einheitswurzel vorstellt. Wir können nun in derselben Art, in welcher wir früher aus der Wurzelform die umgekehrte Function, nämlich das Element als Function der Wurzeln abgeleitet haben, auch hier verfahren; denn die vier fünften Potenzen sind die vier Wurzeln der fraglichen Gleichung vierten Grades. Da $\varkappa$ schon oben bestimmt war, so haben wir nur noch die drei irrationalen Elemente auszudrücken und erhalten $\lambda = \iota^3 l^5 + \iota^2 m^5 + \iota n^5 + \iota^4 o^5$, $\mu = \iota^2 l^5 + \iota^4 m^5 + \iota^2 n^5 + \iota^4 o^5$ und $\nu = \iota l^5 + \iota^2 m^5 + \iota^3 n^5 + \iota^4 o^5$. Nehmen wir hievon die entsprechenden Potenzen, so sind die Functionen λ^4, μ^2 und ν^4 sechswerthig und dem, was wir kurzweg die kritische Function genannt haben, in ihren permutativen Eigenschaften völlig analog. Nachdem sie aus der Sprache der Elemente in die der Wurzeln übertragen sind, werden sie ebenfalls auf die oben gekennzeichnete Weise rationalisirt. Für die drei Wurzeln, deren Permutation die Werthunterschiede hervorbringt, setzt man deren rationale Functionen, dann an Stelle der darin vorkommenden Coefficienten lauter Wurzeln und verwandelt die so entstehende symmetrische Function in einen blossen Coefficientenausdruck. Auf diese Weise haben wir mit den Potenzen der irrationalen Wurzelelemente zweiter Ordnung alle Bestandtheile, aus denen sich der algebraische Wurzelbau zusammensetzt. Weitere Irrationalitäten können darin nicht vorkommen.

Was aber die Werthigkeiten oder vielmehr Signirungen anbetrifft, die in dem Ausdruck der Potenzen der irrationalen Elemente zweiter Ordnung vor den einzelnen Wurzelfunctionen zu stehen kommen, so ergeben sich für sie zunächst mehrgliedrige Verbindungen von j und ι, sowie von deren Potenzen. Man kann jedoch von vornherein dem Hauptverfahren in einem Nebenpunkt eine solche besondere Gestalt geben, dass zuletzt in λ^4, μ^2 und ν^4 nur die durch ι und seine Potenzen vertretenen Signirungen übrig bleiben. Nennt man der Abkürzung wegen die vier Wurzeln, um die es sich hier handelt, $\xi(\iota)$, $\xi(\iota^2)$, $\xi(\iota^3)$ und $\xi(\iota^4)$, je nachdem sie die nach den betreffenden Potenzen gebildeten Gestalten der Wurzelform vorstellen, so lässt sich die für unsern Zweck erforderliche Combinationsart von j und ι, die man unter den willkürlichen Zusammenstellungen auszuwählen

hat, folgendermaassen bestimmen. Da l^5, m^5, n^5 und o^5 nichts Anderes sind als $[l(j)]^5$, $[l(j^2)]^5$, $[l(j^3)]^5$ und $[l(j^4)]^5$ oder auch $l^5(j)$, $l^5(j^2)$, $l^5(j^3)$ und $l^5(j^4)$, wobei diese Formen als Functionen von j nach Maassgabe der Elementarfunction aufgefasst sind und durch die Einsetzung der betreffenden Potenzen in die Elementarfunction entstehen, so kann man die zu formulirende Ordnung auch symbolisch leicht festhalten. Unter den Gleichsetzungen der charakterisirten ξ einerseits und der charakterisirten l^5 andererseits, die der Vertauschbarkeit der Wurzeln wegen ganz beliebig sind, hat man für den fraglichen Zweck nur solche zu wählen, vermöge deren die Exponenten der Charakteristik j eine geometrische Reihe mit dem Quotienten 2 oder eine mit dem Quotienten 3 bilden, während die Exponenten der Charakteristik ι in der gewöhnlichen Reihenfolge 1, 2, 3, 4 verbleiben. Durch dieses Arrangement erreicht man, dass in den fraglichen Schlussausdrücken alle j verschwinden. Man mache also etwa $\xi(\iota) = l^5(j) = l^5$, $\xi(\iota^2) = l^5(j^2) = m^5$, $\xi(\iota^3) = l^5(j^4) = o^5$ und $\xi(\iota^4) = l^5(j^8) = n^5$, wobei gegen unsere obigen Ansetzungen keine weitere Veränderung stattgefunden hat, als dass n und o gegenseitig vertauscht worden sind. Eine auch nur schematische Ausführung der Rechnung, etwa nach dem obigen Schema $l^5 = K + jL + j^2M + j^3N + j^4O$, würde hier zuviel Raum einnehmen. Auch haben wir die ganze Angabe, wie sich das Wegfallen der j darthun lasse, nur hergesetzt, um etwaigen Bedenken über die Schlussgestalt der Functionen für λ^4, μ^2 und ν^4 zu begegnen. Nicht nur jede dieser Functionen im Ganzen, sondern auch in jedem ihrer vier Glieder ist sechswerthig. Die nothwendige Voraussetzung ist dabei, dass man in jeder dem ι einen ganz bestimmten Werth giebt, so dass jedes der werthigen Polynome nur mit einem seiner Werthe gilt, wie dies auch in den einzelnen Gestalten der Wurzelformen der Fall ist. Wollte man dies nicht thun, sondern ι vierwerthig nehmen, so würde sich λ^4 in μ^4, ν^4 und $\varkappa^4$ verwandeln und analog würde μ^2 in $\varkappa^2$ übergehen. Man würde also die Wurzelelemente zweiter Ordnung nicht in ihrer speciellen Unterscheidung, sondern überhaupt das mehrwerthige Wurzelelement zweiter Ordnung mit seinen sämmtlichen Werthen im Allgemeinen vor Augen haben. In diesem Sinne müsste man sagen, dass auch noch λ^4 vierundzwanzigwerthig wäre, indem es die vierten Potenzen der andern Wurzelelemente mitverträte.

Was wir über den Lösungsweg am Typus des fünften Grades ausgeführt haben, lässt sich nach Maassgabe der frühern Fest-

stellungen leicht für jeglichen Primgrad analog wiederholen; denn eine wesentliche Veränderung greift dabei nicht Platz. Die Bildung der kritischen Function ist keine andere; sie ist die Summe der $p$ten Potenzen, die von jedem der $p - 1$ Elemente genommen und in die Wurzelsprache übersetzt werden. Auf Grund unserer allgemeinen Schematisirung aller Wurzelformen im siebenten Capitel ist die Bildung der kritischen Functionen sowie alles Uebrige an feste Regeln gebunden und fast blosse Operationstechnik. Auch die Herleitung von $p - 2$ Formen der Ersatzgleichung aus einer gegebenen Form gestaltet sich unserm obigen Verfahren völlig analog. Schliesslich sind auch die $p - 2$ irrationalen Elemente zweiter Ordnung oder vielmehr deren verschiedene Potenzen in der dem obigen Verfahren entsprechenden Weise in Elementen erster Ordnung und vermittelst dieser in Wurzeln auszudrücken, so auf Functionen mit kritischen Werthen zurückzuführen und dann auf Grund der Ersatzgleichungen zu rationalisiren.

5. Im Interesse grösster Allgemeinheit ist es, ehe wir auf die zusammengesetzten Grade eingehen, erforderlich, das zu formuliren, was in den Lösbarkeitskriterien den primzahligen und den übrigen Gleichungen gemeinsam bleibt. Nicht blos in dem Verfahren bei Primgraden, sondern auch in der entsprechenden Methode, die wir im Falle zusammengesetzter Exponenten anwenden, ergiebt sich schliesslich eine Function mit kritischen, d. h. im Allgemeinen nicht mehr algebraisch und niemals irrational algebraisch darstellbaren Werthen, und diese Function muss hier wie dort eine rationale Function der Coefficienten werden, wenn die Gleichung eine algebraische Lösung finden soll. In diesem Grundgesetz der Rationalisirung der kritischen Function ist hienach zwischen den Gradarten kein Unterschied zu machen. Derartige Unterschiede stellen sich erst bei specielleren Folgerungen aus dieser unserer Grundregel ein. Der Galoissche Satz ist nichts als eine solche speciellere Folgerung; denn er enthält nur die bestimmtere Wurzelbeziehung, die an die Stelle der Rationalsetzung der kritischen Function tritt und von der die Rationalmachung der letzteren abhängt. In Rücksicht auf die zusammengesetzten Grade ist man nun noch nicht einmal dahin gelangt, jenes allgemeine Erforderniss, sei es allgemein oder gar in bestimmteren Vorbedingungen, zu erweisen. Was man an Bewiesenem hat, ist ausschliesslich der Galoissche Satz. Für die zusammengesetzten Grade ist nicht einmal die durchgängige Existenz

einer kritischen Function allgemein nachgewiesen, geschweige daran eine bestimmte Folgerung geknüpft worden. Die Existenz einer kritischen Function lässt sich aber in diesen Fällen ebenso wie bei den Primgraden aus der nothwendigen Wurzelform darthun, die wir schon im siebenten Capitel hergeleitet haben. Wir wollen jedoch von der Permutationsalgebra selbst ausgehen und, um die Anschaulichkeit zu erhöhen, den natürlichen Weg der Auffindungen selbst gehen und vor weiteren Verallgemeinerungen die Aufmerksamkeit auf den maassgebenden Typusfall concentriren. Das erste Typusbeispiel ist hier die Gleichung sechsten Grades, wie es früher diejenige des fünften war.

Zuvor sei jedoch noch eine allgemeine Bemerkung vorausgeschickt, die von der Art ist, einen tiefer liegenden Grund zu haben. Es reicht nämlich alle algebraische Constitution von Gleichungswurzeln im Allgemeinen nicht weiter, als bis wohin der Leitfaden der werthigen Vorsetzungen führt. Ist man mit diesem Leitfaden zu Ende, so beginnen überall die transcendenten, d. h. die kritischen Werthe, und jegliche algebraische Lösung beruht darauf, Functionen mit kritischen Werthen künstlich rational zu machen. Ist die specielle gegebene Gleichung ihrer Natur nach eine algebraisch lösbare, so tritt das erforderliche Rationalwerden von selbst ein. Man hat aber auch in diesem Falle nöthig, die besondern Umstände, also etwa die besondern Beziehungen zwischen den Wurzeln, ausdrücklich zu Hülfe zu nehmen, damit die Rationalität der kritischen Werthe thatsächlich sichtbar werde. Was aber den angegebenen allgemeinen Satz von der markirbaren Tragweite der algebraischen Constitution der Wurzeln betrifft, so ist es grade unser Werthigkeitssystem, welches in den Stand gesetzt hat, ihn festzustellen und auszusprechen. Die Kluft von Signirungswerthen und ausschliesslich permutativen Werthen musste sich uns aufdrängen und in der That ist hier die natürliche Grenze zwischen dem algebraisch Darstellbaren und dem Transcendenten, oder anders ausgedrückt, es hört jenseit dieser Grenze die Möglichkeit weiterer algebraischer Irrationalitäten auf. Wie mannigfaltig sich auch die besondern Fälle gestalten mögen, so werden wir diesen principiellen Leitfaden nie aus der Hand zu lassen haben. Auch wird er sich zunächst bei der Gleichung sechsten Grades bewähren. Das durch und seit Lagrange eingeführte System zieht Alles unter die Permutationen; es unterscheidet noch nicht und diesem System

konnte sich daher die fragliche wichtige Grenze nicht bemerklich machen.

6. Wie überall sonst, so haben wir auch bei der Gleichung sechsten Grades von der Wurzelform auszugehen, und zwar können wir hiebei zunächst noch von den speciellen Wurzelformen absehen und die allgemeine Wurzelform benützen, wie sie sich nach Maassgabe der dritten Nummer des siebenten Capitels als eine Mischung von sechsten, dritten und zweiten Wurzeln ergiebt. Demgemäss haben wir $x = j e_1 + j^2 e_2 + j^3 e_3 + j^4 e_4 + j^5 e_5$, worin natürlich j die sechsten Einheitswurzeln vorstellt. Wir nehmen nun das einfachste Element e_3, welches in Beziehung auf Signirung nur zweiwerthig ist und drücken es nach dem früher angegebenen Verfahren in Wurzeln aus. So erhalten wir $e_3 = \frac{1}{6} (j^3 x_1 + j^6 x_2 + j^3 x_3 + j^6 x_4 + j^3 x_5 + j^6 x_6) = \frac{1}{6} [j^3 (x_1 + x_3 + x_5) + j^6 (x_2 + x_4 + x_6)]$. Wir lassen absichtlich j^3 und j^6 als Zeichen der Werthigkeit stehen und schreiben nicht etwa $\frac{1}{6} [-(x_1 + x_3 + x_5) + (x_2 + x_4 + x_6)]$. Die zwei Signirungswerthe, welche das Element hat, fallen mit der Quadrirung fort, d. h. es halbirt sich die Anzahl der Werthe. Auch darf man daran keinen Anstoss nehmen, dass auch in der Form der Potenz noch eine Signirung bestehen bleibt; diese repräsentirt für das individuelle Element ausdrücklich nur einen Werth; und wollte man sie noch mit einem zweiten Werth nehmen, so würde sich hiemit das Element in ein anderes, nämlich in das einwerthige rationale gleich Null verwandeln. Die Function für e_3^2 ist also als Ganzes und nicht blos in ihren Bestandtheilen von derjenigen Doppelwerthigkeit frei, welche durch die Signirung für e_3 gegeben war. Hieraus folgt nach dem früher Gesagten, dass wir in e_3^2 bereits die kritische Function vor uns haben. Wünschen wir sie aber von den ausdrücklich als einwerthig gesetzten j dennoch befreit, so brauchen wir nur einen ihrer signirungslosen Bestandtheile herauszunehmen und diesen als einfacheres Gebilde zur kritischen Function zu machen. Lassen wir die Zahlencoefficienten weg, so ergiebt sich auf diese Weise als einfachste kritische Function das Product der beiden ternären Wurzelsummen, also $(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4 + x_6)$. Diese Function ist, nebenbei bemerkt, hier auch ein blosses Vielfaches von e_3^2, nämlich $-9 e_3^2$.

Die Anzahl der Werthe der kritischen Function $K = (x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4 + x_6)$ bestimmt sich durch die Ueberlegung, dass von allen 2.3.4.5.6 Permutationen, welche zwischen

den sechs Wurzeln möglich sind, nur der sovielte Theil bestehen bleibt, als sich durch Rücksicht auf die nicht werthändernden Gruppen ergiebt. Zunächst ist die Versetzung der drei Wurzeln x_1, x_3 und x_5 unter sich gleichgültig und da diese Gruppe 2.3 Versetzungen ergiebt, so haben wir die Gesammtzahl durch 6 zu dividiren. Analog macht die Gruppe der drei andern Wurzeln x_2, x_4 und x_6 wiederum eine Division der Gesammtzahl mit nochmals 6 nöthig. Hiezu kommt noch eine Division mit 2, weil die beiden Wurzelsummen S_1 und S_2 mit einander vertauscht werden können, ohne den Werth des Products zu ändern. Die Zahl der werthändernden Permutationen, d. h. derjenigen, die durch blosses Hinüber- und Herübersetzen aus S_1 in S_2 und aus S_2 in S_1 entstehen, stellt sich daher auf $\frac{2.3.4.5.6}{6.6.2} = 10$. Nach unserer leitenden Grundregel ist diese zehnwerthige kritische Function im Allgemeinen transcendent und muss für die Lösbarkeitsfälle von dieser Transcendenz befreit werden. Wir würden einfach sagen können, sie müsste rational sein, wenn sie wirklich das vollständige Kriterium der Lösbarkeit, also im eminenten Sinne vollständige kritische Function wäre. Wir werden aber gleich sehen, dass die gesammten Lösbarkeitskriterien der Gleichung sechsten Grades nicht in einer einzigen kritischen Function, sondern in einem kritischen Functionenpaar enthalten sind. Wohl aber bleibt unserm Leitfaden gemäss der allgemeine Satz bestehen, dass die Gleichung durch Rationalisirung der einzelnen kritischen Function K lösbar wird.

Behandeln wir nun die zwei dreiwerthigen Elemente in ähnlicher Weise wie das einwerthige, so erhalten wir schliesslich eine zweite kritische Function. Wir haben nämlich auf Grund der Wurzelform $e_2 = \frac{1}{6}(j^4 x_1 + j^2 x_2 + j^6 x_3 + j^4 x_4 + j^2 x_5 + j^6 x_6)$ oder, um die Unbequemlichkeit der Zahlencoefficienten zu vermindern, $6 e_2 = j^4 (x_1 + x_4) + j^2 (x_2 + x_5) + j^6 (x_3 + x_6)$. In entsprechender Weise findet man $6 e_4 = j^2 (x_1 + x_4) + j^4 (x_2 + x_5) + j^6 (x_3 + x_6)$. Kubirt man beide Ausdrücke, so dividirt sich die Zahl der Werthe durch 3, und addirt man die beiden Kuben, so dividirt sich die Werthzahl noch durch 2. Alsdann sind die Signirungswerthe verschwunden und wir erhalten die kritische Function, aber freilich nicht in der einfachsten Gestalt. Wir nehmen daher, wie oben, statt ihrer das Product der Wurzelsummen, welches zu ihr, wie man sich durch Umformung der-

selben überzeugen kann, in einer einfachen Zahlenbeziehung steht. Demgemäss haben wir als einfachste kritische Function $(x_1 + x_4)$ $(x_2 + x_5)$ $(x_3 + x_6)$, welcher Ausdruck, nebenbei bemerkt, gleich $8(e_2^3 + e_4^3)$ ist, und dessen Werthezahl sich analog wie oben auf $\frac{2.3.4.5.6}{2.2.2.2.3} = 15$ stellt. Von dieser zweiten fünfzehnwerthigen kritischen Function K' ist dasselbe zu sagen, was schon bezüglich der zehnwerthigen K bemerkt wurde. Sie ist eben darum kritisch, weil ihre Werthe im Allgemeinen transcendent sein müssen. Wird die Function rational, so ist die Gleichung lösbar; aber umgekehrt hängen nicht alle Lösbarkeitsfälle davon ab, dass die Rationalität bei K' vorhanden sei; denn erst K und K' zusammen bilden das vollständige Kriterium, und wenn die eine Function rational wird, so folgt hieraus nicht, dass es auch die andere werden müsse. Nur Eines folgt sofort mit Sicherheit, dass nämlich auch in der andern Function die Werthe nicht transcendent bleiben können; denn dies widerspräche der Lösbarkeit. Wohl aber können sie, wie später nachgewiesen werden wird, irrational werden, — ein Fall, der bei den primgradigen Gleichungen nie eintreten konnte, weil dort in der einzigen maassgebenden kritischen Function mit einem Werthe derselben auch alle übrigen rationalisirt wurden.

Auf die sechswerthigen Elemente e_1 und e_5 brauchen wir keine Rücksicht zu nehmen, da sich diese, wie im siebenten Capitel bezüglich der Wurzelform dargethan worden, vermöge der zwei- und dreiwerthigen bestimmen lassen. Auf diesem Wege muss man daher und auf dem umständlicheren directen würde man thatsächlich ebenfalls zu zehnwerthigen oder fünfzehnwerthigen kritischen Functionen gelangen. Das fragliche kritische Functionenpaar ist daher für die Gleichung sechsten Grades das, was für diejenige fünften Grades die einfache kritische Function war.

7. Von diesem Functionenpaar lässt sich nun bestimmter auf das schliessen, was zur Lösbarkeit der Gleichung erforderlich und genügend ist. Es ist dies die Rationalität irgend eines der sämmtlichen 25 kritischen Werthe. Setzt man diese Rationalität voraus, so folgt weiter, dass, falls es einer der 10 ist, die ternären Wurzelsummen $x_1 + x_3 + x_5$ und $x_2 + x_4 + x_6$, die jede für sich $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ Werthe haben, Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten oder, was dasselbe heisst,

eine quadratisch irrationale Function von rationalen Grössen sein müssen. Hier im besondern Fall, wo wir den ersten Coefficienten der Gleichung sechsten Grades gleich Null voraussetzen, ist die quadratische Gleichung eine reine; denn da $S_1 = - S_2$, so sind beide Wurzelsummen Quadratwurzeln aus derselben rationalen Coefficientenfunction. Nun sind diese ternären Wurzelsummen die ersten Coefficienten zweier kubischer Gleichungen, in welche man sich die Gleichung sechsten Grades zerlegt denken kann. Die andern Coefficienten solcher Zerlegungsgleichungen werden im allgemeinen Fall auch zwanzigwerthige, also für den Fall der Rationalisirung von Zehnwerthigkeiten, ebenfalls quadratisch irrationale Functionen von übrigens rationalen Bestandtheilen sein. Eine kubische Zerlegungsgleichung mit dieser Eigenschaft ist aber diejenige, die man meint, wenn man sagt, die Gleichung sechsten Grades müsse in zwei dritten Grades zerlegbar sein, deren Coefficienten von einer Gleichung zweiten Grades abhängen.

Machen wir eine ähnliche Schlussfolgerung für die binären Wurzelsummen, so zeigt sich, dass wenn man diese als Wurzeln einer kubischen Gleichung voraussetzt, die Coefficienten im Allgemeinen fünfzehnwerthige Functionen, aber im besondern Fall der Rationalisirung von Werthen von K' rationale Grössen werden. Dies bedeutet also, dass alsdann die Gleichung sechsten Grades in drei quadratische zerlegbar sein muss, deren Coefficienten von einer kubischen Gleichung abhängen. So haben wir eine zweite Art von Zerlegbarkeit, welche mit der andern zusammen die beiden Bedingungen bildet, von denen eine erfüllt sein muss, damit die Gleichung sechsten Grades algebraisch lösbar sei. Nennen wir eine solche Zerlegungsgleichung, deren Coefficienten wieder von einer Gleichung m ten Grades abhängen, unserm Sprachgebrauch gemäss eine m-werthige, da sie vermöge der m-Werthigkeit aller Coefficienten m Gleichungen repräsentirt, so können wir den Sachverhalt im speciellen Fall kurz dahin formuliren: Die Gleichung sechsten Grades ist dann und nur dann lösbar, wenn sie entweder als eine zweiwerthige Gleichung dritten oder als eine dreiwerthige zweiten Grades dargestellt werden kann. Dieses Merkmal jeder algebraisch lösbaren Gleichung sechsten Grades ist zwar schon im siebenten Capitel als nothwendig hergeleitet worden; aber die jetzige Ableitung aus den permutativen Wurzelfunctionen zeigt genau die Grenze an, bis zu welcher der Versuch, die allgemeine Gleichung sechsten

Grades algebraisch wirklich aufzulösen, führen kann. Es ist nun direct durch die Eigenschaften der Permutationen zu zeigen, wie eine der beiden kritischen Functionen entweder rationalisirt werden kann oder transcendent sein muss.

Im siebenten Capitel haben wir gesehen, dass alle rationalen und irrationalen Grössen, aus denen die Form einer Gleichungswurzel aufgebaut ist, und insbesondere die Wurzelelemente der verschiedenen Ordnungen, durch rationale Functionen der verschiedenen Wurzeln der betreffenden Gleichung ausgedrückt werden können. Wenn man nun hienach erst die Wurzelelemente erster Ordnung, dann diejenigen zweiter Ordnung auf diese Weise darstellt und so weiter ins Innere der Wurzelform vordringt, so muss man, wenn die Gleichung algebraisch lösbar ist, schliesslich auf solche Functionen der Wurzeln kommen, denen rationale Functionen der Coefficienten dieser Gleichung entsprechen. Im andern Falle hätte man nämlich entweder einen falschen Weg eingeschlagen, der ins Unendliche führte oder man käme, welche Wurzelform man auch voraussetzen möchte, nie zu Ende; letzteres aber wäre ein sicheres Kriterium, dass eine algebraische Wurzelform nicht existirte und die Gleichungswurzeln wären folglich transcendent. Wenn jedoch die Gleichung algebraisch lösbar ist, muss es auch eine algebraische Wurzelform geben und man muss daher auf dem angedeuteten Wege die innersten rationalen Wurzelelemente als rationale Wurzelfunctionen finden können. Diese Functionen sind entweder symmetrisch oder unsymmetrisch; im letzteren Falle können sie nur dann rationale Werthe annehmen, wenn eine Beziehung zwischen den Wurzeln besteht, vermöge deren sie in symmetrische Functionen verwandelt werden können.

Es soll zuerst gezeigt werden, dass nicht alle Functionen, die man auf diese Weise für die innersten rationalen Bestandtheile der Wurzelform erhält, an sich, d. h. ohne Annahme einer Beziehung zwischen den verschiedenen Wurzeln, symmetrisch sein können, sondern dass vielmehr die algebraische Auflösbarkeit der Gleichung sechsten Grades von der Rationalisirung einer mehrwerthigen Wurzelfunction abhängt, wenn wir auch noch nicht wissen, dass diese nothwendig die zehn- oder die fünfzehnwerthige ist. Wenn man nämlich im Gegentheil voraussetzt, dass eine Gleichung sechsten Grades algebraisch lösbar sei und doch keine mehrwerthige Function der Wurzeln rational sei, so ist es

unmöglich, dass eine Gleichung, deren Wurzeln die verschiedenen Werthe einer mehrwerthigen Function der Wurzeln der betreffenden Gleichung sechsten Grades sind, reducibel sei. Eine Gleichung niedrigeren Grades, die einige, aber nicht alle Werthe dieser Wurzelfunction zuliesse, ist nämlich auch eine Wurzelfunction, die den rationalen Werth Null hat, aber keine symmetrische, weil sie sonst alle Permutationen und folglich gegen die gemachte Voraussetzung auch alle Werthe ihrer Wurzel zulassen würde; denn durch die Permutationen von $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ werden ja die verschiedenen Werthe der Wurzelfunction in einander verwandelt. Es ist aber andererseits unmöglich, dass z. B. die Gleichung zehnten Grades, deren Wurzeln die verschiedenen Werthe von K sind, irreducibel sei; denn im siebenten Capitel haben wir gesehen, dass der algebraische Ausdruck der Wurzel einer irreducibeln Gleichung nothwendig Wurzelgrössen enthält, deren Exponent ein beliebiger Primfactor des Grades der Gleichung ist; K enthielte also in diesem Falle Wurzelgrössen fünften Grades; da es aber eine Function der Wurzeln einer Gleichung sechsten Grades ist, in welcher solche Wurzelgrössen nicht vorkommen dürfen, so kann K niemals Wurzelgrössen mit dem Exponenten fünf enthalten. Wir haben hier also einen Widerspruch, der durch die Voraussetzung der Irreducibilität der Gleichung in K veranlasst wurde; diese Voraussetzung ist also falsch. Wir haben jedoch eben gesehen, dass sie unumgänglich ist, wenn man nicht annimmt, es gebe unsymmetrische Wurzelfunctionen, die einen rationalen Werth haben.

Es soll nun streng bewiesen werden, dass entweder die zehnwerthige Function $K = (x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4 + x_6)$ oder die fünfzehnwerthige $K' = (x_1 + x_4)(x_2 + x_5)(x_3 + x_6)$, wenn nicht alle beide, rationalisirt werden können. Zunächst ist darzulegen, dass für jede Gleichung immer nur eine solche Function in Frage kommt. Gäbe es etwa mehrere, z. B. f, f', f'' u. s. w., so würde die Summe $F = af + bf' + cf'' + \ldots$, wo $a, b, c, \ldots$ beliebige rationale Coefficienten bezeichnen, im Allgemeinen, d. h. abgesehen von besondern Werthen der Grössen $a, b, c, \ldots$ keine Permutation zulassen, die nicht $f, f', f'', \ldots$ auch zuliessen, und da eine Function durch eine andere Function rational ausgedrückt werden kann, wenn sie alle Permutationen der letzteren zulässt, so könnten $f, f', f'', \ldots$ rational durch F ausgedrückt werden; F wäre aber dann die eigentliche kritische oder lösende Function,

wovon die andern nur abgeleitet sein würden. Die algebraische Lösbarkeit einer Gleichung hängt also von der Rationalisirung nur einer Wurzelfunction ab.

Es handelt sich nun darum, zu ermitteln, wie diese Wurzelfunction beschaffen sein muss, d. h. durch welche Permutationen sie geändert werden und durch welche Permutationen sie unverändert bleiben muss. Nehmen wir zuerst an, sie habe die Eigenschaft, dass man die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 in drei Gruppen zu je zweien theilen kann, derart, dass das Hinüberpermutiren aus einer Gruppe in die andere den Werth der Function ändert. Ist dies der Fall, so giebt es, wie man sieht, immer einen Werth der fünfzehnwerthigen Function K', der alle Permutationen dieser Function zulässt und folglich rational ausgedrückt werden kann. Ist es aber nicht der Fall, so müssen sich unter den sechs Wurzeln drei finden, die nach Belieben untereinander vertauscht werden können. Es sei nun $f(K) = 0$ ein Factor der, wie oben gezeigt, reducibeln Gleichung zehnten Grades in K, so muss der erste Coefficient dieser Gleichung, weil rational darstellbar, alle Permutationen der fraglichen Function zulassen. Denn sonst gäbe es ausser der gesuchten kritischen Function und den durch sie rational ausdrückbaren Functionen noch eine andere rationalisirbare; es ist aber vorausgesetzt worden, dass sich alle rationalisirbaren Functionen aus einer ableiten lassen. Es können also in dem ersten Coefficienten drei Wurzeln vertauscht werden. Da er aber aus Werthen von K zusammengesetzt ist, deren jeder die gleiche Eigenschaft hat, so müssen auch die drei andern Wurzeln diese Eigenschaft besitzen und ausserdem müssen beide Gruppen untereinander vertauschbar sein. Er lässt also in diesem Falle alle Permutationen der zehnwerthigen Function zu. Sonst aber kann er keine weiter zulassen; denn wenn man eine Wurzel aus der einen Gruppe mit einer der andern vertauschen könnte, ohne den Werth dieses Coefficienten zu ändern, so würde dieser jede Permutation zwischen zwei Wurzeln zulassen, da die Wurzeln jeder Gruppe miteinander vertauscht werden können; er würde also symmetrisch sein. Alsdann wären aber alle andern Coefficienten der Gleichung, die ähnliche Functionen der Werthe von K sind, ebenfalls symmetrische Functionen. Die ganze Gleichung wäre demgemäss symmetrisch, was, wie oben erwiesen, unmöglich ist. So bleibt nichts übrig, als dass er einem Werthe der zehnwerthigen Function ähnlich sei; dieser ist also auch rational

durch die Coefficienten der Gleichung sechsten Grades ausdrückbar. Es ist also festgestellt, dass unter der Voraussetzung der algebraischen Lösbarkeit einer irreducibeln Gleichung sechsten Grades entweder K oder K' wenigstens einen rationalen Werth haben muss, wenn sie nicht in besondern Fällen alle beide rationalisirt werden können. Gemäss den in der zweiten Nummer dieses Capitels gegebenen Ausführungen kann aber auch die Rationalisirung einer der beiden kritischen Functionen nur bei gewissen Beziehungen zwischen den Coefficienten möglich sein, und es sind deshalb nur besondere Fälle der Gleichung sechsten Grades, von denen wir einen in der nächsten Nummer berühren werden, algebraisch lösbar.

8. Auf analoge Weise kann man die Lösungsbedingungen für jede irreducible Gleichung zusammengesetzten Grades finden. Der Grad der Gleichung sei mn. Die Wurzelelemente e_n, e_{2n}, e_{3n}, ..., $e_{(m-1)n}$ haben die Gestalt $j^{(m-1)n}(x_1 + x_{m+1} + x_{2m+1} + \ldots + x_{(n-1)m+1}) + j^{(m-2)n}(x_2 + x_{m+2} + x_{2m+2} + \ldots + x_{(n-1)m+2}) + j^{(m-3)n}(x_3 + x_{m+3} + x_{2m+3} + \ldots + x_{(n-1)m+3}) + \ldots + (x_m + x_{2m} + x_{3m} + \ldots + x_{nm})$ und analog die übrigen. Erhebt man diese Ausdrücke zur $m$ten Potenz, so dividirt sich die Anzahl der Werthe, die zuerst $\frac{(mn)!}{(n!)^m}$ beträgt, durch m und durch Summirung der verschiedenen Werthe noch durch $(m-1)!$. Die Wurzelfunction, die man dann erhält, ist denjenigen ähnlich, die dadurch entstehen, dass man die m Summen von je n verschiedenen Gleichungswurzeln mit einander multiplicirt oder die m Producte von je n Wurzeln addirt. Alle diese Functionen haben $\frac{(mn)!}{m!(n!)^m}$ Werthe.

Unter m und n kann man zwei beliebige, einander ergänzende Factoren des Grades der Gleichung verstehen. Man erhält daher soviele kritische Functionen, als der Grad der Gleichung Factoren hat. Hat eine davon einen rationalen Werth, so wird hiedurch die Gleichung in m Gleichungen $n$ten Grades zerlegt, deren Coefficienten von einer Gleichung $m$ten Grades abhängen. Zur Lösung ist natürlich noch erforderlich, dass diese Gleichung $m$ten Grades sowie die $m$werthige Gleichung $n$ten Grades algebraisch lösbar sei, was besonders zu untersuchen ist, sobald der Grad einer derselben den vierten übersteigt.

Der Beweis des Satzes, dass eines der Wurzelsummen-

producte im Falle der algebraischen Lösbarkeit rational sei, ist ganz analog dem oben hinsichtlich der Gleichung sechsten Grades gegebenen und nicht schwieriger als dieser zu führen. Die Wurzelform einer Gleichung zusammengesetzten Grades kann nach den Ausführungen im siebenten Capitel nur solche Wurzeln enthalten, deren Exponent ein Primdivisor des Grades der Gleichung oder eine solche Primzahl ist, die aus einem Primfactor dadurch entsteht, dass man von ihm 1 abzieht und von der Differenz wiederum einen Primfactor nimmt. Nur solche Wurzeln können deshalb in dem Ausdruck einer der kritischen Functionen vorkommen, woraus folgt, dass die Gleichungen vom Grade $\frac{(mn)!}{m!(n!)^m}$, von denen ihre Werthe Wurzeln sind, reducibel sind. Denn der Wurzelausdruck einer irreducibeln Gleichung enthält nothwendig alle solche Wurzeln, deren Exponenten alle in dem Grade jener Gleichung enthaltenen Primfactoren sind. In dem Ausdruck $\frac{(mn)!}{m!(n!)^m}$ kommen nun nothwendig alle die Primzahlen als Factoren vor, die grösser als die grössere der beiden Zahlen m und n und kleiner als mn sind. Denn solche Primfactoren müssen nothwendig im Zähler $(mn)!$ vorkommen, können aber unmöglich im Nenner $m!(n!)^m$ enthalten sein und bilden folglich auch einen Bestandtheil des Quotienten. Die grössere der beiden Zahlen m und n ist nun aber höchstens gleich der Hälfte ihres Products, da doch die kleinere mindestens gleich zwei ist. Eine Primzahl, die grösser ist als die Hälfte einer Zahl, kann kein Theiler der letzteren sein; es giebt aber immer eine oder mehrere solche Primzahlen, sobald diese Zahl grösser als zwei ist. Diese Thatsache führt zu dem Schlusse, dass die Gleichungen, deren Wurzeln die Werthe der kritischen Functionen sind, nicht irreducibel sein können. Denn ihre Wurzelausdrücke dürfen keine Primzahl als Wurzelexponent enthalten, die grösser als die Hälfte von mn wäre; wären sie aber irreducibel, so müssten, sobald mn grösser als fünf ist, darin solche Primzahlen vorkommen. Dies ist ein Widerspruch; also sind diese Gleichungen reducibel. Die Coefficienten der Theilgleichungen, in die sie zerfallen müssen, können jedoch keine symmetrischen Functionen sein, was sich auf dieselbe Weise nachweisen lässt, wie oben hinsichtlich der kritischen Gleichung zehnten Grades. Folglich hängt die Lösbarkeit einer irreducibeln Gleichung zusammen-

gesetzten Grades von der Rationalisirung einer gewissen mehrwerthigen Function ab.

Es seien jetzt $m, m', m'', \ldots, n'', n', n$ der Reihe nach die verschiedenen Theiler des Grades mn der Gleichung. Nun lassen sich, wie auch die fragliche Function beschaffen sein möge, die Wurzeln entweder in n Gruppen zu je m oder in n' Gruppen zu je m' oder in n'' Gruppen zu je m'' u. s. w. oder in m Gruppen zu je n derart ordnen, dass durch das Hinüberpermutiren aus einer Gruppe in die andere der Werth der Function stets geändert wird. Ist dies der Fall, so giebt es immer einen entsprechenden Werth der verschiedenen kritischen Functionen, welcher dieselben Eigenschaften hat, also alle Permutationen der fraglichen Function zulässt und demgemäss rational ausgedrückt werden kann. Könnte man aber die Wurzeln nicht einmal in m Gruppen zu je n abtheilen, so dass jedes Hinüberpermutiren den Werth der Function ändert, so würde es nothwendig sein, dass $m - 1$ dieser Gruppen die Eigenschaft hätten, dass man die in jeder enthaltenen Gleichungswurzeln nach Belieben vertauschen könnte. Der erste Coefficient eines Divisors der Gleichung, deren Wurzel die Function $(x_1 + x_{m+1} + x_{2m+1} + \ldots + x_{(n-1)m+1}) (x_2 + x_{m+2} + x_{2m+2} + \ldots + x_{(n-1)m+2}) (x_3 + x_{m+3} + x_{2m+3} + \ldots + x_{(n-1)m+3}) \ldots (x_m + x_{2m} + x_{3m} + \ldots + x_{nm})$ ist, muss nun, weil rational, alle Permutationen der fraglichen Function zulassen. Auf analoge Weise, wie oben, schliessen wir dann, dass er in diesem Falle symmetrisch sein müsste. Dies ist aber ebenfalls unmöglich. Folglich muss wenigstens eine der verschiedenen kritischen Functionen wenigstens einen rationalen Werth haben; sonst ist die betreffende Gleichung algebraisch nicht lösbar.

Die obigen Ausführungen finden nicht mehr Anwendung, wenn der Grad der Gleichung aus lauter gleichen Factoren besteht, d. h. die Potenz einer Primzahl ist, weil dann der Wurzelausdruck jeden Primexponenten enthalten kann, der kleiner als der Grad der Gleichung ist; folglich findet die Annahme, dass jeder Primexponent im Wurzelausdruck nicht grösser als die Hälfte des Grades sein könne, nicht mehr Anwendung. Die permutativen Bedingungen der Lösbarkeit sind alsdann, wie schon Galois angekündigt hat, von sehr verwickelter Natur und die Schwierigkeiten, die sich ihrer Auffindung entgegenstellen, kaum zu bewältigen. Wir legen jedoch auf derartige nutzlose Aus-

spinnungen der Permutationsalgebra kein Gewicht, sondern werden vielmehr die lösbaren höheren Gleichungen durch einige concrete Beispiele erläutern. Eine Gleichung sechsten Grades, aus der das zweite Glied entfernt ist, also $x^6 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$, ist algebraisch lösbar, auch wenn q, r, s und t beliebig gewählt werden, und die einzige Beziehung zwischen den Coefficienten in einem derartigen functionellen Verhältniss des letzten zu den andern besteht, dass $u = \frac{qr^6 + r^4s^2 - 2r^2st^2 - 2r^5t + t^4}{4qr^4 - 8r^3t}$ ist. Diese Gleichung, auf die wir bei unsern Untersuchungen gekommen sind, ist nämlich das Product der beiden

$$x^3 \pm \sqrt{-q + 2\frac{t}{r}}\, x^2 + \frac{t}{r}\, x + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{2r^2st^2 + 2r^5t - r^4}{4q^2r^4 - 8qr^3t}} = 0$$

und

$$x^3 \mp \sqrt{-q + 2\frac{t}{r}}\, x^2 + \frac{t}{r}\, x + \frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{2r^2st^2 + 2r^5t - r^4}{4q^2r^4 - 8qr^3t}} = 0,$$

welche, wie man sieht, die beiden Werthe einer zweiwerthigen Gleichung dritten Grades sind. Die Wurzeln dieser beiden Gleichungen dritten Grades werden durch die Cardanische Formel dargestellt, wenn man in letztere die Coefficienten einsetzt; da diese aber gegebene algebraische Functionen derjenigen der Gleichung sechsten Grades sind, so erhält man die Wurzeln jener Gleichung sechsten Grades sogleich als sechswerthigen algebraischen Ausdruck.

Ein anderes und allgemeineres, aber bereits altes und erledigtes Beispiel für die Lösung höherer Gleichungen sind die binomischen Gleichungen, von denen die Einheitswurzeln abhängen. Sie sind wieder ein specieller Fall der sogenannten Abelschen Gleichungen, deren Auflösung unmittelbar geschehen kann, sobald man nur weiss, dass die betreffende Gleichung eine Abelsche ist, was man freilich ihren Coefficienten nicht ansehen kann. Diese irreducibeln Gleichungen haben nämlich, wie wir im siebenten Capitel bemerkt haben, die ihnen eigenthümliche Beschaffenheit, dass, wenn die Wurzeln in einer gewissen Reihenfolge geordnet werden, jede von ihnen dieselbe Function der vorangehenden ist. Man kann also hiebei schreiben $x_2 = \vartheta(x_1)$, $x_3 = \vartheta(x_2)$, $x_4 = \vartheta(x_3)$, ..., $x_1 = \vartheta(x_n)$, wo ϑ das Zeichen einer rationalen Function ist. Bezeichnet man die $n$malige Wiederholung der durch ϑ bezeichneten Operation mit ϑ^n, so ist $x_3 = \vartheta^2(x_1)$, $x_4 = \vartheta^3(x_1)$, ..., $x_n = \vartheta^{n-1}(x_1)$. Bildet man nun

das erste Wurzelelement $e_1 = j^{n-1}x_1 + j^{n-2}x_2 + j^{n-3}x_3 + \ldots + x_n$, erhebt es zur $n$ten Potenz und setzt für $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ ihre Werthe in x_n ein, so erhält man $e_1{}^n = [j^{n-1}\vartheta(x_n) + j_{n-2}\vartheta^2(x_n) + j^{n-3}\vartheta^3(x_n) + \ldots + x_n]^n$. Dieser Ausdruck bleibt ungeändert, wenn man für x_n einen andern Werth von x substituirt; denn hiedurch wird offenbar nur die Reihenfolge der Werthe von x verändert, was auf den Werth einer derartigen Wurzelfunction, wie vorher dargelegt, keinen Einfluss hat. Addirt man deshalb alle Werthe von $e_1{}^n$, die dadurch entstehen, dass man in jenem Ausdrucke x anstatt x_n nacheinander alle seine andern Werthe giebt, so ist die Summe, da die Summanden gleich sind, dem $n$fachen Werthe eines derselben gleich. Sie ist aber zugleich eine symmetrische Function, deren Werth man als rationale Function der Gleichungscoefficienten berechnen kann. Dividirt man den so erhaltenen rationalen Ausdruck durch n, so hat man damit die $n$te Potenz des ersten Wurzelelements und dieses mithin als $n$te Wurzel aus einer rationalen Grösse. Auf dieselbe Weise findet man auch die andern Wurzelelemente als $n$te Wurzeln aus rationalen Ausdrücken.

Dieser Fall findet bei den primgradigen Einheitswurzeln statt. Dividirt man die Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch $x - 1$, so ist der Quotient eine Abelsche Gleichung; denn wenn p eine sogenannte primitive Wurzel der Primzahl n ist, kann man alle $n$ten Einheitswurzeln in eine solche Reihe bringen, dass jede aus der vorangehenden und die erste aus der letzten durch Erhebung zur $p$ten Potenz, also stets durch dieselbe Operation entsteht. Man kann daher auf die soeben gekennzeichnete Weise jede primgradige Einheitswurzel berechnen und erhält dann für ihren Werth die Summe eines rationalen Bestandtheils $-\frac{1}{n}$ und einer Summe von Wurzeln aus rationalen Grössen, deren Exponent gleich $n - 1$ oder einem Theiler davon ist.

Zehntes Capitel.

Die Imaginären und die Transcendenten in erweiterten Verbindungen.

1. Die erforderlichen Ausführungen und Anwendungen unserer früheren Aufschlüsse über das Imaginäre und über dessen sachliche Bedeutung lassen sich nur in Zusammenhang mit der Rolle darstellen, welche die imaginären Functionsbeziehungen ausserhalb ihres engern, d. h. rein algebraischen Bereichs, also in Combination mit den transcendenten Functionen spielen. Auch an sich selbst ist das transcendente Bereich von entscheidender Bedeutung für alle functionellen Beziehungen, sobald man diese in ihrer grössten Allgemeinheit erfassen will. Das Transcendente ist umfassender als das Algebraische; es schliesst die Möglichkeit des Algebraischen als einen besondern Fall ein. Es ist daher die transcendente Analysis von grösserer Tragweite und in ihren Mitteln mächtiger, als die auf das rein Algebraische beschränkte. Transcendente Lösungen erfordern, wie das Beispiel der Einheitswurzeln zeigt, für gewisse Zwecke algebraische Specialisirungen. Sie müssen aber an sich selbst als die höhere Form betrachtet werden, vermöge deren verwickelte Beziehungen unter gewisse Functionstypen gebracht und auf diese Weise bequem handhabbar werden. Ueberdies kann ja auch die reine Algebra mit dem Transcendenten nur da concurriren, wo beide sich decken. Im Allgemeinen aber sind alle Transcendenten, wie schon das Wort besagt, das Eigenthümliche, was sie vorstellen, dadurch, dass sie einen Inbegriff von Operationen ausdrücken, welche die Formen und sozusagen Kräfte der reinen Algebra übersteigen.

Scheu vor dem Transcendenten ist ebenso unbegründet wie vor dem Imaginären. Das eine wie das andere ist nichts an sich selbst, sondern nur eine Rechnungsbeziehung. Wie wir früher schon im Allgemeinen bemerkt und auch speciell am Beispiel des Irrationalen erläutert haben, so handelt es sich bei allen solchen Gegensätzen nicht sowohl um Eigenschaften der Grössen, als vielmehr um den Operationsweg, auf welchem man von der einen zur andern gelangt. Dieser Operationsweg ist es, der rational oder irrational, reell oder imaginär, algebraisch oder

transcendent ausfällt. Ueberall ist es, wie wir uns früher ausgedrückt haben, ein Rechnungszusammenhang oder, wie man es weniger anspruchslos bezeichnen würde, eine functionelle Beziehung, was in seiner besondern Artung den Kern jener gemeiniglich mit Nebeln umhüllten Begriffe ausmacht. Nun kann man sich diese functionelle Beziehung als umgekehrte denken, d. h. man kann das, was in ihr Argument ist, als Function der sonstigen Function vorstellen. Bei einer solchen Umkehrung zeigt es sich nun recht deutlich, wie die Grössen nicht an sich selbst imaginär, irrational oder transcendent sein können; denn wenn die Argumente als etwas unmittelbar Gegebenes jene Eigenschaften nicht haben, so kann die durch die Function vorgestellte Grösse diese Eigenschaften an sich auch nicht einschliessen. Man braucht diese Grösse nur zum Argument zu machen und sie hört auf, obwohl sie dem Quantum nach dieselbe bleibt, transcendent zu sein. In den Fällen gleichgestalteter Reciprocität kehrt sich sogar das ganze Verhältniss um, und was früher einfache Argumentgrösse war, wird nun transcendente Function. Der Sinus ist transcendent in Beziehung auf den Winkel, der es an sich nicht ist; aber der letztere wird eine transcendente Function, sobald man ihn als Arcussinus vom ersteren als von einer gegebenen Grösse auffasst. Es ist also hier ein ähnlicher Sachverhalt vorhanden, wie in der Wechselbeziehung der Diagonale und der Seite eines Quadrats, bei welcher man auch die Wahl hat, welche von beiden Grössen man zur irrationalen Function der andern machen wolle.

Zunächst soll uns das am meisten bekannte und fundamentale Vorkommen des Imaginären im Transcendenten beschäftigen. Hier bildet den Ausgangspunkt das, was wir das Eulersche Aperçü nennen könnten. Als nämlich Euler die Reihen für $\cos x$, $\sin x$ und e^x mit einander verglich, fand er durch den Versuch, dass sich bei Einsetzung von $x\sqrt{-1}$ an Stelle von x eine einfache Beziehung ergiebt. Es ist dies die imaginäre Grundgleichung $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$. An diese weittragende Beziehung war man auf andern Wegen früher schon nahe genug gestreift, ohne sie jedoch zu finden. Einmal gefunden, lieferte sie bald und in der einfachsten Weise neue fruchtbare Wendungen, namentlich auch eine kurze Ableitung der Moivreschen Binomialformel. Die ganze Möglichkeit, beliebige Wurzeln aus

einem imaginären Binom auszuziehen, beruht auf jener Grundgleichung. Die blosse Theilung der Argumente liefert die gewünschten Wurzeln aus dem einfachen Grunde, weil jenes trigonometrische Binom auch zugleich eine Exponentialfunction desselben Arguments ist. Auch die Einheitswurzeln ergeben sich auf diese Weise sofort, indem die imaginäre Periode der Exponentialfunction $2\pi\sqrt{-1}$ in entsprechende Bruchtheile zerlegt wird. Doch genug von diesen Erinnerungen an die praktische Brauchbarkeit jener imaginären Grundgleichung!

2. Für unsern Zweck ist es wichtiger, den Anschein von Eigenartigkeit zu beseitigen, der darin liegt, dass das Imaginäre, welches doch immer einen algebraischen Grund hat, algebraisch unmotivirt so unter den Transcendenten auftritt, als wenn es dort heimisch wäre und in den dortigen specifischen Beziehungen auch seinen Ursprung hätte. Letzteres wäre eine Täuschung; denn das Imaginäre ist hier so algebraisch geartet und begründet, wie irgendwo sonst. Der gegentheilige Schein entsteht nur dadurch, dass auch die algebraischen Grundlagen der fraglichen Transcendenten im Hintergrunde verbleiben. Sinus und Cosinus sind Functionen, die als Wurzeln der unbestimmten Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ aufgefasst sein wollen, sobald man diese Gleichung dahin versteht und ergänzt, dass x und y Functionen einer gemeinschaftlichen dritten noch näher zu charakterisirenden Grösse φ sein sollen. Diese nähere Charakteristik des Arguments φ muss rein analytisch ausfallen, d. h. sich über die Geometrie durch Abstraction erheben. Man hat also φ als das Bogenintegral $\int_x^1 \sqrt{dx^2 + dy^2}$ oder in bearbeitetem Ausdruck die Gleichung $\varphi = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Nimmt man nun x als Wurzel dieser transcendenten Gleichung oder, mit andern Worten, kehrt man das Integral um, indem man $x = f(\varphi)$ ermittelt, so stellt x als solche Function von φ den Cosinus vor und hiemit ist durch die Ursprungsgleichung auch der Sinus, nämlich y bestimmt. Man definirt auch diesen besser unmittelbar und auf analoge Weise wie den Cosinus, indem man ihn als die Umkehrung von $\int_0^y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, d. h. von $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ bestimmt.

Jedoch auch mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$, wenn man sie allein und in gewöhnlichem Sinne gebraucht, gelangt man nicht zum Imaginären. Ein interessanter Belag hiefür ist das Verfahren Lagranges in seinen Vorträgen über die Functionenrechnung. Er wünschte die transcendente Grundgleichung unter Vermeidung der Reihen zu gewinnen und operirte statt mit diesen mit den abgeleiteten Functionen, d. h. mit den reinen Differentialcoefficienten, indem er dabei die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ zu Grunde legte. Hiebei musste er aber das Imaginäre analytisch nicht minder unmotivirt hineintragen, als es Euler in seiner Weise gethan hatte. Von selbst findet es sich auch nur ein, wenn man den Weg einschlägt, den wir in unserm grundlegenden zweiten Capitel bereits bezüglich der rein algebraischen und geometrischen Ausgangspunkte betreten haben. Wir müssen nämlich neben der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ auch noch die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ und zwar beide unter demselben Gesichtspunkt betrachten, wie dies schon im zweiten Capitel, jedoch erst ohne Rücksicht auf die entstehenden Transcendenten, geschehen ist. Die erstere jener Gleichungen liefert die Kreisfunctionen, die letztere entsprechend die hyperbolischen Functionen, d. h. die hyperbolischen Sinus und Cosinus und führt ausserdem zu der diese zusammenfassenden Exponentialfunction e^{φ}. Nun kommt es darauf an, beide Arten von Functionen als aus derselben Gleichung stammend aufzufassen; alsdann wird auch die fragliche Exponentialfunction für beide ein gemeinsames Zusammenfassungsmittel; denn zunächst ist sie dies natürlicherweise, d. h. in reellem Sinne nur für die hyperbolischen Functionen. Dadurch also, dass eine einzige Gleichung vermittelst der Voraussetzung, dass y nicht blos positiv und negativ, sondern auch imaginär werden darf, sich auch in die zweite Gleichungsform verwandeln und diese so mitrepräsentiren kann, wird auf ungezwungene Weise eine algebraisch imaginäre Beziehung der Grund gleichsam für die Einrahmung des Imaginären in diejenigen transcendenten Verhältnisse und Gleichungen, die sich an die fraglichen algebraischen Gleichungen anknüpfen lassen.

Die hyperbolischen Functionen finden sich schon im 18. Jahrhundert bei Lambert. Neuerdings hat man für sie sogar specielle Tafeln berechnet; aber ein abstracter Gebrauch wird von ihnen für allgemeine Zwecke der Analysis so wenig gemacht und auch sonst ist ihr Begriff selbst in der höhern Mathematik so wenig landläufig, dass nicht einmal die gewöhnlichen Curse der ellip-

tischen Functionen etwas davon wissen. Da wir nun im Gegentheil für diese Functionen einen verhältnissmässig elementaren Gebrauch, d. h. eine Anwendung wenigstens von derselben Stufe wie diejenige, auf welcher die transcendente Grundgleichung steht, in Anspruch nehmen, so müssen wir einige hieher gehörende Beziehungen näher darlegen.

So abstract analytisch man die trigonometrischen Functionen auch nachträglich fassen kann, so sind sie doch nicht auf eine solche Weise zuerst in das menschliche Hirn eingetreten, und hätte dies auch nie geschehen können. Wären sie nicht auf dem Boden der Geometrie sozusagen naturwüchsig entstanden, so wüsste man von ihnen noch nichts. Aber auch für ihre Analoga giebt es keine natürlichere und anschaulichere Darlegungsweise als die an den geometrischen Gebilden. Erinnern wir uns daher jenes Doppelschema von Kreis und gleichseitiger Hyperbel, dessen wir uns im zweiten Capitel zur natürlichen Ableitung imaginärer Ordinaten bedient haben. Im betreffenden Kreise sind die Abscissen und Ordinaten zugleich die Sinuslinien und Cosinuslinien. Nun drängt sich dem Denkenden unmittelbar die Analogie auf, welche zwischen den Abscissen und Ordinaten im Kreise einerseits und den Abscissen und Ordinaten der gleichseitigen Hyperbel andererseits besteht. Beide Linienarten sind nach demselben Gesetz, wenn auch mit einer specifischen Abänderung durch den jedesmaligen besondern Fall, in übereinstimmender Weise construirt. Sie lassen sich sogar auf eine und dieselbe Gleichung beziehen, und es findet zwischen ihnen eine gewisse Stetigkeit im Uebergange von der einen zur andern statt. Dabei gehen die Ordinaten aus dem Reellen durch Null in das Imaginäre über, während die Abscissen ohne Zeichenwechsel steigen. Die letztern werden in beiden Arten von demselben Mittelpunkt, die Ordinaten aber von derselben Axe aus gerechnet. Dies sind Umstände genug, um eine Einheitlichkeit beider Liniengebilde zu verbürgen, und wenn die einen, mit irgend einer dem Kreise entsprechenden Einheit gemessen, Sinus und Cosinus sind, so müssen die andern sich als etwas Aehnliches für die Hyperbel erweisen, falls man nur das entsprechende Argument auffindet.

3. Gemeiniglich sieht man den Sinus als eine Function des Winkels oder Bogens an und bezieht die Sinuslinie auf den Radius als Einheit. Es giebt aber noch eine dritte Art der Auffassung, die uns für die Zwecke der fraglichen Analogie allein dienen

kann. Man kann nämlich statt des Winkels oder Bogens das Doppelte des entsprechenden Sectors zum Argument nehmen, und dann ist die Einheit, mit der die Argumente gemessen werden, das Quadrat des Radius, während die Einheit, mit der die Sinuslinien gemessen werden, nach wie vor der Radius bleibt. Die Argumente sind dann abstracte Zahlenvielfache einer Fläche, während die trigonometrischen Functionen abstracte Zahlenvielfache einer Linie bleiben. Nimmt man also zum Argument das Doppelte des Kreisausschnitts, so ändert sich durch das neue System dem alten gegenüber im Zahlenausdruck der Argumente und der Functionen nichts. Nur die Auffassung ist eine andere, d. h. die hinzuzudenkenden Benennungen sind bei den Argumenten nicht mehr Winkel oder Bögen, sondern Theile der Kreisfläche. Hätte man, wie es im ersten Hinblick als natürlich erscheinen könnte, an Stelle des Bogens einfach den Kreisausschnitt gesetzt, statt das Doppelte von ihm zu nehmen, so würde man eine von der gewöhnlichen Convention unbequeme Abweichung der abstracten Zahlenausdrücke verursacht haben. Das Entscheidende bleibt für die fragliche Analogie, dass überhaupt Flächeninhalte zu Argumenten der beiderlei Functionen, der circularen wie der hyperbolischen, genommen werden.

Für die gleichseitige Hyperbel, die wir immer im Zusammenhang des fraglichen Schema vorstellen, kann man in einer dem Kreis analogen Weise nicht Winkel oder Bögen, sondern nur die verdoppelten Hyperbelsectoren, d. h. die doppelten Werthe derjenigen Flächenräume, welche jedesmal zwischen dem vom Mittelpunkt gezogenen Leitstrahl, dem Hyperbelbogen und der Axe liegen, zu Argumenten nehmen. Wollte man nämlich den Winkel am Ursprung des Sectors nehmen, so verbliebe man bei trigonometrischen Functionen. Machte man aber den Hyperbelbogen zum Argument, so würden die Abscissen und Ordinaten zu Umkehrungen der Bogenintegrale und hiemit zu weniger einfachen elliptischen Functionen. Wir müssen daher von der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel ausgehen. Ihr zufolge haben wir den Sector $S = \frac{r^2}{2}\, l\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\right)$, worin r die halbe Axe, x und y aber die vom Mittelpunkt gerechneten Coordinaten bezeichnen. Nehmen wir auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{2S}{r^2} = l\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\right)$ zum Logarithmus die Zahl, so erhalten wir $e^{\frac{2S}{r^2}} = \frac{x}{r} + \frac{y}{r}$. Nimmt

man auf beiden Seiten den reciproken Werth, so gesellt sich zu dieser Gleichung ihr zweiter Werth $e^{-\frac{2S}{r^2}} = \frac{x}{r} - \frac{y}{r}$. In den gewonnenen beiden Gleichungen ist nun $\frac{2S}{r^2}$ diejenige abstracte Zahl, welche entsteht, wenn man den doppelten Sector auf das Quadrat der halben Axe als auf die Einheit bezieht. Dagegen sind $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ abstracte Zahlen, die den Werth der Abscissen und Ordinaten in der halben Axe als der Einheit ausdrücken. Die halbe Axe ist aber in unserm Schema mit dem Kreisradius einerlei, und demgemäss entsprechen diese in der Hyperbel statuirten Werthe dem Cosinus und Sinus im Kreise. Das Argument entspricht aber auch demjenigen im Kreise, denn in letzterem ist es $\frac{2S'}{r^2}$, wenn wir mit S' den von der Axe an gerechneten Kreisausschnitt bezeichnen.

Hiemit haben wir nicht blos die Existenz hyperbolischer Cosinus und Sinus dargethan, sondern auch diejenige transcendente Grundgleichung für sie abgeleitet, welche der Eulerschen entspricht und sich zu dieser als der reelle und, wie wir bald sehen werden, als der ursprünglichere Fall zugesellt. Bezeichnen wir, um den Gedanken an Winkel oder Bögen fernzuhalten, $\frac{2S}{r^2}$ mit a, so ist $\frac{x}{r}$, der ursprünglich gewählten Functionsbeziehung gemäss, der hyperbolische Cosinus von a. Hienach haben wir also $\frac{x}{r} = ch\ a$ und $\frac{y}{r} = sh\ a$, und, wenn wir diese Ausdrücke durch Sinus hyperbolicus u. dgl. in die vorher gewonnenen beiden Gleichungen einsetzen, $e^a = ch\ a + sh\ a$ und $e^{-a} = ch\ a - sh\ a$.

Will man die entsprechende Gleichung für die Kreisfunctionen ganz analog vorstellen, so kann man dieser Absicht dadurch zu Hülfe kommen, dass man ebenfalls den Gedanken an Winkel oder Bögen entfernt und die doppelten Kreissectoren, die durch das Radiusquadrat als Einheit gemessen werden, also $\frac{2S'}{r^2}$ mit a' bezeichnet. Man hat alsdann $e^{a'\sqrt{-1}} = \cos a' + \sqrt{-1} \sin a'$ und $e^{-a'\sqrt{-1}} = \cos a' - \sqrt{-1} \sin a'$. Es versteht sich, dass hier a' keine andere abstracte Zahl bezeichnet, als wenn es sich um die gewöhnlichen Winkel- oder Bogenargumente handelte; denn nur

die Vorstellungsart von den Einheiten hat sich geändert, während die Argumentzahlen an sich dieselben geblieben sind. Nun sind beide Grundgleichungen, die imaginäre wie die reelle, bisher, wenn auch nicht auf gleicher Stufe und in Zusammenhang mit einander gebraucht, doch thatsächlich jede für sich ein Besitz der Analysis gewesen. Was aber in Bezug auf sie der Analysis noch immer gefehlt hat, und was sich auch erst auf Grund unserer Aufschlüsse über das Imaginäre beschaffen lässt, das ist die Zurückführung beider Gleichungen auf eine einzige.

4. Was man bisher noch geleistet hat, ist die Beschaffung einer unmittelbaren, nicht mehr durch die Exponentialfunction vermittelten Beziehung zwischen den beiderlei Functionen. Wie aber auch die Herleitung dieser Beziehung nicht zur Hauptsache führe, dafür mag eine einfache Darstellung derselben zeugen. Der hyperbolischen Grundgleichung gemäss hat man $ch\ a = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$ und $sh\ a = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$. Rein analytisch muss, da a eine Veränderliche ist, diese Gleichung bestehen bleiben, wenn man $a\sqrt{-1}$ an die Stelle von a setzt. Auf diese Weise erhält man $ch\ a\sqrt{-1} = \frac{1}{2}(e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}})$ und $sh\ a\sqrt{-1} = \frac{1}{2}(e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}})$. Was nun auf den rechten Seiten dieser Gleichungen steht, repräsentirt, wenn man es nach Maassgabe der Eulerschen Grundgleichung auffasst, beziehungsweise $\cos a$ und $\sqrt{-1}\ \sin a$. Es bestehen also die Beziehungen $ch\ a\sqrt{-1} = \cos a$ und $sh\ a\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\ \sin a$, d. h. der Cosinus ist gleich dem hyperbolischen Cosinus desselben, aber imaginär gesetzten Arguments und der imaginär gesetzte Sinus ist gleich dem hyperbolischen Sinus desselben, aber imaginär gesetzten Arguments.

Von dem Grunde dieser Beziehungen wird nichts klar, obwohl sie auf der Vergleichung beider Grundgleichungen beruhen. Eine blosse Vergleichung bleibt auch noch weit vom Ziele entfernt; denn dieses wird nur dadurch erreicht, dass man die eine Gleichung als die durch das imaginäre Stadium hervorzubringende Umwandlungsform der andern erkennt. Eine solche Erkenntniss war aber unmittelbar an den transcendenten Gleichungen kaum möglich; hiezu bedurfte es eines einfacheren Weges, nämlich der rein algebraischen Grundlegung, wie wir sie im zweiten Capitel vorgenommen haben. Von dorther ist uns die Einheitlichkeit der Kreisgleichung und der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel bereits geläufig. Von dorther wissen wir, dass wir von den beiden

Gleichungen $x^2 + y^2 = r^2$ und $x^2 - y^2 = r^2$ die eine als eine Phase der andern betrachten können, nämlich als diejenige Phase, welche entsteht, wenn wir y imaginär nehmen. Auch ist uns von dorther zugleich geometrisch die Vorstellung geläufig, dass, wenn wir in dem fraglichen geometrischen Doppelgebilde vom Kreis zur Hyperbel oder umgekehrt von der Hyperbel zum Kreis übergehen, die vorher reell genommenen Ordinaten eine imaginäre Signirung annehmen.

Aus letzterem Umstande folgt nun sofort, dass der hyperbolische Sinus, der, wenn man von der Hyperbel ausgeht, selbstverständlich reell ist, eine imaginäre Signirung annehmen muss, indem er in den Kreissinus übergeht. Es ist eine und dieselbe umfassende Gattung von Ordinaten, welche in einem Theile ihres Gebiets Hyperbelsinus ist und in einem andern Theile Kreissinus wird. Die wahre Ursache der Imaginarität ist also hier wie überall der Umstand, dass eine Gleichungsbeziehung, die sich für sich allein ganz wohl reell ausdrücken lässt, unter eine andere Gleichungsform gebracht wird, unter die sie nicht anders als vermittelst Imaginärsetzung einer Veränderlichen passen kann.

Ebenso zeigt sich der letzte Grund des Imaginärwerdens der Argumente, wenn man von der hyperbolischen Function ausgeht und beachtet, nicht blos, was aus ihr selbst, sondern auch, was aus ihrem Argument bei dem Uebergange in den Kreis werden muss. Wir hatten das Argument $a = \frac{2S}{r^2} = l\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\right)$. Nun verwandelt sich a in das Kreisargument a' nach dem analytisch und geometrisch festgestellten Gesetz dadurch, dass y imaginär genommen wird, und dieses Imaginärnehmen ist eine blosse Folge der Einheitlichkeit der sonst als zwei aufgefassten algebraischen Gleichungen. Man hat also als die zu a gehörige imaginäre Phase $a' = l\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\sqrt{-1}\right)$. Nun ist aber andererseits a' auch unmittelbar als der geometrische Werth des Kreissectors zu formuliren, wie er sich nach Maassgabe einer imaginären Ordinate stellt. Wir haben diesen Kreissector S' zunächst reell durch die Formel $\frac{xy}{2} + \int_x^r y\,dx$ und dann nach Maassgabe einer imaginären Ordinate y als den imaginären Werth $\frac{xy\sqrt{-1}}{2} +$

$\int\limits_x^r y\sqrt{-1}\,dx$. Da man $\sqrt{-1}$ als Constante herausnehmen kann, so ist der neue Ausdruck einfach $\left(\frac{xy}{2}+\int\limits_x^r y\,dx\right)\sqrt{-1}$, d. h. er ist der alte, nur imaginär genommen. Wenn man also mit $S'(y)$ den Werth in Beziehung auf das reelle y, mit $S'(y\sqrt{-1})$ aber den Werth als Function des imaginären y bezeichnet, so hat man in Zusammenfassung der eben erhaltenen Ergebnisse $S'(y\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,S'(y)$ und demgemäss, da $a' = \frac{2S'}{r^2}$, auch $a'(y\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,a'(y)$.

In der Formel $a' = l\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r}\sqrt{-1}\right)$ ist a' soviel als $a'(y\sqrt{-1})$. Die nunmehrige Gleichung

$$a'(y\sqrt{-1}) = l\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r}\sqrt{-1}\right)$$

wird nun nach Maassgabe der vorher festgestellten Beziehung $a'(y\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,a'(y)$ sofort $\sqrt{-1}\,a'(y) = l\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r}\sqrt{-1}\right)$. Oben hatten wir $a = l\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r}\right)$. Aus dieser Hyperbelformel für a geht nun die eben angegebene Kreisformel für a' hervor, wenn man $\sqrt{-1}\,a'(y)$ an die Stelle von a und $y\sqrt{-1}$ an die Stelle von y setzt. Der Definition gemäss ist nun $\frac{x}{r} = ch\,[\sqrt{-1}\,a'(y)]$; denn was nach ch folgt, ist der dem doppelten durch das Radiusquadrat gemessenen Sector gleiche Ausdruck, also das der Definition entsprechende Argument. Aus ebendemselben Grunde ist auch $\frac{y}{r}\sqrt{-1} = sh\,[\sqrt{-1}\,a'(y)]$. Andererseits haben wir, wenn wir vom Kreise ausgehen, $\frac{x}{r} = \cos a'(y)$ und $\frac{y}{r} = \sin a'(y)$. Setzt man nun die rechten Seiten der Doppelgleichungen für $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ einander unmittelbar gleich, so erhält man, was aus dem Uebergang zum Imaginären und ohne die Eulersche Formel nachgewiesen werden sollte, nämlich $ch\,[\sqrt{-1}\,a'(y)] = \cos a'(y)$ und $sh\,[\sqrt{-1}\,a'(y)] = \sqrt{-1}\,\sin a'(y)$, wobei sowohl die Strichmarkirungen, als die eingeklammerten Functionsandeutungen nunmehr überflüssig gewordene

Zeichen sind, da in dieser Formel zu ihnen keine Gegensätze mehr vorkommen. Man kann also einfach schreiben $ch\sqrt{-1}\,a = \cos a$ und $sh\sqrt{-1}\,a = \sqrt{-1}\sin a$, und dies Ergebniss ist in unserer Nachweisung ausschliesslich auf die reellen Beziehungen an der Hyperbel gestützt worden, die sich durch den Uebergang zum Kreise vermittelst Imaginärsetzung der Ordinate von selbst verwandelten.

Ebenso können wir auch die Eulersche Grundgleichung als blosse Umwandlung der für die Hyperbel geltenden reellen Grundgleichung ableiten. Wir hatten bereits vorher $\sqrt{-1}\,a'(y) = l\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\sqrt{-1}\right)$. In vereinfachter Schreibweise, unter Weglassung des Strichs und der eingeklammerten Functionsbeziehung, sowie unter Ersetzung von $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ durch $\cos a$ und $\sin a$, erhalten wir $\sqrt{-1}\,a = l(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)$. Nehmen wir auf beiden Seiten, indem wir auch die erste als Logarithmus betrachten, die Zahl, so ergiebt sich $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + \sqrt{-1}\sin a$, worin wir die Eulersche imaginäre Grundgleichung vor uns haben.

5. Es ist noch ausdrücklich hervorzuheben, dass die Selbständigkeit aller jener Ergebnisse sich auf unsere Imaginärtheorie und in einem Theil ihrer Vermittlungen sogar auf unsere geometrische Construction des Imaginären gründet. Der Nerv blieb aber dabei immer, dass von den beiden Gleichungen $x^2 + y^2 = r^2$ und $x^2 - y^2 = r^2$ die eine zur Grundform aller Beziehungen gemacht und ihr die andere als ein besonderer Fall untergeordnet wurde, der dadurch entsteht, dass die Veränderliche sich in ihren imaginär gesetzten Werth umwandelt. Dieser Gesichtspunkt war von vornherein das analytisch Neue an unserer fundamentalen, im zweiten Capitel dargelegten Wendung. Auch lässt er sich nicht durch die Zusammenfassung beider Gleichungen in eine vierten Grades ersetzen, wie aus der Vollziehung dieser Operation hervorgeht, die trotzdem immerhin auch für uns einige positiv werthvolle Seiten hat.

Die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ und die auf dasselbe Arrangement bezogene der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 - r^2 = 0$ vereinigen sich auf rein algebraische Weise zu der Gesammtgleichung $(x^2 + y^2 - r^2)(x^2 - y^2 - r^2) = 0$. Diese Gleichung vierten Grades umfasst den Kreis und die gleichseitige

Hyperbel zugleich und bleibt für unsere Zwecke am geeignetsten als Factorengleichung ohne Auflösung der Klammern. Für y ergeben sich, wie es sein muss, vier zu demselben x gehörige Werthe, nämlich $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ und ausserdem noch $y = \pm \sqrt{x^2 - r^2}$. Das eine Werthepaar von y wird nothwendig imaginär, wenn das andere reell ist. Im Uebrigen ist jedes Paar dem andern der absoluten Grösse nach gleich. Noch deutlicher tritt dies hervor, wenn man das eine Paar auch gleich formell imaginär schreibt, nämlich $y = \pm \sqrt{-1} \sqrt{r^2 - x^2}$. Natürlich hätte sich diese Schreibweise statt für dieses auch für das andere Paar vornehmen lassen, da hier zwischen dem Reellen und Imaginären hin und her volle Reciprocität obwaltet. Wird das eine Werthepaar imaginär, so wird das andere reell und umgekehrt. Im Hinblick auf unser ursprüngliches Schema von Kreis und Hyperbel bedeutet dies, dass wenn y vermöge der geeigneten Grösse x_1 eines Werthes von x im Kreise liegt, es für diesen zunächst einen positiven und einen negativen reellen Werth, ausserdem aber damit congruirend einen gleich grossen positiven und negativen imaginären Werth hat. Ebenso gestaltet sich die Sache, wenn für einen geeigneten Werth x_2 die Ordinate y eine Hyperbelordinate werden muss.

Die Gesammtgleichung hat den Vortheil, uns das Doppelgebilde simultan vorzustellen und uns daher auch für beide Gestalten desselben in erster Linie reelle Werthe der Ordinaten zu liefern. In dieser Rolle leistet sie aber genau genommen nichts weiter, als was jede der Partialgleichungen, isolirt für sich genommen, ebenfalls thut. Die Andeutung von etwas Weiterem liegt erst in den imaginären Werthen, mit denen die gemeine Behandlungsart einer solchen Gesammtgleichung vierten Grades nicht das Mindeste anzufangen weiss. Diese imaginären Werthe sind der gewöhnlichen Betrachtungsart nicht nur etwas Ueberflüssiges, sondern gradezu zur Last. Sie weiss ihnen keine Bedeutung zu geben und muss sie gleichsam als analytische Ueberproduction zur Seite schieben. Eine solche Incongruenz oder, wenn man will, lückenhafte Congruenz von Analysis und Geometrie sollte aber folgerichtigen Denkern an sich schon Bedenken erregen. In der That löst sich das Räthsel auf Grund unseres Systems der Imaginären. Es tritt nämlich die Imaginarität dadurch ein, dass, wo eine der Partialgleichungen ein reelles y

liefert, auch noch zugleich das Schema der andern Partialgleichung maassgebend gemacht wird und dann ein imaginäres liefern muss. Dies heisst aber soviel als den einen Factor der Gesammtgleichung auch unter der Gestalt des andern mitbehandeln, indem ein gemeinschaftliches *y* zugleich als Wurzel jedes von beiden bestimmt wird. Erst indem man diesen entscheidenden Umstand hervorhebt, macht man an den Eigenschaften der Gesammtgleichung und in den Beziehungen ihrer Theile etwas sichtbar, was sonst darin nicht gesehen wird und nach der gewöhnlichen Betrachtungsweise nicht darin gefunden werden konnte. Hienach ist die Gesammtgleichung soweit davon entfernt, an sich und von selbst zu den richtigen Wechselbeziehungen reeller und imaginärer Ordinaten zu führen, dass sie vielmehr umgekehrt der vorgängigen Feststellung solcher Beziehungen bedurft hat, um geometrisch in vervollständigter Weise ausgelegt werden zu können.

6. Der algebraische Ursprung des Imaginären in seinen Verbindungen jeglicher Art war der bisher leitende Gesichtspunkt. Wie aber eine besondere Art algebraischer Beziehungen dazu gehöre, um dem Uebergange vom Reellen zum Imaginären eine individuell bestimmte Gestalt zu geben, dafür lässt sich durch Veränderung der Gleichungsverfassung eine sehr einfache Nachweisung beibringen. Die Zusammengehörigkeit von Kreis und gleichseitiger Hyperbel in unserem Schema beruht auf der algebraischen Constitution der maassgebenden Gleichungen. Verändern wir diese Constitution, indem wir beispielsweise die Hyperbel auf Polarcoordinaten beziehen, so ergiebt sich ein anderes Doppelgebilde. Dabei ist hervorzuheben, dass nicht die Vertauschung des Coordinatensystems an sich selbst, sondern nur die wesentliche Aenderung der Gleichungseinrichtung der Grund des abgeänderten Ergebnisses sein kann. Coordinatensysteme sind an sich nur Hülfsmittel und ändern an den Gegenständen selbst, zu deren Ausdruck sie dienen, durchaus nichts. Etwas Anderes ist es aber, wenn mit der Vertauschung des Coordinatensystems zugleich ein anderer Inbegriff von Beziehungen ausgewählt wird, um am Gegenstande als charakteristisch zu gelten. Alsdann ist es nicht nothwendig, dass dieser neue Inbegriff von Beziehungen grade das ausdrücklich enthalte, was der sonst maassgebende aufwies. Geht man also am Leitfaden dieser neuen Beziehungen zu deren imaginärer Gestaltung über, so kann diese der Form nach eine andere sein, als zuvor.

In Polarcoordinaten ist die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $\varrho = \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$. Beginnt man mit $\varphi = 0$, also bei dem Scheitel, wo dann $\varrho = r$ ist, so wird mit dem Wachsen von φ gegen 45° der Leitstrahl in das Unbeschränkte wachsen. Bei $\varphi = 45°$ selbst tritt das eigentlich Unbegrenzte ein; der Leitstrahl verliert seine specifische Eigenschaft, indem er zur unbegrenzten Asymptote wird, die zu keinem Hyperbelpunkte mehr führt. Hiemit ist der eine Hyperbelarm nicht blos abgeschlossen, sondern auch gleichsam eingegrenzt. Lassen wir φ noch weiter über 45° hinaus wachsen, so wird $\cos 2\varphi$ negativ, hiemit die Wurzel aus ihm und daher auch ϱ imaginär. Um dies auch analytisch zu markiren, setzen wir $\cos 2\varphi = - \cos(\pi - 2\varphi)$. Die Hyperbel, die uns der imaginäre Leitstrahl liefert, hat hienach $\varrho = \frac{r}{\sqrt{-1}\,\sqrt{\cos(\pi - 2\varphi)}}$ oder $\varrho\sqrt{-1} = \frac{r}{\sqrt{\cos(\pi - 2\varphi)}}$ zur Gleichung. Wächst hier nun φ bis 90°, so ist der eine der Arme der Hyperbel mit dem imaginären Leitstrahl durchlaufen, und es ist $\varrho\sqrt{-1} = r$ oder, was hier bezeichnender ist, das allgemeine $\varrho = - r\sqrt{-1}$. Es versteht sich, dass hier für $\sqrt{-1}$ noch ausserdem ihre beiden Werthe zur Auswahl verfügbar sind. Der andere Arm des obern Hyperbelzweiges ergiebt sich, wenn man φ noch über 90° bis 135° wachsen lässt; alsdann wird der Leitstrahl wieder Asymptote, nämlich zum zweiten der vier Asymptotenstrahlen, die vom Mittelpunkt ausgehen. Gehen wir mit φ über 135° hinaus, so wird der Cosinus der nunmehrigen Gleichung, nämlich $\cos(\pi - 2\varphi)$ negativ, die Wurzel aus ihm und mit ihr der Ausdruck $\varrho\sqrt{-1}$ von Neuem imaginär, d. h. an sich wiederum reell, was sich übrigens auch unmittelbar ohne diesen Umweg an der ursprünglichen Gleichung $\varrho = \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ zeigt. Wir ersparen uns die Erläuterung des Ganges durch diesen reellen Zweig der ursprünglichen Hyperbel und machen nur darauf aufmerksam, dass wir mit $\varphi > 225°$ einen untern imaginären Hyperbelzweig erhalten. Ist letzterer durchlaufen, so folgt noch von $\varphi = 315°$ an der noch übrige Arm des rechten reellen Hyperbelzweiges, und alsdann nach Durchmessung auch dieses Armes befindet sich der Leitstrahl wieder in der ersten Axenlage, von der er ursprünglich ausgegangen war.

Man sieht, wie sich statt des zwischen den zwei Hyperbelzweigen eingeschobenen Kreises, der unser ursprüngliches Schema charakterisirte, eine imaginäre Hyperbel ergeben hat. In dem Schema der Polargleichung kann man den ganzen Raum in der Fläche durchlaufen und von jeglichem Punkte durch einen periodischen Umlauf wieder zu eben diesem Punkte zurückkehren. Nach dem gewöhnlichen Jargon geredet, muss man dabei viermal durch das Unendliche oder man hat, in angemessener Weise ausgedrückt, den Leitstrahl achtmal in das Unbeschränkte wachsen oder aber vom Unbeschränkten her abnehmen zu lassen und dazwischen noch den Sprung in das eigentlich Unbegrenzte, d. h. in die Asymptotenlage oder aus dieser zu vollziehen. Es sei hiebei daran erinnert, was über diese Unterschiede im dritten Capitel ausgeführt worden ist. Interessant ist das ganze Schema, weil es gestattet, von jedem Punkte in jeder Richtung den ganzen Hyperbelcyklus periodisch zu durchlaufen, während das Schema von Kreis und Hyperbel nur erlaubte, in der Richtung nach dem Innern überzugehen und dann sogar eine Umkehr nöthig machte, falls man etwa auf der untern Seite der Axe stetig zum Ausgangspunkt zurückgelangen wollte.

Wollte man die vier Hyperbelzweige statt durch die transcendente Gleichung durch eine algebraische ausdrücken, so hätte man zunächst für die Ausgangshyperbel, wie gewöhnlich, $x^2 - y^2 = r^2$; der andern Hyperbel entspräche aber die Gleichung $-x^2 + y^2 = r^2$. Letztere geht nun aus der ersteren hervor, indem man zugleich x und y imaginär nimmt, d. h. an ihrer Stelle $x\sqrt{-1}$ und $y\sqrt{-1}$ einsetzt. Man kann auf diese Weise das System der vier Hyperbelzweige auch unmittelbar nach Maassgabe der algebraischen Gleichungen stetig durchlaufen. Nur hat diese Art Stetigkeit, die man nach den gemeinen Begriffen von dem sogenannten Durchgang durch das Unendliche nicht als solche anerkennt und auch nicht so nennt, das Eigenthümliche, dass der unbeschränktkleine Zwischenwerth, durch den sie sich vermittelt und als allgemeine Grössenstetigkeit kennzeichnet, der Zusammensetzung nach vorgeschrieben ist. Indem nämlich die reelle Abscisse bei irgend einem Werthe, der in unbeschränkter Weise gross gewählt werden kann, imaginär gesetzt wird, geht die reelle Ordinate entsprechend in einen imaginären Werth über, der dadurch entsteht, dass sie absolut um eine unbeschränktkleine Strecke verlängert wird, wobei sie die Asym-

ptote schneidet und den Arm des benachbarten Hyperbelzweiges erreicht. Stetig ist dieser Uebergang insofern, als das Intervall der Grösse nach so klein gemacht werden kann, wie man will, wenn man nur die Abscisse hinreichend gross nimmt und so die Nachbarschaft der beiden Hyperbelarme zu einer unbeschränkt nahen macht. Der Einschnitt in der Stetigkeit betrifft also nicht die Theilbarkeit des Grössenüberganges, sondern nur den Umstand, dass von der unbeschränktkleinen Zwischengrösse das eine Stück diesseits, das andere jenseits der Asymptote liegen muss. Es versteht sich, dass diese absolute Grössenveränderung ihren Sinn dadurch erhält, dass man die beiden y als absolute vergleicht. Sie unterscheiden sich dann für ein unbeschränktgrosses x um $\frac{r^2}{x}$. Durch diese Variation geht man, wie dies ja auch bei der gewöhnlichen Variationsrechnung statthat, von einer Curve zu einer andern benachbarten über, nur dass in unserm Fall die unbeschränktnahe Nachbarschaft nicht anders als bei einer unbeschränktgrossen Abscisse zu finden ist. Wesentlich bleibt bei der Ueberbrückung, dass der Punkt in der Asymptote nicht selbst ein Endpunkt einer solchen Variation werde, vermöge deren man sofort, d. h. mit einem einzigen Zuwachs zur andern Hyperbel gelangen will.

Um jedoch im Sinne der Variationsrechnung volle Stetigkeit eintreten zu lassen, können wir δy als eine δr entsprechende Veränderung auffassen, und unter dieser Voraussetzung dürfen wir an jeder Stelle zu dem benachbarten Hyperbelarm übergehen, indem zunächst eine Abfolge von Hyperbeln den Raum bis zur Asymptote erfüllt, dann für $r = 0$ die Gleichung der Asymptote als quadratische Gleichung zweier grader Linien entsteht und jenseit der Asymptote wieder eine Abfolge von Hyperbeln zur Lage des Ziels, d. h. bis zur zweiten Hyperbel führt. Hiebei vermittelt sich auch der Umschlag der Zeichen in das Imaginäre derartig, dass r^2 bis auf Null sinkt und dann negativ wird. Die Gleichung $x^2 - y^2 = r^2$ wird hiedurch schliesslich zu der Gleichung $x^2 - y^2 = -r^2$, und diese ist, wenn sie auf ein absolutes r bezogen wird, offenbar nichts Anderes als $-x^2 + y^2 = r^2$, d. h. die Gleichung der zweiten Hyperbel mit imaginärem x und mit imaginärem y.

Es sei nun noch an eine andere Wendung erinnert. Man hätte nämlich die Hyperbel mit der senkrechten Hauptaxe ähn-

lich wie die mit der Horizontalaxe aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ entstehen lassen können, indem man statt x über r hinaus zu vergrössern, durch Vergrösserung von y über r hinaus imaginäre Werthe von x herbeiführte. Alsdann läge der Kreis als Ausgangspunkt inmitten der vier Hyperbelzweige, und man hätte ein noch mehr erweitertes Schema. Dieses Arrangement interessirt jedoch nur, weil es die andern übersichtlicher macht und zeigt, wie sich die vier Hyperbelzweige mit ihren Scheiteln tangirend an diejenigen vier Punkte anschliessen, in denen die Kreisdurchmesser, die zugleich die Hyperbelaxen sind, die Peripherie treffen. Doch genug von diesen Erläuterungen, die nur dazu bestimmt waren, etwaige Gegensätze zu dem ursprünglichen Schema als etwas kenntlich zu machen, was unter dieselben Gesetze fällt, die dem von uns festgestellten Sinn des Imaginären entsprechen. Auch unter Voraussetzung einer Gleichung in Polarcoordinaten haben wir gesehen, wie das Imaginäre seinen Ursprung nicht unmittelbar den transcendenten Functionen, sondern den auf dieselben bezogenen Wurzelausdrücken verdanke. Wie aber auch das Negative, welches in den transcendenten Functionen entsteht, einen einfachen algebraischen Sinn habe, ist bereits in den grundlegenden Eingangscapiteln dieser Schrift gezeigt worden.

7. Wie sich im zweiten Capitel eine geometrische wirkliche Construction des rein algebraisch Imaginären, zunächst in der einfachen und dann noch in der gemischten Gestalt, aus dem richtigen Begriff des Imaginären fast von selbst ergeben hat, so kann nun auch hier, aus der Natur der Sache und ohne irgend welche Willkürlichkeit, das transcendent Imaginäre nicht blos überhaupt geometrisch, sondern auch speciell in Gestalt von Linien dargestellt werden. Ja wir werden, um das Fundament dieser Art zu legen, die Eulersche Grundgleichung selbst geometrisch construiren und, nebenbei bemerkt, hiemit zugleich auf die einfachste und anschaulichste Weise ableiten.

Den Ausgangspunkt hiezu muss wieder unser ursprüngliches Schema von Kreis und gleichseitiger Hyperbel bilden. Nur denken wir uns noch die Asymptoten gezogen. Wir gehen nun von der reellen Hyperbel aus, so dass demgemäss im Kreise die Ordinate imaginär wird. Projiciren wir nun die Abscisse x und die Ordinate $y\sqrt{-1}$ auf die Asymptoten, die wir jetzt auch für den imaginären Kreis als Orientirungsstücke benützen, so er-

halten wir die Werthe der betreffenden Projectionen durch Multiplication mit $\cos 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und beziehungsweise für das obere auf die untere Asymptote zu projicirende $y\sqrt{-1}$ durch Multiplication mit $-\cos 45^0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$. Die Werthe auf der obern und der untern Asymptote sind also beziehungsweise $\sqrt{\frac{1}{2}}(x+y\sqrt{-1})$ und $\sqrt{\frac{1}{2}}\,(x-y\sqrt{-1})$. Nun ist $x = r\cos a$ und $y = r\sin a$, wenn wir mit a das Argument bezeichnen, bedeute dieses nun Winkel, Bogen oder doppelten Sector in dem früher erläuterten Sinne. Die Strecken auf den Asymptoten bezeichnen sich hienach durch $r\sqrt{\frac{1}{2}}\,(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)$ und $r\sqrt{\frac{1}{2}}\,(\cos a - \sqrt{-1}\sin a)$.

Wir fahren nun weiter fort, den Kreis als eine imaginäre Hyperbel zu behandeln und überdies auf die Asymptoten als neue Coordinaten zu beziehen, jedoch so, dass wir die in den alten Coordinaten gewonnenen Ausdrücke für die neuen Strecken beibehalten. Letzteres ist ein Verfahren, welches man das der indirecten Coordinaten nennen könnte, weil die Grössen auf den neuen Coordinatenaxen sich nur durch Ausdrücke in den alten vermitteln. Nennen wir der Vereinfachung wegen die Coordinaten des Kreispunkts auf den Asymptoten u und v, so haben wir $u = r\sqrt{\frac{1}{2}}(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)$ und $v = r\sqrt{\frac{1}{2}}\,(\cos a - \sqrt{-1}\sin a)$. Nebenbei bemerkt, ergiebt sich durch blosse Multiplication $uv = \frac{r^2}{2}$, worin wir die Asymptotengleichung einer gleichseitigen Hyperbel vor uns haben, hier nämlich einer imaginären Hyperbel, die nach unserm System der Imaginären mit dem Kreise identisch ist.

Wir werden nun die fraglichen Asymptotenstrecken, die wir in der Form eines imaginären Binoms ausgedrückt haben, auch noch in der Form einer Exponentialfunction darstellen. In jeder Hyperbel mit der Gleichung $uv = \frac{r^2}{2}$ ist $u = r\sqrt{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{2F}{r^2}}$ und $v = r\sqrt{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{2F}{r^2}}$, wenn wir mit F diejenige Fläche bezeichnen, die zwischen der Ordinate $v = r\sqrt{\frac{1}{2}}$ und dem zum betreffenden Punkt gehörigen Werth von v oder aber nach unten zwischen den analogen Werthen von u liegt. Die Werthe $r\sqrt{\frac{1}{2}}$ für v und u werden durch die beiden Lothe vorgestellt, die man vom Scheitel auf die Asymptoten fällt. In unserm Fall ist es nun nicht direct eine Hyperbel, sondern der Kreis unter dem Gesichts-

punkt einer imaginären Hyperbel, wofür wir F zu berechnen haben. Auch hier haben u und v ihren bereits bestimmten Sinn und sind ebenfalls so zu nehmen, wie vorher angegeben. Hienach haben wir die Fläche F zwischen dem Lothe $v = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, welches vom Endpunkt des Axenradius auf die Asymptote gefällt wird, und dem Werthe von v, welcher zum Kreispunkt gehört, ins Auge zu fassen.

8. Der Werth der Fläche F ist nicht als der einer reellen Fläche, sondern ausdrücklich als derjenige zu ermitteln, den die Fläche haben würde, wenn sie nicht Kreisfläche, sondern imaginäre Hyperbelfläche wäre. Wir wollen die Fläche in dieser Rolle, vermöge deren sie etwas vorstellt, was sie unmittelbar als reelles Gebilde nicht sein kann, imaginativ nennen. Der Ausdruck imaginär wird nämlich in allen denjenigen Fällen, in denen der imaginative Werth nicht einfach der imaginär gesetzte reelle sein kann, nicht blos ungenügend, sondern auch zweideutig. Da ein erhebliches Maass von Abstraction erforderlich ist, um den Consequenzen der ursprünglichen einfachen Imaginärsetzungen in die darauf bezogenen Flächenintegrale zu folgen, so wollen wir das Ungewohnte dieser Verfahrungsart durch vollständigste Bestimmtheit in den geometrischen Bezeichnungen nach Kräften vor Missverständniss sicher stellen und haben daher einige Umständlichkeiten gewöhnlicher geometrischer Art nöthig. Bezeichnet man den Punkt des Kreises, der mit dem Scheitel der Hyperbel zusammenfällt, mit S, den Punkt, wo die Asymptote den Kreis schneidet, mit A und den Kreispunkt, dessen Coordinaten x und y sind und der mit der Axe einen Winkel gleich a bildet, mit P, ferner die Endpunkte der aus den Punkten P und S auf die Asymptote gefällten Lothe mit B und C und den Mittelpunkt des Kreises mit O, so ist die Fläche $F = CBPS$ ein Bestandtheil des Sectors AOS. Dieser zerfällt nämlich in das Dreieck OCS, die Fläche $CBPS$ und den halben Kreisabschnitt BAP, welcher letztere gleich der Differenz des Sectors AOP und des Dreiecks OBP ist. Man hat also $AOS = \triangle OCS + F + AOP - \triangle OBP$ und hieraus $F = AOS - AOP + \triangle OBP - \triangle OCS$. Die beiden Dreiecke sind rechtwinklig; das eine hat zur Grundlinie $u = r\sqrt{\frac{1}{2}}$ und zur Höhe $v = r\sqrt{\frac{1}{2}}$; das andere Dreieck OBP hat zur Grundlinie $u = r\sqrt{\frac{1}{2}}(\cos a + \sqrt{-1}\,\sin a)$ und zur Höhe $v = r\sqrt{\frac{1}{2}}(\cos a - \sqrt{-1}\,\sin a)$. Ihre Flächen sind

demnach einander imaginativ, d. h. dem Rechnungswerth nach, gleich, nämlich gleich $\frac{uv}{2} = \frac{r^2}{4}$; folglich bleibt in dem Ausdruck für F, wenn er, wie er soll, imaginativ genommen wird, nur die Differenz der beiden Sectoren AOS und AOP übrig.

Die imaginative Grösse eines Kreissectors, welcher als Hyperbelsector betrachtet wird, ist nun auch die imaginär gesetzte reelle. Jeder von der Axe gerechnete Kreissector besteht nämlich aus einem Dreieck vom Flächeninhalt $\frac{xy}{2}$ und einem Stück Kreisfläche, dessen Werth durch $\int_x^r y\,dx$ ausgedrückt wird. Wird nun y imaginär gesetzt, so verwandelt sich $\frac{xy}{2} + \int_x^r y\,dx$ in $\frac{xy\sqrt{-1}}{2}$ $+ \int_x^r y\sqrt{-1}\,dx = \sqrt{-1}\left(\frac{xy}{2} + \int_x^r y\,dx\right)$. Man erhält also den imaginativen Werth eines Sectors, dessen einer Schenkel die Axe ist, indem man den reellen mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Diese Regel gilt nun aber auch für jeden andern Sector, da ein solcher als die Differenz zweier Sectoren angesehen werden kann, welche die Axe zum gemeinschaftlichen einen Schenkel haben. Demgemäss ist der gesuchte imaginative Werth der Fläche F gleich der imaginär gesetzten Differenz der reellen Werthe der beiden Sectoren AOS und AOP, also gleich dem imaginär gesetzten Sector POS, welcher zwischen seinen Schenkeln einen Winkel gleich a einschliesst. Hieraus folgt $F = \frac{r^2}{2}\,a\sqrt{-1}$, also $\frac{2F}{r^2} = a\sqrt{-1}$ und demnach, indem wir in der schon oben festgestellten Gleichung $e^{\frac{2F}{r^2}} = \cos a + \sqrt{-1}\,\sin a$ für $\frac{2F}{r^2}$ seinen Werth $a\sqrt{-1}$ setzen, die imaginäre Grundgleichung $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + \sqrt{-1}\,\sin a$ und entsprechend deren zweiter Werth.

Man unterscheide in dem Gegenstand dieser Nummer wohl zwei an sich verschiedene Darlegungen. Erstens haben wir im Kreise das imaginäre Binom, welches in der imaginären Grundgleichung die eine Seite bildet, als zusammengesetzte Länge auf neuen, um 45^0 von den ursprünglichen abstehenden Coordinaten-

axen derartig construirt, dass wir die einzelnen Bestandtheile als reell oder imaginär signirte Linien nachweisen konnten. Dies ist für sich allein auch im Allgemeinen eine Construction aller imaginären Binome; denn diese lassen sich sämmtlich auf die fragliche Form bringen. Zweitens haben wir aber noch geometrisch am Kreise nachgewiesen, dass dieselben Längen auch durch die Exponentialfunction dargestellt werden, so dass sich diese Exponentialfunction ebenfalls geometrisch als lineare Ausdehnung construirt findet. Die Vermittlungen selbst aber, deren wir für den letztern Zweck bedurften, können noch für sich als ein Drittes angesehen werden; denn sie enthalten eine Art von Schlussfolgerungen, die noch über denjenigen Rahmen hinausgeht, in welchem sich bisher unser System der Imaginären bewegt hat. Sie beruhen nämlich auf den weitern Consequenzen, die sich als Zubehör zum Imaginärsetzen gewisser Grössen aufdrängen, sobald man einmal eine Gleichung unter das Schema einer andern bringt und mithin auch die entsprechende Curve nicht blos in ihren Theilen, sondern auch als Ganzes aus dem Gesichtspunkt einer andern Curve oder, wie wir es technisch bezeichnet haben, als imaginativen Fall einer andern Curve, d. h. mit Rechnungswerthen zu behandeln hat, die der Gleichung dieser andern Curve entsprechen. Für die Erledigung der Constructionsfrage waren jedoch jene Vermittlungen nicht nothwendig; denn wir brauchten nur die imaginäre Grundgleichung als analytisch festgestellt vorauszusetzen, um nach der Construction des imaginären Binoms, d. h. der einen Seite der Gleichung, sofort schliessen zu können, dass hiemit auch die andere Seite, die Exponentialfunction, als Linie dargestellt sei. Wir haben es jedoch vorgezogen, die Tragweite der imaginär geometrischen Schlüsse dadurch zu zeigen, dass wir mit der Construction der Grundgleichung auch eine neue geometrische Ableitung derselben verbanden, die nicht, wie die frühere, erst an die hyperbolischen Functionen anzuknüpfen hat.

Die Erweiterung der Verbindung der Transcendenten und der Imaginären bestand bisher in der Einheitlichkeit des Gesichtspunkts für die beiderlei Functionen, die circularen und die hyperbolischen. Vollständiger kann diese Erweiterung erst sichtbar werden, sobald wir unser System der Werthigkeiten im nächsten Capitel auch für dieses Bereich zur Anwendung bringen. In dem eben behandelten Capitel ist absichtlich jede solche Einmischung

sowie übrigens auch der Gebrauch eigner Zeichen vermieden worden, damit die neuen Vorstellungsarten und Wendungen, die sich rein auf das Imaginäre beziehen, auch in dieser Absonderung unter allem Uebrigen um so deutlicher wahrnehmbar würden.

Elftes Capitel.

Werthigkeitsrechnung im Transcendenten.

1. Die Umformung eines jeden imaginären Binoms in eine transcendente Gestalt bildet eines der Grundmittel der bisherigen Analysis. Nun ist, jede binomisch imaginäre Grösse, aus einem allgemeineren Gesichtspunkt und in ihrer wesentlichen Untrennbarkeit von dem conjugirten Werth betrachtet, ein zweiwerthiges Binom, da $\sqrt{-1}$, allgemein verstanden, immer zwei Werthe aufweisen muss. Für den Begriff eines zweiwerthigen Binoms überhaupt ist aber die Imaginarität eine nebensächliche Zufälligkeit; denn auch jede reelle Quadratwurzel bringt die Zweiwerthigkeit mit sich. Ja nicht einmal die Irrationalität ist wesentlich; denn auch eine rational ausziehbare Quadratwurzel bleibt zweiwerthig, da wohl mit der Werthigkeit die Irrationalität, nicht aber umgekehrt mit der Irrationalität die Werthigkeit der Ausdrücke verschwindet. Wir brauchen daher nicht einmal an die Entstehung aus einer Quadratwurzel zu denken und haben in jedem Ausdruck $\alpha \pm \beta$ die Form eines zweiwerthigen Binoms. Hiebei ist es auch nicht nöthig, dass α und β absolut einwerthig seien; es ist genug, dass auf jeden Werth von α ein Doppelwerth des entsprechenden Werths von β komme. In diesem allgemeinen Sinn verstanden, bringt nun das zweiwerthige Binom, wenn wir unser Werthigkeitssystem ausführen wollen, als nächste Aufgabe mit sich, es in eine transcendente Form zu verwandeln und so die Grenzen der bisher auf das Imaginäre beschränkten Operationen zu erweitern. Zugleich wird hiedurch eine bisher nie erreichte Einheitlichkeit der Gesichtspunkte erzielt; denn das zweiwerthige Binom ist die umfassendere Allgemeinheit, von welcher das reelle und das imaginäre Binom die Specialgestalten bilden.

Ehe wir der bezeichneten Aufgabe nähertreten, erinnern wir kurz an die Umwandlungsart jedes imaginären Binoms. Um $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, worin α und β reelle Grössen vorstellen, in die modulirte, trigonometrische oder exponentielle Form $\varrho\ (\cos a + \sqrt{-1} \sin a)$ zu verwandeln, hat man der Gleichung $\alpha + \beta \sqrt{-1} = \varrho \cos a + \sqrt{-1}\ \varrho \sin a$ zu genügen. Diese zerfällt in die Partialgleichungen $\alpha = \varrho \cos a$ und $\beta = \varrho \sin a$. Hieraus folgt durch einfache Addition der Quadrate $\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2$ und, nachdem man so $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ hat, aus den Partialgleichungen $\cos a = \frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ und ebenso $\sin a = \frac{\beta}{\varrho} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Ein Hauptvortheil dieser transcendenten Umformung, der auch wohl auf Grund der Moivreschen Formel die erste Veranlassung zu der Operation gegeben hat, ist die Möglichkeit, Potenzen, Wurzeln, Producte und Quotienten binomisch imaginärer Ausdrücke mit Leichtigkeit zu bilden, indem man die betreffenden Rechnungsarten einfach an den Modulen vollzieht, auf die Argumente aber solche Rechnungsarten anwendet, wie man sie gebraucht, wenn man, anstatt mit den Zahlen, mit deren Logarithmen zu operiren hat. Wenn man daher zu potenziren, also auch den Modulus zu potenziren hat, so wird man das Argument mit dem Exponenten vervielfachen, womit auch zugleich die als gebrochene Potenzirung zu handhabende Wurzelausziehung erledigt wird. Hat man ungleiche Binome zu multipliciren oder zu dividiren, so multiplicirt oder dividirt man die Module, addirt aber oder subtrahirt die Argumente.

Nehmen wir nun ein zweiwerthiges Binom $\alpha \pm \beta$ als solches in Angriff, so brauchen wir über die Natur der Grössen α und β keine besondere Voraussetzung zu machen. Vorläufig mag uns jedoch die engere Annahme, diese Grössen seien reell, zu einer vereinfachenden Fixirung der Ideen auf den zunächst natürlichsten Fall dienen. Indem wir die im vorigen Capitel gebrauchten Zeichen für die hyperbolischen Cosinus und Sinus auch hier anwenden, setzen wir $\alpha \pm \beta = \varrho\ (ch\ a \pm sh\ a)$ und haben hieraus nach dem Fundamentalsatz der Werthigkeitsrechnung die Partialgleichungen $\alpha = \varrho\ ch\ a$ und $\beta = \varrho\ sh\ a$. Wie nun für die Kreisfunctionen die Gleichung $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, so gilt für die Hyperbelfunctionen, entsprechend der Gleichung der Hyperbel,

die Beziehung $ch^2\, a - sh^2\, a = 1$. Ist nämlich die Gleichung der Hyperbel $x^2 - y^2 = r^2$, so sind, wie im vorigen Capitel gezeigt, $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ die beiden hyperbolischen Functionen, d. h. beziehungsweise $ch\, a$ und $sh\, a$. Nimmt man nun r^2 als gemeinsamen Factor heraus, so hat man $r^2 \left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] = r^2$ oder $\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$, d. h. $ch^2\, a - sh^2\, a = 1$. Mit Hülfe dieser Beziehung ergeben nun jene Partialgleichungen, indem man das Quadrat der zweiten von dem der ersten abzieht, sofort $\varrho^2 = \alpha^2 - \beta^2$ und, nachdem man so $\varrho = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ hat, auch $ch\, a = \frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$ und $sh\, a = \frac{\beta}{\varrho} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$. Wird also den nunmehr gefundenen drei Bestimmungen von ϱ, $ch\, a$ und $sh\, a$ aus den Grössen des Binoms entsprochen, so hat man für das letztere immer die hyperbolisch transcendente Form. Wären α und β nicht reell, so würde die dargelegte Umwandlung auch noch gelten; denn in unserer Herleitung ist, abgesehen von der Vorsetzung der Zweiwerthigkeit, über die Natur der Grössen α und β an sich selbst, wie gesagt, keinerlei besondere Voraussetzung wesentlich gewesen. Unsere vorläufige Annahme des Reellen hatte nur den Charakter eines Beispiels. Was sich daher im Resultat je nach den Beschaffenheiten von α und β ändern kann, ist nur die Natur der Argumente, die imaginär werden können. Die Transformationsformeln selbst bleiben aber mit dieser Abänderung bestehen und sind demgemäss an sich ganz allgemein.

Setzen wir beispielsweise β imaginär, so geht das Ergebniss $\varrho = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ in $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ über, und für die Functionen erhält man durch Einsetzung des imaginären β ohne Weiteres $ch\, a = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ und $sh\, a = \frac{\beta\sqrt{-1}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Diese Ergebnisse verwandeln sich vollständig in das gewöhnliche imaginäre Schema mit Kreisfunctionen, wenn man die Beziehung zwischen den beiderlei Functionsarten benützt. Setzt man $a = a'\sqrt{-1}$, so ist demzufolge, was im vorigen Capitel erläutert wurde, $ch\, a = cos\, a'$ und $sh\, a = \sqrt{-1}\, sin\, a'$. Man hat also $cos\, a' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ und $sin\, a' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ Dies ist nun, abgesehen von den un-

wesentlichen, hier nur zur Unterscheidung von der hyperbolischen Formel gebrauchten Strichen, genau dieselbe Beziehung, die sich ursprünglich durch directe Transformation des imaginären Binoms in die Form mit Kreisfunctionen ergab. Der Ausgang von der Zweiwerthigkeit und den hyperbolischen Functionen ist daher insofern der allgemeinere, als er zunächst gar nicht an das Imaginäre anknüpft, wohl aber dieses als besondern Fall einschliesst.

2. Wenn wir sagten, der Ausgang von den hyperbolischen Functionen sei der allgemeinere, so müssen wir auch noch hinzufügen, dass er für das allgemeine, also in erster Linie und zunächst doch als reell zu nehmende Binom auch der natürlichere ist. Allerdings könnte man auch mit einer Verwandlung in die Form mit Kreisfunctionen beginnen und dann die sich als unmöglich charakterisirenden Beziehungen dadurch beseitigen, dass man vermittelst des Imaginären die Kreisfunctionen in Hyperbelfunctionen übersetzte. Allein dies hiesse, die Sache von vornherein am unpassenden Ende angreifen und einen verkünstelten Umweg einschlagen.

Ohnedies stellt sich schon auf dem natürlichen Wege für einen besondern Fall auch ein Hinderniss ein, welches durch eine Abänderung des Verfahrens weggeräumt sein will. Ist nämlich im zweiwerthigen Binom $\alpha < \beta$, so werden Modulus und Functionswerthe imaginär und es giebt zunächst keine einfache directe Verwandlungsart dieser Ergebnisse, welche zu einem brauchbaren Ausdruck führte. Wohl aber können wir von vornherein der Transformation eine zweckentsprechende Wendung geben, indem wir das Binom durch $\pm \beta$ dividiren und alsdann für den Quotienten $1 \pm \frac{\alpha}{\beta}$ die Umgestaltung in das Hyperbolische vornehmen. Wir setzen demgemäss $1 \pm \frac{\alpha}{\beta} = \varrho\,(ch\,a \pm sh\,a)$ und finden hieraus auf dem Wege, wie er oben specieller angegeben wurde, zuerst $\varrho = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}$, $ch\,a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}}$ und $sh\,a = \frac{\alpha}{\beta\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}}$. Nun ist noch ϱ mit $\pm \beta$ zu multipliciren, damit man nicht blos den Modulus des binomialen Factors, sondern den des ursprünglichen Binoms erhalte. Nennen wir letzteren ϱ', so ist also $\varrho' = \pm \beta \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. Dem $\pm$ des Modulus ent-

spricht das $\pm$ des Arguments, woraus wiederum ein $\pm$ des hyperbolischen Sinus folgt, während der hyperbolische Cosinus ungeändert bleibt.

Aus allem Bisherigen drängt sich die Wahrnehmung auf, dass die beiderlei Functionen, circulare und hyperbolische, gründlich verstanden, eine einzige Gattung sind, die sich nur durch reelle oder imaginäre Beschaffenheit der Argumente oder auch des Vorzeichens unterscheidet. In der That giebt es auch eine noch sichtbarere Zusammenfassung dieser Einheitlichkeit in der Exponentialfunction. Wir haben, wie im vorigen Capitel entwickelt, nicht blos eine imaginäre Grundgleichung in der Bedeutung des Eulerschen Aperçü, also nicht blos $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + \sqrt{-1} \sin a$, sondern auch die reelle $e^{a} = ch\ a + sh\ a$; und es ist im Hinblick auf die Wichtigkeit der Werthigkeiten besonders hervorzuheben, dass beide Gleichungen zweiwerthig sind. Wir können nun die geometrischen Functionen oder vielmehr, da man auch die Exponentialfunctionen als solche nehmen könnte, die Curvenfunctionen ganz zur Seite lassen und die Gestalt der Exponentialfunction zum Ausgangspunkt einer transcendenten Transformation machen, die für die Rechnung dasselbe leistet und noch bequemer ist als die bisher übliche des imaginären Binoms und diejenige des reellen Binoms, die wir ihr hinzugefügt haben.

Man setze daher $\varrho\, e^{\pm a} = \alpha \pm \beta$. Multipliciren wir die zwei Werthe dieser Gleichung mit einander, so erhalten wir $\varrho^2 = \alpha^2 - \beta^2$. Wir haben nun weiter $e^{\pm a} = \frac{\alpha}{\varrho} \pm \frac{\beta}{\varrho} = \frac{\alpha \pm \beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$. Nehmen wir auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhalten wir $\pm a = l\left(\frac{\alpha \pm \beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\right)$. Dies ist die allgemeine exponentielle Transformation, die ohne Weiteres für alle Zwecke genügt, ausgenommen den schon vorher bei der hyperbolischen Transformation berührten Fall, dass der zweiwerthige Bestandtheil des Binoms der absolut grössere ist. Hiefür lässt sich aber mehr als ein Ausweg finden.

Erstens kann man das Binom wie oben durch $\pm \beta$ dividiren und dann die exponentielle Transformation vornehmen. Man erhält alsdann $\varrho' = \pm\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ und $a = l\left(\frac{1 \pm \frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}}\right)$. Zweitens kann man aber auch davon Gebrauch machen, dass der Logarithmus

einer imaginären Grösse dem um $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ vermehrten Logarithmus der reell genommenen Grösse gleich ist. Da dieser Satz nicht sehr gewöhnlich ist, so mag hier eine kurze Ableitung eingeschaltet werden. Zunächst hat man nach den gewöhnlichen Regeln der Rechnung mit Logarithmen $l\,(q\sqrt{-1}) = l\,(q) + l\,(\sqrt{-1})$. Den Werth von $l\,(\sqrt{-1})$ findet man nun aus der imaginären Grundgleichung. Nach ihr hat man speciell $e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}$, und da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ist, wird die rechte Seite der Gleichung einfach $\sqrt{-1}$. Aus $e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$ folgt durch Nehmen der Logarithmen $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = l\,(\sqrt{-1})$. So ist denn $l\,(q\sqrt{-1}) = l\,(q) + l\,(\sqrt{-1}) = l\,(q) + \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$. Mit Hülfe dieser allgemeinen Beziehung formt sich jenes Argument, welches für $\alpha < \beta$ imaginär wird, nämlich $l\left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right)$ leicht um, indem dafür zuvor $l\left(\sqrt{-1}\,\frac{1+\frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}}}\right)$ gesetzt wird. Hieraus hat man sofort $a = l\left(\frac{1+\frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}}}\right) + \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$. Macht man nun $a = a' + \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, so ist $a' = l\left(\frac{1+\frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}}}\right)$. Setzt man weiter $\varrho\, e^a = \varrho'\, e^{a'}$, so folgt daraus $\varrho' = \varrho\, e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \varrho\sqrt{-1}$, und da $\varrho = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, so ist $\varrho' = \sqrt{\beta^2-\alpha^2}$. Mit diesen Werthen für a' und ϱ' ist nun die Transformation reell gemacht und weist, wie es sein muss, dasselbe Ergebniss auf wie auf dem ersten Wege.

Stillschweigend haben wir für die exponentielle Transformation das Binom zunächst als reell vorausgesetzt. Jedoch auch für den Fall eines imaginären Binoms ist die neue exponentielle Form eine weniger umständliche als die aus Curvenfunctionen und hier speciell aus Kreisfunctionen zusammengesetzte. Der kürzeste Weg zu ihr zu gelangen ist aber nicht der directe nach der vorher für den reellen Fall dargelegten Methode; denn auf diesem Wege hätte man die Logarithmen imaginär gemischter Grössen erst

dadurch zu finden, dass man sie doch wieder auf Kreisfunctionen zurückführte. In der einfachsten Art hat man vielmehr die gewünschte Transformation unmittelbar aus der imaginären Grundgleichung selbst, indem man anstatt $\varrho\ (cos\ a + \sqrt{-1}\ sin\ a)$ die diesem Ausdruck gleiche Exponentialform $\varrho\ e^{\pm a\sqrt{-1}}$ benützt.

3. Bei der Umwandlung eines Binoms in die hyperbolisch transcendente Form haben wir eine Zweiwerthigkeit des Binoms vorausgesetzt; denn unsere Hauptaufgabe bestand eben darin, zweiwerthige Binome unter die fragliche Form zu bringen. Letzteres heisst mehr thun, als etwa ein einwerthiges Binom umwandeln. Um aber den Anschein zu beseitigen, als wäre die Zweiwerthigkeit Vorbedingung der ganzen Operation, ist noch besonders hervorzuheben, wie sich der Sachverhalt für den Fall der Einwerthigkeit gestaltet. Setzen wir $\alpha + \beta = \varrho\ ch\ a + \varrho\ sh\ a$, so brauchen sich Partialgleichungen nicht von selbst zu ergeben. Da wir zwei Grössen, nämlich ϱ und a zu bestimmen haben, so dürfen wir auch willkürlich zwei Theilgleichungen bilden, indem wir $\alpha = \varrho\ ch\ a$ und $\beta = \varrho\ sh\ a$ setzen. Alles Weitere versteht sich hiemit von selbst, und die Umwandlung eines jeden Binoms, gleichviel ob zweiwerthig oder nicht, in eine hyperbolische Form ist ersichtlich.

Uebrigens kann man zu jedem einwerthigen Binom $\alpha + \beta$ willkürlich einen zweiten Werth $\alpha - \beta$ oder auch $- \alpha + \beta$ gesellen und es als zweiwerthiges behandeln. Hiedurch erhält eine directe exponentielle Transformation, wie wir sie in der vorigen Nummer vorgenommen haben, für einwerthige Binome erst einen bestimmten Sinn. Andernfalls würde nämlich die Gleichung $\varrho\ e^a = \alpha + \beta$ eine unbeschränkte Menge von Lösungen zulassen. Man könnte beispielsweise $\varrho = 1$ setzen oder vielmehr man brauchte überhaupt keinen Modulus. Die Bedeutung der zweiwerthigen Binome liegt darin, dass sie die natürliche Grundform der Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades darstellen. Die Imaginarität des zweiten Bestandtheils ist ein besonderer Fall, der durch Variation der constanten Coefficienten aus dem reellen entsteht, und umgekehrt kann man durch eine derartige Variation die imaginäre Zweiwerthigkeit in eine reelle übergehen lassen. Auch die reellen Wurzeln der höheren Gleichungen kann man wie die imaginären unter die binomische Form bringen; aber eine derartige Paarung bleibt alsdann willkürlich, und ist in allen Combinationen der reellen Wurzeln zu je zweien ausführbar,

während sie im imaginären Fall nothwendig ist und nur auf eine einzige Weise geschehen kann.

Eine Gleichung zweiten Grades ist in letzter Instanz der Grund alles Imaginären, wo und wie es auch vorkommen möge. Hiemit ist auch die entsprechende reelle Gestaltung nahegelegt, aus der man sich das Imaginäre durch Uebergang entstanden denken muss. Diese reelle Gestaltung behält, da die Imaginarität wegfällt, nichts als die Form des zweiwerthigen Binoms an sich. Die transcendenten Transformationen eines solchen zweiwerthigen reellen Binoms haben daher ihren Nutzen, sobald es gilt, die reelle und die imaginäre Phase aus demselben Gesichtspunkt, also hier speciell nach Maassgabe des Laufs analoger Transcendenten zu betrachten.

Es wird kaum nöthig sein, noch etwas Besonderes über das Potenziren, Wurzelausziehen, Multipliciren und Dividiren bezüglich zweiwerthiger Binome zu sagen. Das Analogon der Moivreschen Formel liegt nahe genug. Ja wir brauchen überhaupt von einer besondern Binomialformel für hyperbolische Functionen kaum zu reden, da die unmittelbare exponentielle Transformation die erforderliche Operationsweise zu etwas Selbstverständlichem macht. Im Hinblick auf die exponentielle Form sind nämlich die Argumente immer Exponenten, d. h. Logarithmen, und man hat daher mit ihnen nicht blos nach dem früher gebrauchten Ausdruck wie mit Logarithmen, sondern als mit Logarithmen zu verfahren. Letztere Eigenschaft, Logarithmen zu sein, verlieren die Argumente auch nicht, wenn sie zugleich als die Argumente der entsprechenden Kreis- oder Hyperbelfunctionen figuriren. Man hat daher die Argumente nur zu vervielfältigen, zu theilen, zu addiren oder zu subtrahiren, je nachdem die ursprünglichen zweiwerthigen Binome potenzirt, radicirt, mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt werden sollen.

4. Ueberall wo es darauf ankommt, die transcendenten Transformationen selbst zweigliedrig zu haben, etwa um sie gehörig addiren zu können, kann man selbstverständlich mit der rein exponentiellen Form in ihrer unmittelbaren Eingliedrigkeit nicht auskommen und muss diese in die Zweigliedrigkeiten mit Curvenfunctionen übersetzen. Handelt es sich z. B. darum, den algebraischen Bau der Wurzelform dritten Grades in einen transcendenten Ausdruck zu verwandeln und hiebei die dritten Wurzeln auszuziehen, so giebt unsere allgemeine Behandlung des zwei-

werthigen Binoms hiezu auch eine allgemeine Regel. Dem ergänzend gemäss geht man vom irreducibeln Fall, also vom imaginären Binom aus. Wir aber erfassen die Aufgabe sofort in ihrer vollen Allgemeinheit, indem wir uns darauf stützen, dass sich die dritte Wurzel im Wurzelelement dritten Grades stets auf ein zweiwerthiges Binom bezieht, welches sowohl reell als imaginär sein kann. Grade der zunächst reell genommene Fall, der sich in Hyperbelfunctionen umgestaltet, liefert die allgemeine transcendente Form der Wurzel einer Gleichung dritten Grades. Die irreducible Abart fällt als Specialfall darunter und bestimmt sich leicht, indem man die hyperbolischen Functionen in circulare verwandelt.

Die schliessliche Aufgabe ist bei der Uebertragung der Gleichungswurzel dritten Grades in das Transcendente stets die, für $jl + j^2m$, diese Bezeichnung im Sinne unserer früheren Ausdrucksart der Wurzelformen verstanden, einen eingliedrigen Ausdruck zu finden, in welchem die dritten Wurzeln ausgezogen und die Zweiwerthigkeiten verschwunden sind. Jedes der beiden Wurzelelemente ist auf gleiche Weise zu behandeln; jedes ist die dritte Wurzel aus demselben zweiwerthigen, aber das andere Mal entgegengesetzt genommenen Binom. Wir haben demgemäss $l = (\alpha \pm \beta)^{\frac{1}{3}}$ und $m = (\alpha \mp \beta)^{\frac{1}{3}}$. Nach den oben angegebenen Regeln mögen nun für eine hyperbolische Transformation ϱ und a bestimmt sein; dann haben wir $l = \varrho^{\frac{1}{3}} (ch\ a \pm sh\ a)^{\frac{1}{3}}$ und $m = \varrho^{\frac{1}{3}} (ch\ a \mp sh\ a)^{\frac{1}{3}}$. In ihrer vollen Allgemeinheit finden sich die Argumente erst dann bestimmt, wenn man ihnen noch ein ganzes Vielfache der Periode der Function hinzufügt. Man muss also statt $ch\ a$ schreiben $ch\ (a + 2k\pi \sqrt{-1})$; die hyperbolischen wie die exponentiellen Functionen kehren nämlich jedesmal zu demselben Werth zurück, so oft man dem Argument $2\pi\sqrt{-1}$ hinzufügt, grade wie es die Kreisfunctionen thun, sobald man deren Argument um 2π vergrössert. Die Periode der hyperbolischen Functionen $2\pi\sqrt{-1}$ lässt sich aus der imaginären Grundgleichung ableiten, indem man zunächst nachweist, dass die Exponentialfunctionen die fragliche Periode haben, und dann zur reellen Grundgleichung übergeht, vermittelst deren man aus der exponentiellen Periode auf die gleiche hyperbolische schliesst. Nach der imaginären Grundgleichung hat man $e^{2k\pi\sqrt{-1}} = cos\ 2k\pi + \sqrt{-1}\ sin\ 2k\pi = 1$. Aus diesem Grunde muss auch

$e^{a+2k\pi\sqrt{-1}} = e^a . e^{2k\pi\sqrt{-1}} = e^a$ sein. Aus der reellen Grundgleichung hat man durch Addition, beziehungsweise Subtraction ihrer beiden Werthe $ch\ a = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$ und $sh\ a = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$. Hienach ergiebt sich nun auch, indem man $a + 2k\pi\sqrt{-1}$ für a setzt, $ch\,(a + 2k\pi\sqrt{-1}) = ch\ a$, und das Analogon für die andere Function, da die rechten Seiten der betreffenden Gleichungen durch die Einsetzung der exponentiellen Periode den Werth nicht ändern.

Kommen wir nach dieser Zwischendarlegung auf die allgemeinen hyperbolischen Formen der Binome zurück. Es ist

$$[ch\ (a + 2k\pi\sqrt{-1}) \pm sh\ (a + 2k\pi\sqrt{-1})]^{\frac{1}{3}}$$
$$= ch\left(\frac{a}{3} + \frac{2}{3}k\pi\sqrt{-1}\right) \pm sh\left(\frac{a}{3} + \frac{2}{3}k\pi\sqrt{-1}\right)$$

und das andere Binom ebenso, nur dass in ihm $\mp$ an Stelle von $\pm$ steht. Beide Binome haben noch $\sqrt[3]{\varrho}$ zum Factor. Um sie einfach addiren zu können und ohne Weiteres zur einfachsten Form zu gelangen, nehmen wir aus der Wurzelform $j\,l + j^2 m$ die absolut signirte Gestalt $j^3 l + j^6 m = l + m$ und erhalten für letztere Summe $2\sqrt[3]{\varrho}\ ch\left(\frac{a}{3} + \frac{2}{3}k\pi\sqrt{-1}\right)$. Giebt man k die Werthe 0, 1 und 2, so hat man die drei Wurzeln der Gleichung dritten Grades und zwar unmittelbar für den Fall, dass sich das algebraische Binom, welches sich im Wurzelbau findet, reell gestaltet. Auch sieht man an den transcendenten Wurzeln, dass in diesem Fall nur eine reell werden kann, während grade im irreducibeln Fall es alle sein müssen. Ausser dem unmittelbaren Ergebniss der drei Wurzeln ist in deren hyperbolischer Form auch noch das für den irreducibeln Fall mit angelegt. Für letzteren werden die Argumente der hyperbolischen Function imaginär, und man hat nur die drei transcendenten Wurzelformen aus dem Hyperbolischen in das Circulare zu übersetzen, um die alsdann sämmtlich reellen Wurzeln in der Gestalt von $2\sqrt[3]{\varrho}$ $cos\,(a' + \frac{2}{3}k\pi)$ zu erhalten.

Bei Gelegenheit dieser indirecten Mitreducirung des irreducibeln Falls möge auch die Angabe einer rein arithmetischen Reducirung Platz finden, die von allen Transcendenten, einschliesslich der Reihen, unabhängig ist. Man braucht nämlich nur eine zweigliedrige Wurzelausziehung aus einem gemischt ima-

ginären Zahlenbinom als neue arithmetische Operationsart einzuführen, und das Hinderniss, welches die arithmetische Irreducibilität verschuldet, wird überwunden. Dieses Hinderniss besteht ja darin, dass die Addition von reellen und imaginären Zahlen wegen der Ungleichartigkeit der Einheiten nicht ausgeführt werden kann. Nun kann die Wurzel aus einem gemischt imaginären Binom nur wieder ein solches Binom sein. Um also beispielsweise $\sqrt[3]{\alpha + \beta\sqrt{-1}}$ arithmetisch zu bilden, muss man sie von vornherein in der Form von $n_1 + n_2\sqrt{-1}$ suchen. Während man also bei der gewöhnlichen, sozusagen eingliedrigen Wurzelausziehung stückweise die arithmetischen Bestandtheile des einzigen Gliedes durch geregelte Versuche ermittelt, thut man dasselbe hier für zwei Glieder. Auch lässt sich das Verfahren noch durch eine andere Ausdrucksweise der Sache charakterisiren. Man behandelt nämlich die reellen und die imaginären Einheiten ähnlich, wie die Zehner, die Hunderter, die Zehntel, die Hundertel u. s. w. bei der Wurzelausziehung im gewöhnlichen Decimalsystem. Dies möge an einem bestimmten Zahlenbeispiel erläutert werden. Es sei die Kubikwurzel aus der Zahl $10 \pm 3\sqrt{-1}$ auszuziehen. Eine erste Annäherung dazu ist die Zahl 2, deren Kubus 8 ist, so dass der Fehler im Kubus $2 \pm 3\sqrt{-1}$ beträgt. Um zu einem angenäherten Werth einer Kubikwurzel einen der Wahrheit noch näheren zu finden, muss man den Fehler im Kubus durch das dreifache Quadrat des angenäherten Werthes dividiren und zu letzterem den Quotienten addiren. Eine ähnliche Regel findet ja auch bei der Kubikwurzelausziehung aus mehr als dreizifferigen Zahlen Anwendung. Man dividire demgemäss $2 \pm 3\sqrt{-1}$ durch $3 . 2^2 = 12$, so erhält man als Quotienten $\frac{1}{6} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-1}$, also als zweite Annäherung $2\frac{1}{6} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-1}$. Letztere Zahl hat zum Kubus $9\frac{661}{864} \pm 3\frac{97}{192}\sqrt{-1}$, so dass der Fehler $\frac{203}{864} \mp \frac{97}{192}\sqrt{-1}$ beträgt. Diesen hat man dann wieder durch $3 . (2\frac{1}{6} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-1})^2$ zu dividiren und den Quotienten zu $2\frac{1}{6} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-1}$ zu addiren, um eine noch engere Annäherung zu erhalten. So fortfahrend, erzielt man immer mehr angenäherte Werthe von $\sqrt[3]{10 \pm 3\sqrt{-1}}$ und findet, wenn man den Werth bis auf die Genauigkeit von 5 Decimalen feststellt, dafür $2{,}17526 \pm 0{,}21202\sqrt{-1}$, woraus

man sieht, dass schon die Annäherung $2\frac{1}{6} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-1}$ nicht mehr viel von der Wahrheit abwich. Nach Angabe des Beispiels kann sich nun auch kein Missverständniss ergeben, wenn wir kurz sagen, die Regeln der gewöhnlichen arithmetischen Wurzelausziehung seien auf imaginäre Binome übertragbar. Auch versteht sich von selbst, dass zweiwerthige reelle Binome ebenso behandelt werden können, sobald es darauf ankommt, die Wurzel ebenfalls wieder mit Unterscheidung der zweiwerthigen Bestandtheile zu erhalten. Letzteres wird indessen leichter erreicht, wenn man beide Wurzelwerthe auf dem gewöhnlichen Wege getrennt darstellt und hinterher die Bestandtheile als Unbekannte zweier Gleichungen bestimmt.

5. Eine Gleichung dritten Grades ohne zweites Glied, wie wir sie in der vorigen Nummer voraussetzten, ist eine sogenannte Winkelgleichung, d. h. eine derartige Gleichung ist nöthig, um einen gegebenen Winkel durch geometrische Construction in drei Theile zu theilen. Hiezu braucht man die Cosinuslinie für das Drittel des Arguments, sei dieses Winkel, Bogen oder Sector. Die Wurzel der fraglichen Gleichung ist der mit einem Modulus multiplicirte oder, kurz ausgedrückt, modulirte Cosinus von ein Drittel des Arguments und die Coefficienten der Gleichung hängen von den Cosinus und Sinus des ganzen Arguments ab. Näher auf die Bildung der Winkelgleichungen selbst, sei es durch die Additionsformel, sei es durch die Moivresche Formel, einzugehen, würde hier zu weit abführen und wer diesen Gegenstand erst zu studiren hat, findet in Lagranges Vorträgen über die Functionenrechnung eine klare und erschöpfende Behandlung.

Wohl aber ist es hier nöthig, die neuen Beziehungen und Gesichtspunkte hervorzuheben, die sich an die Behandlung der zweiwerthigen Binome, an deren Ausdruck durch hyperbolische Functionen und an die von uns eingeführten zweielementigen Gleichungen knüpfen. Bleiben wir zunächst noch bei der fraglichen Gleichung dritten Grades, welche der Urtypus aller weiteren und höheren zweielementigen, die Argumententheilung vermittelnden Gleichungen ist. Die Wurzel ist hier in ihrer gewöhnlichen und bekannten Gestalt, wie gesagt, der modulirte Cosinus von einem Drittel des Arguments. Fassen wir letzteres gleich als eine auf eine Sectorfläche zu beziehende Zahl auf, so ist klar, dass wir durch die Gleichungswurzel eben die zur Construction des Drittels der Sectorfläche erforderliche Cosinuslinie erhalten.

Der fragliche Cosinus ist eben die algebraisch zu suchende transcendente Grösse. Die der transcendenten Wurzel gleiche algebraische Wurzel enthält demgemäss die Lösung der Aufgabe, indem sie für die Cosinuslinie einen algebraisch hergestellten Zahlenwerth liefert. Eine geometrische Construction im Sinne des einfachen Gebrauchs der Euklidischen Grundmittel, der graden Linie und des Kreises, ist der Natur der Sache nach unmöglich und eine durch andere Constructionsmittel hat kein sonderliches Interesse. Es bleibt also nur der algebraische oder transcendente Zahlenweg als nächste Lösungsvermittlung übrig.

Unser hyperbolisches Ergebniss legt uns neben der Theilung der Flächen von Kreissectoren auch diejenige der Hyperbelsectoren nahe. Wie die Wurzelbeschaffenheit unmittelbar zeigt, lässt sich das Argument der Hyperbelfunction, d. h. ein gegebener Hyperbelsector geometrisch in drei gleiche Theile zerlegen, indem man die erforderliche hyperbolische Cosinuslinie dem Zahlenwerth nach algebraisch durch die bezügliche Gleichung kennt. Die Gleichung dritten Grades ohne zweites Glied ist hienach in einem allgemeineren Sinne eine Theilungsgleichung. Ist das zweiwerthige Binom, welches unter den dritten Wurzeln steht, imaginär, so dient dieser Fall zur Theilung der Winkel, Bögen oder Kreissectoren; ist es aber reell, so wird die Hyperbelfläche getheilt. Diese allgemeine Argumenttheilung vertritt erst den vollständigen Sachverhalt. Man drückt sich daher einseitig aus, wenn man nur von Winkelgleichungen redet und doch den ganzen Typus derjenigen Gleichungen meint, welche sich auch für die Theilung der hyperbolischen Argumente ergeben. Beiderlei gehört sozusagen in zwillingsartiger Weise zusammen. Jedesmal aber unterscheidet sich der hyperbolische von dem circularen Fall dadurch, dass im ersteren nur eine reelle Wurzel, im letzteren aber drei reelle Wurzeln vorhanden sind.

In Nr. 3 des achten Capitels haben wir den Begriff und die rein algebraische Lösung zweielementiger Gleichungen aller Grade aufgestellt und zugleich diejenige Abart dieser Gleichungen hervorgehoben, welche mit den nach den gewöhnlichen Methoden gebildeten Winkeltheilungsgleichungen einerlei ist. Hier können wir unsere algebraische Methode noch durch Hinzufügung einer transcendenten Umformung ergänzen, womit sich zugleich auch zeigt, dass die fragliche Abart der zweielementigen Gleichungen wirklich die Winkelgleichungen vorstellt. Ausserdem muss sich

aber mit dieser Nachweisung noch ergeben, dass jene ganze Abart in allen Graden nicht blos die Winkeltheilung, sondern ebenso wie bei der Gleichung dritten Grades auch die Theilung der Hyperbelsectoren regelt.

Wie man aus den Formeln an der fraglichen Stelle des achten Capitels ersieht, ist der Wurzelbau für jene Gleichungskategorie von ähnlicher Einrichtung, wie bei der Gleichung dritten Grades. Es ist nämlich, um die Wurzelelemente zu erhalten, irgend eine höhere Wurzel, also beispielsweise die fünfte, aus einem zweiwerthigen Binom auszuziehen. Auch fällt dieses Binom, je nach der Beschaffenheit der Coefficienten, reell oder imaginär aus. Um den ganzen Wurzelausdruck aus dem Algebraischen in das Transcendente gleichsam zu übersetzen, können wir nun Schritt für Schritt dasselbe Verfahren anwenden, welches wir vorher an der sogenannten Cardanischen Formel erläutert haben. Wir gehen von der reellen Zweiwerthigkeit aus, erhalten dadurch schliesslich hyperbolische Wurzeln und gewinnen aus diesen unmittelbar den imaginären Fall mit Kreisfunctionen. So erzielen wir die Doppelergebnisse, deren wir bedürfen. Die Formeln gestalten sich analog, wie bei der Gleichung dritten Grades; der einzige Unterschied ist der, dass in der Theilung des Arguments fünf an die Stelle von drei tritt und demgemäss auch fünf Wurzeln entstehen. Auch das Reell- oder Imaginärsein dieser Wurzeln stellt sich analog; im Falle eines reellen zweiwerthigen Binoms, also für den Fall der Hyperbelargumente ist in der betreffenden Gleichung fünften Grades nur eine Wurzel reell und die andern vier sind imaginär; ist aber das Binom imaginär, so werden sämmtliche fünf Wurzeln reell.

Die für den fünften Grad sich ergebenden Formeln sind nämlich $2\sqrt[5]{\varrho}\ ch\ (a + \frac{2}{5}\, k\pi \sqrt{-1})$ und $\sqrt[5]{\varrho}\ cos\ (a' + \frac{2}{5}\, k\pi)$, worin man k nacheinander die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 zu geben hat. Nun lässt sich an diesen Formeln alles Gesagte sofort erkennen. Die Hauptsache für uns bleibt aber, dass sich die auf rein algebraischem Wege gewonnene und gelöste Gleichungsart durch die Uebertragung ihrer Wurzeln in das Transcendente als diejenige Gleichungsclasse erwiesen hat, vermöge deren eine beliebige Theilung der Winkel, Bögen oder Sectoren im Kreise und entsprechend der Sectorflächen in der Hyperbel bewerkstelligt wird. Abgesehen von diesem unsern directen Wege, hätte man erst

durch äussere Vergleichung dieser Gleichungsclasse mit derjenigen der gewöhnlichen Winkelgleichungen die Einerleiheit beider feststellen müssen und hiebei den hyperbolischen Theil des Sachverhalts nicht einmal miterhalten. Die Gewinnung der ganz allgemeinen Wahrheit einschliesslich der hyperbolischen Gestaltung beruht theils auf dem Gange der Werthigkeitsrechnung, theils auf der aus unserer Imaginärtheorie stammenden Regel, mit dem reellen Fall auch immer den imaginären zu verbinden und zu einem anscheinend oder durch das Herkommen isolirten imaginären Fall auch immer den reellen zu suchen.

Zur Wahrung der völligen Allgemeinheit der hier in Frage gekommenen Aufgabe sei schliesslich noch Folgendes bemerkt. Die Mehrheit der Wurzeln ist keine Ueberflüssigkeit, sobald man das Problem in der gehörigen Ausdehnung formulirt. Geometrisch denkt man gewöhnlich an einen gegebenen Winkel; dieser wird unmittelbar nur einer sein und der gesuchte aliquote Theil davon wird demgemäss auch nur eine einzige Grösse sein können. Umfassender stellt sich aber sofort die Frage, sobald man die Function des Winkels das Gegebene sein lässt. Zu dieser Function gehören dann unbeschränkt viele Winkel und die Aufgabe der Theilung erstreckt sich auf diese unbeschränkte Gesammtheit. Nun gehört allerdings zu einem einzigen Werth der Function des getheilten Arguments auch schon jene unbeschränkte Zahl getheilter Argumente; aber die unmittelbare Aufgabe, welche durch die Gleichung gelöst wird, bezieht sich nicht direct auf die getheilten Argumente, sondern auf die möglichen Werthe der Functionen der getheilten Argumente. Diese entsprechen aber immer dem Grade der Gleichung. Was also durch die Gleichung geliefert wird, ist die algebraische Darstellung der Function des getheilten Arguments aus derjenigen des ganzen Arguments, und wenn diese einwerthig ist, so hat jene eine dem Theiler entsprechende Werthezahl. In dieser Fassung ist die Aufgabe auch von der Art, wie sie sich für periodische Functionen überhaupt stellt und sich in Abels „Untersuchungen über die elliptischen Functionen“ durch Nachweisung derjenigen Gleichungen gelöst findet, deren Wurzeln die elliptischen Functionen der getheilten Argumente liefern, während die Coefficienten von den elliptischen Functionen der ganzen Argumente abhängen.

6. Zur Vervollständigung der Werthigkeitsgesichtspunkte ist es nützlich, die Exponentialfunction e^x von vornherein darauf

anzusehen, wie die nach Potenzen von z fortschreitende Reihe für sie nach Maassgabe etwaiger Werthigkeiten von z oder der Ersetzung von z durch ein vollständiges werthiges Polynom in entsprechend verschiedene werthige Bestandtheile zerfalle. Der einfachste Fall ist zunächst der von $\pm z$, und hier zerlegt sich die Reihe in zwei, eine mit einwerthigen und eine mit zweiwerthigen Gliedern. Die erstere mit den graden Potenzen ist die Reihe für den hyperbolischen Cosinus, die andere die für den hyperbolischen Sinus. Bezeichnet man jene mit s_1, diese mit s_2, so hat man $e^{\pm z} = s_1 \pm s_2$. Wie die Reihe für den Fall von $\pm z\sqrt{-1}$ in zwei Bestandtheile zerfällt, ist seit dem Eulerschen Aperçü bekannt; nur wird in Ermangelung einer besondern Aufmerksamkeit auf die Werthigkeiten nicht hervorgehoben, dass auch hier die eine Reihe einwerthig, die andere zweiwerthig ist. Die Darstellung des Kreiscosinus durch eine grade Reihenfunction und die des Sinus durch eine ungrade ist übrigens selbstverständlich, und ebenso ist es die Heraushebung von $\sqrt{-1}$ als Factor der Sinusreihe.

Eine umfassendere Idee von dem Zerfallen der Exponentialreihe in verschieden signirte Partialreihen gewinnt man bereits, wenn man $e^{\iota z}$ bildet, worin ι in erster Linie eine primitive vierte Einheitswurzel, also $-\sqrt{-1}$ oder $+\sqrt{-1}$ und dann auch zugleich die übrigen vierten Einheitswurzeln, also ausserdem -1 und $+1$, und zwar am besten in der Reihenfolge ι, ι^2, ι^3, ι^4 vorstellt. Hiebei zerfällt die Reihe quadrinomisch, so dass wir $e^{\iota z} = \iota s_1 + \iota^2 s_2 + \iota^3 s_3 + \iota^4 s_4$ erhalten. Man theile nun diese Viergliedrigkeit zunächst so ein, dass man dafür $(s_4 + \iota^2 s_2) + \iota(s_1 + \iota^2 s_3)$ schreibt. Alsdann ist für die beiden imaginären Werthe von ι gemäss den früheren Feststellungen $s_4 + \iota^2 s_2 = s_4 - s_2 = \cos z$ und entsprechend $s_1 + \iota^2 s_3 = s_1 - s_3 = \sin z$. Für die beiden reellen Werthe von ι haben wir aber zufolge jener Eintheilung und den früheren Feststellungen $s_4 + \iota^2 s_2 = s_4 + s_2 = ch\, z$ und entsprechend $s_1 + \iota^2 s_3 = s_1 + s_3 = sh\, z$. Aus den gewonnenen vier Gleichungen können wir nun alle vier Reihen bestimmen. Durch blosse Additionen und Subtractionen ergiebt sich nämlich $s_1 = \frac{1}{2}(sh\, z + \sin z)$, $s_2 = \frac{1}{2}(ch\, z - \cos z)$, $s_3 = \frac{1}{2}(sh\, z - \sin z)$, $s_4 = \frac{1}{2}(ch\, z + \cos z)$. Die weiteren Partialreihen oder, was dasselbe heisst, Partialfunctionen der Exponentialfunction liefern also keine neue Gattung zu den circularen und

den hyperbolischen, sondern setzen sich aus diesen zusammen. Analog, nur umständlicher würde sich das Ergebniss gestalten, wenn wir noch andere Werthigkeiten in Frage brächten; ja es bleibt auch noch bestehen, wenn wir z seine allgemeinste Form geben, nämlich $z = j l_1 + j^2 l_2 + j^3 l_3 + \ldots + j^n l_n$ setzen. Bezeichnen wir dies n werthige Polynom kurzweg mit p_n, so erhalten wir $e^{p_n} = j s_1 + j^2 s_2 + j^3 s_3 + \ldots + j^n s_n$; die Theilreihen s_1, $s_2, s_3, \ldots, s_n$ werden aber nicht neue Functionsgattungen, sondern lassen sich durch Zusammensetzungen der Kreis- und der Hyperbelfunctionen ausdrücken. Aus letzterer Thatsache folgt, dass, wenn sich werthige Polynome sollen in Ausdrücke der fraglichen transcendenten Art übertragen lassen, die Glieder dieser Polynome auf irgend welche Art in Beziehungen stehen werden, die in irgend welchen zu Grunde liegenden zweiwerthigen Binomen ihren Ursprung haben. Die fraglichen Transcendenten entsprechen nämlich immer zweiwerthigen Binomen, und es muss daher von der einen Ausdrucksweise zur andern eine Brücke geben. Die mehrgliedrigen Polynome können daher nicht unmittelbar als solche, sondern nur mittelbar in ihrer Eigenschaft, algebraisch darstellbare Gleichungswurzeln zu vertreten, für eine transcendente Umwandlung in Frage kommen.

7. Nachdem wir in diesem Capitel und auch schon in dem vorangehenden von der imaginären Grundgleichung zusammen mit der reellen einen so ausgedehnten Gebrauch gemacht haben, möge schliesslich noch die imaginäre Constantengleichung platzfinden, die wir uns aus jener abgeleitet haben, und die in verschiedenen Rechnungsbeziehungen gute Dienste leisten kann. Auch ist sie sowohl ihrer Einfachheit als ihres auffallenden Inhalts wegen sehr geeignet, sich dem Gedächtniss einzuprägen. Die eine Seite derselben ist die imaginäre Einheit mit wiederum der imaginären Einheit als Exponenten, die andere eine reelle Zahl, nämlich die Basis der natürlichen Logarithmen, potenzirt mit dem negativ gesetzten Verhältniss des Halbkreises zum Durchmesser. Die Gleichung lautet also $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ oder in unserer Schreibweise, die hier die signirte Einheit recht ins Licht setzt, $(\Gamma 1)^{\Gamma 1} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Dem Zahlenausdruck nach ist $e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}20788\ldots$, also $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 0{,}20788\ldots$ Sonderbar kann eine solche Gleichung nur von einem Standpunkt aus erscheinen, welcher noch nicht

derjenige unserer Imaginärtheorie ist. Sie hört auf, ein Curiosum zu sein und wird zu einem ebenso begreiflichen als nützlichen Hülfsmittel, sobald man davon ausgeht, dass im Imaginärzeichen Γ nichts als eine Regel für die mit der beistehenden, an sich absoluten Grösse zu vollziehenden Operationen enthalten ist. Sie hat die gleichermaassen begründete Bedeutung, wie die imaginäre Grundgleichung selbst, auf die wir sie jetzt zurückführen werden.

In Nr. 2 hatten wir aus der imaginären Grundgleichung bereits dargethan, dass $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ ist. Potenziren wir diese Gleichung mit $\sqrt{-1}$, so ergiebt sich die nachzuweisende Constantengleichung $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Man kann dieser Constantengleichung auch andere an die Seite stellen, in denen in dem Exponentialausdruck der imaginären Einheit die reelle Einheit, sei sie nun positiv oder negativ, sowohl für die Grundzahl als für den Exponenten an die Stelle der imaginären tritt. In dieser Weise hat man $1 = e^{2\pi\sqrt{-1}}$ und $-1 = e^{\pi\sqrt{-1}}$, Ausdrücke, die sich aus der imaginären Grundgleichung ohne Weiteres bewahrheiten lassen. Nebenbei bemerkt, erhält der Begriff von $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ seine klare Bestimmtheit durch die allgemeine Reihe für eine beliebige Exponentialfunction. Durch eine solche Reihe sind die Rechnungsregeln bestimmt, vermöge deren man nach einem imaginären Exponenten die Potenz bilden kann.

Was übrigens den Gebrauch der Constantengleichung betrifft, so kann man beispielsweise aus ihr, nachdem sie einfürallemal festgestellt ist, den Logarithmus einer imaginären Zahl bestimmen, ohne bis zur imaginären Grundgleichung zurückgreifen zu müssen. Nimmt man nämlich auf beiden Seiten die Logarithmen, so hat man $\sqrt{-1}\, l\,(\sqrt{-1}) = -\frac{\pi}{2}$ und hieraus $l\,(\sqrt{-1}) = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, also diejenige Gleichung, deren man, wie in Nr. 2 gezeigt wurde, bedarf, um die Logarithmen imaginärer Zahlen anzugeben. Auch die erwähnten Nebengleichungen $1 = e^{2\pi\sqrt{-1}}$ und $-1 = e^{\pi\sqrt{-1}}$ sind aus der Constantengleichung selbst leicht abzuleiten, indem man zu der aus dieser zuletzt gewonnenen Gleichung die Zahlen nimmt und den so entstehenden Ausdruck $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ in die vierte Potenz erhebt, beziehungsweise quadrirt. Was also auch für Beziehungen zwischen den drei Elementen, nämlich e, π und den reellen oder imaginären Einheiten in Frage kommen mögen,

so sind sie in unserer Grundgleichung dieser Constanten mitenthalten und brauchen daraus nur durch gewöhnliche und naheliegende Umformungen entwickelt zu werden. Für das Gedächtniss ist es vortheilhaft, für allerlei Bestimmungen und deren Beweise einen solchen festen Anhaltspunkt zu haben. Gesetzt man hat die Periode der Exponentialfunctionen zu bestimmen und zu beweisen, so kann dies aus der Constantengleichung sehr einfach geschehen; denn sobald man aus ihr $1 = e^{2\pi\sqrt{-1}}$ entwickelt hat, weiss man auch, dass die Addition von $2\pi\sqrt{-1}$ zum Exponenten der Exponentialfunction nur eine Multiplication dieser Function mit 1, also keine Werthveränderung mitsichbringt.

Zwölftes Capitel.

Functionen werthig getheilter Argumente.

1. In der bisherigen Mathematik sind die Unterschiede der Werthigkeit nie von vornherein, grundsätzlich und umfassend, sondern nur nebenbei und insoweit, als sie sich als unumgänglich gradezu aufdrängten, zur Berücksichtigung gelangt. In manchen Verzweigungen der Mathematik hat man die Mehrwerthigkeiten förmlich ignorirt und deren gelegentlich unvermeidliches Vorkommen als eine Art Belästigung betrachtet, mit der man sich am liebsten gar nicht zu schaffen machte. Auch wird es nur durch diesen Umstand erklärlich, wie in der Differential- und Integralrechnung, ja eigentlich in der ganzen Analysis mit Ausnahme der eigentlichen Algebra und ein paar naheliegender Fälle, die Mehrfachheiten der Werthe haben so gut wie ausser Frage bleiben können. Noch Niemand hat sich principiell mit der Untersuchung abgegeben, was beispielsweise für das Differential oder Integral erfolge, wenn die zu differenzirende oder zu integrirende Grösse mehrwerthig ist. Wie beschränkt aber auch selbst in der eigentlichen Algebra die Auffassung der Werthunterschiede bisher verblieben war, dafür ist die Thatsache ein Zeugniss, dass da, wo wirklich die Werthezahlen eine erhebliche Rolle gespielt haben, dies ausschliesslich am Leitfaden der permutativen Werthe der Gleichungswurzeln geschehen ist.

Am allgemeinsten werden wir den neuen leitenden Gedanken auszudrücken vermögen, wenn wir uns sofort an den Begriff einer mathematischen Function überhaupt halten. Eine solche ist jede Art von Abhängigkeit, vermöge deren eine Grösse aus einer andern durch irgend eine Regel bestimmt wird, mag diese Regel durch Rechnungszeichen oder sonstige analytische Begriffe, oder aber unmittelbar sachlich durch geometrische, mechanische oder andere Festsetzungen gegeben sein. Der Grund oder die Ursächlichkeit, durch welche eine Grösse aus der andern hervorgeht, ist eben das, worin die functionelle Beziehung besteht. Hienach besteht die gesammte Mathematik, wenn man sie einheitlich in ihrer entscheidenden Aufgabe auffasst, in der Ergründung und Darstellung der erheblichen Arten, wie die sachlich wirklichen oder die gedachten Grössen von einander Functionen sind oder sein können. Um functionelle Abhängigkeit handelt es sich auch in den Gebilden der Elementargeometrie; denn der Kern der Angelegenheit ist auch hier immer die Darlegung, wie gewisse Grössengestaltungen von gegebenen Bedingungen, die wiederum Grössen und an diese geknüpfte Regeln sind, abhängig werden. Wo man also auch die Mathematik ins Auge fasse, ob in ihrem alten geometrischen Fussgestell oder auf den Höhen der rein analytischen Abstraction und der Behandlung der entlegensten Transcendenten, überall ist sie im weitesten Sinne des Worts eine Lehre von Functionen und in ihrer neuern Gestalt auch unmittelbar eine Rechnung mit solchen.

In der functionellen Abhängigkeit kann es nun wohl kaum einen fundamentaleren Unterschied geben, als den, der sich einstellt, je nachdem die Regel der Abhängigkeit nur auf eine einzige oder auf mehrere Möglichkeiten führt. Alle zugleich ursprünglichen und directen Herleitungen, in denen gradeswegs eine Ursächlichkeit vertreten oder als ideell bestimmender Grund vorhanden ist, liefern selbstverständlich nur ein einziges Ergebniss. Wo man aber den umgekehrten Weg einschlägt, also jene directen Functionen umkehrt, denkt man irgend eine Grösse zunächst als Ergebniss directer Operationen und sucht nun dazu die Voraussetzung. Letztere muss, wie die Ursache zu einer Wirkung, mehrfach sein können, und hierin liegt auch der letzte Grund aller Mehrwerthigkeiten. Sind nun aber auf diese Weise einmal Mehrwerthigkeiten vorhanden, so können sie selbst auch der Ausgangspunkt directer Operationen werden, und nur so erklärt

es sich, wenn auf dem directen Wege Mehrwerthigkeiten zwar nicht entstehen, aber doch erhalten werden können. Der Fall, dass sie verschwinden, kann nur derjenige der Zurückthuung von Schritten solcher Art sein, durch die sie ursprünglich entstanden sind oder entstehen konnten. Die Frage also, ob in Folge einer Operationsart mehrere Ergebnisse entstehen, sich erhalten oder sich zu einem zusammenziehen, gehört nothwendig zu allen Rechnungsproceduren und Functionsvorstellungen.

Schon für den Fall einfacher und einwerthiger Argumente bieten die verschiedenen indirecten Functionen Veranlassung, die Vielfachheit ihrer Werthe in Anschlag zu bringen. Auch handelt es sich hier nicht blos um Werthigkeiten im engern Sinne, also nicht etwa blos um Signirungswerthe, sondern auch um anderartige Mannigfaltigkeiten der Bestimmung. Die willkürlichen Constanten der Integrale sind ein Beispiel, wie eine indirecte Operation eine unbeschränkte Zahl von Werthen liefern könne. Wir wollen uns jedoch hier vorzugsweise an die eigentlichen Werthigkeiten halten und zwar speciell den Fall ins Auge fassen, dass bereits die Argumente der Functionen als signirte Grössen gegeben sind. Es versteht sich, dass eine solche Werthigkeit der Argumente nur wiederum aus Functionen und zwar aus indirecten Functionen, in jedem Fall also aus irgend einem Rechnungszusammenhange herstammen oder herstammend gedacht werden müsse. Die Untersuchung dieses Ursprungs gehört aber der Regel nach nicht zur Hauptaufgabe, die auch ohne ihn verständlich bleibt.

Die einfachste Form, in welcher sich die werthigen Argumente darbieten können, ist, wie überhaupt, so auch im Fall von Signirungswerthen, die eingliedrige. Jedoch ist in Rücksicht auf die Hauptsache, wie wir bald sehen werden, nur eine anscheinende Vereinfachung vorhanden; denn sobald es sich um die Bestimmung der Form der Function handelt, wird im Allgemeinen zwischen den mehrgliedrig werthigen und den eingliedrig werthigen Argumenten kein wesentlicher Unterschied platzgreifen. Auch für eingliedrige, aber werthige Argumente werden, wie wir im vorigen Capitel an der Exponentialfunction gezeigt haben, die Functionen mehrgliedrigwerthig, und demgemäss kann bei umgekehrter Functionsbeziehung auch der umgekehrte Fall vorkommen. Man hat aber noch einen weiteren Grund, von vornherein grade von dem allgemeinen Fall der getheilten Argumente

auszugehen. Die eingliedrigen sind nämlich insofern von geringerem Interesse, weil bei ihnen ein Hauptumstand, nämlich eine werthige Ungleichartigkeit der Bestandtheile nicht unmittelbar, sondern nur erst in der Function selbst in Frage kommt. Uebrigens können getheilte Argumente, auch ohne dass ein Unterschied der Signirung vorhanden ist, schon allein dadurch ein Interesse erhalten, dass ihre Stücke von einander unabhängig bestimmbar oder sonst selbständig und unterschiedlich behandelbar vorausgesetzt werden. Die Getheiltheit der Argumente ist daher für viele analytische Darlegungen, auch abgesehen von aller Signirungswerthigkeit, von grosser Bedeutung; sie wird es aber um so mehr, sobald auch noch die Gesichtspunkte von reeller oder imaginärer Werthigkeit mitwirken. Der imaginäre Fall, der einzige, den man an und für sich bisher ein wenig in Betrachtung gezogen hat, ordnet sich in unserm System der Rubrik der werthigen oder signirten Grössen überall unter. Auch ist in der That eine äusserliche Trennung beider Fälle nur bei den Binomen möglich; denn mehr als zweigliedrige Ausdrücke enthalten in ihrer mehrfachen Werthigkeit und Signirung auch immer Imaginaritäten.

2. An die Spitze alles Weiteren muss der Satz treten, dass die Function einer aus werthigen Gliedern bestehenden Grösse im Allgemeinen in ebensolcher Weise zusammengesetzt sein wird. Die Function eines werthigen Polynoms ist wiederum ein solches und zwar eines mit denselben Vorsetzungen. Die Fälle, in denen einzelne Signirungen dadurch verschwinden, dass deren Factoren zu Null werden, sind nicht wirkliche Ausnahmen, sondern in der Hauptregel mitenthalten. Ebenso ist es keine eigentliche Ausnahme, wenn die ganze Function Null wird, indem alle Factoren der werthigen Vorsetzungen Null werden. Die werthig polynome Form der Function ist ja dann sogar recht sichtbar auch für den Nullwerth vorhanden. Diese Gestaltung haben wir bereits überall da vor uns gehabt, wo wir die werthigen Wurzelformen in die Hauptgleichung einsetzten oder eingesetzt dachten.

Die Function, für welche der ausgesprochene Satz jedesmal in Anwendung kommen soll, kann jeglicher Art, also rational, irrational oder auch transcendent sein. Dementsprechend beweisen wir daher auch den Satz von vornherein in seinem umfassendsten Sinne, wenn wir uns die Functionen gleich in der Form der Maclaurinschen Reihe in Frage denken. Solche nach

ganzen und positiven Potenzen des Arguments fortschreitende Reihen können als Repräsentanten aller Arten von Functionen gelten; für ganze rationale Functionen laufen sie in eine geschlossene, sonst in eine unbeschränkte Zahl von Gliedern aus. Es sei also eine beliebige Function $f(x)$ und $x = a + jb + j^2 c + j^3 d + \ldots + j^{n-1} h$ gegeben, so ist zunächst $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \ldots$ zu entwickeln und hierin, möge die Reihe geschlossen sein oder nicht, für x das werthige Polynom einzusetzen. Die Klammern sind alsdann aufzulösen, die Vorsetzungen nach den Regeln der Werthigkeitsrechnung auf die Minimalpotenzen zu reduciren und schliesslich die Glieder der ganzen Reihe nach den Potenzen von j zu ordnen und zusammenzufassen. Auf diese Weise ergeben sich soviele Signirungspotenzen und als Factoren dazu soviele Reihen als in dem Polynom für x Glieder enthalten sind. Auch müssen die Potenzen von j nicht nur in derselben Anzahl entstehen, sondern auch dieselben werden, die im Argumentpolynom figuriren. Bezeichnen wir daher die verschiedenen Partialreihen, die wir erhalten, mit s_0, s_1, s_2, s_3 u. s. w. und bedenken dabei, dass ihre Glieder auch von endlicher Anzahl sein können, so haben wir allgemein $f(a + jb + j^2 c + j^3 d + \ldots + j^{n-1} h) = s_0 + js_1 + j^2 s_2 + j^3 s_3 + \ldots + j^{n-1} s_{n-1}$.

Wir sind davon ausgegangen, dass j alle seine Werthe repräsentire. Setzt man also statt derjenigen primitiven Einheitswurzel, die es etwa in erster Linie vorstellen soll, einen der andern Werthe, z. B. j^2 ein, so muss man dies übereinstimmend auch in der sich ergebenden Function thun. Der Beweis gilt für alle diese Fälle mit; denn wir haben in seinem Gange über den speciellen Werth von j nichts vorauszusetzen gehabt, indem die Potenzreducirungen einzig und allein darauf beruhten, dass $j^n = 1$ ist, was ja für jegliches j gilt. Hienach gilt übrigens der beweisende Schluss auf die entsprechende Form der Function nicht blos für Polynome mit vielwerthigen Gliedern, sondern auch überhaupt für unterschiedlich signirte Polynome, auch wenn in ihnen die andern Werthe nicht mitgegeben sind.

Da wir uns bei dem Beweise unseres Satzes auf die Maclaurinsche Reihe gestützt haben, so ist noch ausdrücklich das Bedenken zu beseitigen, dass Schlüsse aus dieser Reihe nur dann unmittelbar entscheidend sind, wenn man den Fall der Conver-

genz voraussetzen darf. Letzteres konnten wir stillschweigend thun, da die Convergenz für einen hinreichend kleinen Werth des Arguments im Allgemeinen vorhanden sein wird und sich aus der Form der Function für diesen Fall auch auf das Uebrige schliessen lässt. Hat man nämlich für irgend einen, wenn auch noch so kleinen Werth des Argumentes x den Satz vermittelst der Maclaurinschen Reihe festgestellt, so kann man mit Hülfe der Taylorschen Reihe zeigen, wie er auch für den Werth $x + i$ gelten müsse, in welchem i einen derartig klein genommenen Zuwachs bezeichnet, dass die Reihe $f(x + i) = f(x) + f'(x)i + \frac{f''(x)}{2} i^2 + \ldots$ convergent wird. In dieser Reihe sind $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. w. erwiesenermaassen werthige Polynome, und ebenso sind i und demgemäss dessen Potenzen ebensolche werthige Polynome. Löst man also die Klammern auf, reducirt die Potenzen von j und ordnet nach diesen, so erhält man für $f(x + i)$ ein Polynom von derselben Werthigkeitsform wie für $f(x)$. Man kann nun die Operation, von jenem Werth von x, für den die Maclaurinsche Reihe convergent ist, durch einen kleinen Zuwachs i zu einem andern Werth von x überzugehen, beliebig wiederholen und hiedurch zu jedem Werthe von x gelangen. Auf diese Weise bewahrheitet sich die Constanz der werthigen Form der Function bei allen Werthen von x.

Soweit die Gültigkeit jener Potenzenreihen reicht, ist nun auch der Satz von der correspondirenden Werthigkeitsform der Functionen und ihrer Argumente erwiesen, und jenes Gültigkeitsbereich ist die allgemeine Regel, nach der man bisher in der ganzen Analysis verfährt. Um aber in voller Strenge auch diejenigen Fälle zu umfassen, in denen eine nach ganzen und positiven Potenzen fortschreitende Reihe für bestimmte Werthe des Arguments ein für den Functionswerth unbrauchbarer Ausdruck wird, muss man gradeso, wie es auch überhaupt in solchen Fällen für die ganze Differentialrechnung nothwendig ist, die betreffenden Sondergestaltungen speciell untersuchen. Namentlich durch Lagrange sind die fraglichen Schranken der gewöhnlichen Potenzenreihen im Hinblick auf das Gebiet der Differentialrechnung ins Licht gesetzt worden. Für unsere Zwecke können wir daher gleich voraussetzen, dass man in den Ausnahmefällen auch eine sei es geschlossene oder ungeschlossene Reihe erhält, in der aber die Exponenten auch Negativitäten und Brüche enthalten.

Um nun unsern Satz auch auf diesen Fall auszudehnen, haben wir nur zu zeigen, dass auch die negativen und die gebrochenen Potenzen des Arguments beziehungsweise des Zuwachses Polynome von übereinstimmender Form werden müssen. Um diesen Sachverhalt für negative Potenzen darzuthun, braucht man sich nur zu überzeugen, dass $\frac{1}{x}$ dieselbe Werthigkeitsform wie x haben müsse. Hiezu verwandele man $\frac{1}{x}$ in einen Bruch mit einwerthigem Nenner, indem man Nenner und Zähler mit allen übrigen Werthformen von x multiplicirt. Nennen wir die unmittelbar gegebene Werthform zur genauern Unterscheidung x_1 statt x und die andern, in denen $j^2, j^3, j^4, \ldots, j^n$ an die Stelle von j treten, $x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$, so können wir jenem Bruch die Form $\frac{x_2\, x_3\, x_4 \ldots x_n}{x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \ldots x_n}$ geben. In dieser Gestalt ist er, wie man leicht sehen kann, ein werthiges Polynom der fraglichen Art; denn sein Zähler wird, wenn man die Multiplicationen vollzieht, ein vielwerthiges Product solcher Polynome und muss als solches die Werthigkeitsform der Factoren annehmen; der Nenner aber wird, wie gesagt, einwerthig, weil er ein Product von sämmtlichen Werthen ist, und er dividirt daher einfach die Factoren der Potenzen von j im Zähler, ohne an der Werthigkeitsgestalt des Zählers etwas zu ändern.

Für gebrochene Potenzen lässt sich der Satz dadurch erweisen, dass man sie nach dem binomischen Satz in eine Reihe entwickelt, indem man in $x = a + jb + j^2c + \ldots + j^{n-1}h$ zweitheilig a als den einen und die übrigen Glieder als den andern Bestandtheil behandelt. Alsdann übertragen sich alle Bruchpotenzen auf a, und j kommt nur mit ganzen positiven Exponenten vor. Die fragliche Reihe ist convergent, wenn a nicht Null ist und der zweite Bestandtheil hinreichend klein gewählt wird. Haben wir aber einmal für diesen Fall die Werthigkeitsform, so können wir nach dem oben angegebenen Verfahren vermittelst der Taylorschen Reihe zu jedem andern Werth gelangen, indem wir in Stufen von kleinen Incrementen zu immer grösseren Werthen übergehen. Hiemit ist der Satz für positive gebrochene Potenzen erwiesen. Für negative gebrochene Potenzen bedarf es keiner besondern Wendung; denn hier tritt nur $\frac{1}{x}$ an die Stelle

von x, und es ist bereits im Falle der ganzen Potenzen dargethan, wie hiedurch die Werthigkeitsform der Function nicht geändert werden könne.

3. Der Fundamentalsatz, dass in der Function die allgemeine Werthigkeitsform die des Arguments sein müsse, erfährt seine erste, einfachste, aber auch wichtigste Anwendung da, wo es sich unmittelbar um nichts als zweiwerthige Binome handelt, mögen diese nun reell oder imaginär sein. Diese Gestaltung ist darum die Grundgestaltung, weil sich alle analytischen Ausdrücke von vielfacher Werthigkeit, seien sie rein algebraisch oder auch transcendent, durch Auflösung der Mehrwerthigkeiten, d. h. der Einheitswurzeln, auf die Form des zweiwerthigen Binoms $\alpha \pm \beta$ bringen lassen. In dieser Form können α und β selbst wiederum mehrere Werthe haben. Uebrigens kann man auch jede zwei beliebige einfache Werthe oder Grössen q_1 und q_2 jener Form unterordnen, indem man $q_1 = \alpha + \beta$ und $q_2 = \alpha - \beta$, also $\alpha = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ und $\beta = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$ setzt. Uns sind jedoch nur diejenigen Binome wesentlich, deren Zweitheiligkeit auf einer natürlichen Vorbedingung, nämlich auf dem Vorhandensein einer Quadratwurzel beruht, durch welche die Zweiwerthigkeit von β erzeugt wird, während α davon unabhängig und relativ einwerthig bleibt. In diesem Sinne sind die zweiwerthigen Binome hinreichend allgemein gedacht, indem der Ausdruck unter der Quadratwurzel positiv bleiben oder negativ werden kann, je nachdem sich die Verhältnisse der Grössen zu einander stellen.

Betrachten wir nun den allgemeinen Satz in dem besondern Sinne, den er für ein zweiwerthiges Argument $a \pm b$ annimmt. In diesem Argument kann a unter Umständen auch Null sein. Man wird aber stets ganz allgemein $f(a \pm b) = \alpha \pm \beta$ haben. Beispiele aus den einfacheren Functionstypen liegen nahe. Setzt man etwa die Potenzfunction $(a \pm b)^m$ voraus, so bilden alle Glieder mit ungraden Potenzen von b zusammen den zweiwerthigen Bestandtheil β, während die übrigen den einwerthigen α darstellen. Hat man die Exponentialfunction $e^{a \pm b}$, so hat man dafür zunächst $e^a e^{\pm b}$; es ist aber, wie schon früher gezeigt, $e^{\pm b} = ch\, b \pm sh\, b$; wir haben also $\alpha = e^a ch\, b$ und $\beta = e^a sh\, b$. Für die Darstellung des Logarithmus eines zweiwerthigen Binoms bedürfen wir eines den Arcusfunctionen analogen Begriffs für die hyperbolischen Functionen. In $l(a \pm b)$ verwandeln wir zunächst das Argument, wie wir kurz sagen möchten, in eine Bifunction, d. h. in denjenigen

binomischen Ausdruck, der in Modulus und Curvenfunctionen besteht. Wir haben alsdann, wie früher dargethan, $a \pm b = \varrho(ch z \pm sh z) = \varrho e^{\pm z}$ und hieraus durch Nehmen der Logarithmen $l(a \pm b) = l(\varrho) \pm z$. Nun ist $ch z = \frac{a}{\varrho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Nehmen wir nun zum hyperbolischen Cosinus das Argument, d. h. specieller die Area und bezeichnen eine solche umgekehrte Function mit *ar ch*, so haben wir $z = ar\, ch \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ und demgemäss $l(a \pm b) = l(\sqrt{a^2 - b^2}) \pm ar\, ch \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Im praktischen Gebrauch ist es natürlich bequemer, die hyperbolischen Tangenten zu gebrauchen, wie überhaupt auch bei den trigonometrischen Bifunctionen und allen ähnlichen Umwandlungsaufgaben die Benützung der Tangenten anstatt der Cosinus und Sinus für eine wirkliche Ausführung der Rechnung vortheilhafter ist. Uns musste es aber vor Allem darauf ankommen, die Grundverhältnisse vermittelst der an sich einfachsten Curvenfunctionen zu erläutern.

Der Fall von $\sin(a \pm b)$ bedarf kaum einer Erläuterung; denn die allbekannten Formeln $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ und $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ zeigen in ihrer Vereinigung $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ die Trennung der werthigen Bestandtheile. Hiebei ist darauf aufmerksam zu machen, dass es eine Zwischenform mit werthigen Argumenten giebt, nämlich $\sin(a \pm b) = \sin a \cos(\pm b) + \cos a \sin(\pm b)$. Aus dieser geht die erstere hervor, wenn man beachtet, dass der Cosinus eines zweiwerthigen Arguments, d. h. eines positiven und des gleich grossen negativen Bogens einwerthig derselbe, also $\cos(\pm b) = \cos b$, und dass andererseits der Sinus in gleichem Falle zweiwerthig, also $\sin(\pm b) = \pm \sin b$ ist.

Nach dem Vorangehenden ist die blosse Hinweisung auf die Beziehung $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ wohl genügend; dagegen bleiben noch die hyperbolischen Functionen übrig, für welche wir analoge Formeln erhalten, indem wir von ihrer Grundbeziehung zu den Kreisfunctionen, die sich durch das Imaginäre vermittelt, ausgehen. Da wir nämlich überhaupt $ch\, x = \cos(x\sqrt{-1})$ haben, so wird zunächst $ch(a \pm b) = \cos(a\sqrt{-1} \pm b\sqrt{-1}) = \cos(a\sqrt{-1}) \cos(b\sqrt{-1}) + \sin(a\sqrt{-1}) \sin(b\sqrt{-1})$. Uebersetzen wir nun die Kreisfunctionen imaginärer Argumente in hyperbolische zurück, so erhalten wir das gesuchte Ergebniss

$ch\,(a \pm b) = ch\,a\,ch\,b \pm sh\,a\,sh\,b$. Auf entsprechende Weise findet man $sh\,(a \pm b) = sh\,a\,ch\,b \pm ch\,a\,sh\,b$.

Da der Satz von der Uebereinstimmung der Werthigkeitsform auch noch einen zweiten Sinn hat, nämlich bei blossen Signirungen, die ohne Einschluss der Mehrwerthigkeiten gegeben sind, die Uebereinstimmung der Signirungsform in Function und Argument zu verbürgen, so ist auch einfach $f(a - b) = \alpha - \beta$. Dies heisst soviel, dass man im Voraus absehen kann, die Function eines als Differenz gegebenen Arguments werde eine entsprechende Differenz sein, in welcher das Minuszeichen gleichsam eine Function desjenigen im Argument ist. Man kann noch einen Schritt weiter gehen und überhaupt ein zweitheiliges Argument ins Auge fassen, dessen Bestandtheile sich nicht einmal durch ungleiche Signirung kennzeichnen. Auch in diesem Falle hat die Form des Arguments einen maassgebenden Einfluss auf die Form der Function; aber von Interesse und der Untersuchung werth kann diese Beziehung erst dann werden, wenn irgend eine Selbständigkeit der Argumentstücke und ihrer etwaigen Veränderungen in Frage kommt.

4. Für das Gebiet der Differentiationen lässt sich unter Voraussetzung eines zweiwerthigen Arguments eine nicht unwichtige Grundbeziehung zwischen den correspondirenden Bestandtheilen der Differentiale ableiten, von der man bisher nur den imaginären Specialfall gekannt hat. Es sei $f(a \pm b)$ die zu differenzirende Function, so haben wir nach dem Satz von der übereinstimmenden Werthigkeitsform $f(a \pm b) = \alpha \pm \beta$ und demgemäss $df(a \pm b) = d\alpha \pm d\beta$. Entwickelt man $f(a \pm b)$ nach der Taylorschen Reihe, so stellen die Glieder mit den ungraden Potenzen von b den zweiwerthigen und die übrigen den einwerthigen Bestandtheil dar. Die Reihe zerfällt demgemäss in die zwei Reihen $\alpha = f(a) + \frac{f''(a)}{2} b^2 + \frac{f^{IV}(a)}{2.3.4} b^4 + \dots$ und $\beta = f'(a) b + \frac{f'''(a)}{2.3} b^3 + \dots$ Nimmt man nun von α den Differentialquotienten in Beziehung auf a, so hat man $\frac{d\alpha}{da} = f'(a) + \frac{f'''(a)}{2} b^2 + \frac{f^{V}(a)}{2.3.4} b^4 + \dots$ Denselben Ausdruck erhält man, wenn man von β den Differentialquotienten in Beziehung auf b nimmt. Man hat also $\frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db}$, und nach dem-

selben Verfahren findet sich auch $\frac{d\alpha}{db} = \frac{d\beta}{d\alpha}$. Diese Beziehungen lassen sich in Worten so zusammenfassen: Der Differentialquotient des einwerthigen Bestandtheils der Function, genommen nach irgend einem der Bestandtheile des Arguments, ist gleich dem Differentialquotienten des zweiwerthigen Bestandtheils der Function, genommen nach dem andern Bestandtheil des Arguments.

Da unser Beweis nur für den Fall der Möglichkeit der Taylorschen Reihe und auch unmittelbar nur für deren Convergenz den Sachverhalt veranschaulicht, so fügen wir eine weniger anschauliche, dafür aber directe und sofort alle Fälle umfassende Ableitung hinzu. Bezeichnen wir $a \pm b$ mit x und $\alpha \pm \beta$ mit y, so muss $\frac{dy}{dx}$ sich so gestalten, dass es von der Zusammensetzung von x unabhängig bleibt; denn ein Differentialquotient kann nicht davon abhängen, auf welche Weise man die Vermehrung des Arguments bewirkt. Letztere kann auf dreierlei Weise geschehen, indem man den einen oder den andern oder beide Bestandtheile wachsen lässt. Wird a um da vermehrt, während b unverändert bleibt, so ist $dx = da$. Hiebei nimmt nun y um $\frac{dy}{da} da$ zu, so dass man $\frac{dy}{da} da = \frac{dy}{dx} dx$ und hieraus, in Folge der Gleichheit von da und dx, die Beziehung $\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dx}$ hat. Auf analoge Weise findet man durch ausschliessliche Vermehrung von b die weitere Beziehung $\frac{dy}{\pm db} = \frac{dy}{dx}$. Aus den beiden Gleichungen folgt weiter $\frac{dy}{da} = \frac{dy}{\pm db}$. Setzt man nun hierin $d\alpha \pm d\beta$ für dy, so erhält man $\frac{d\alpha}{da} \pm \frac{d\beta}{da} = \pm \frac{d\alpha}{db} + \frac{d\beta}{db}$, und diese Gleichung zerfällt nach der Werthigkeitsregel in die Partialgleichungen $\frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db}$ und $\frac{d\alpha}{db} = \frac{d\beta}{da}$, womit gleich die Zusammengehörigkeit der beiden aufgestellten Beziehungen erwiesen ist.

Die imaginäre Gestaltung ist, wie gesagt, blos ein besonderer Fall der zweiwerthigen. Um jene zu erhalten, hat man in dieser nur $b' \sqrt{-1}$ für b und $\beta' \sqrt{-1}$ für β zu setzen. So

übersetzt sich das Resultat des allgemeinen und zunächst unmittelbar nur reell genommenen Falles durch blosse Substitution in das des imaginären. Die erste der beiden Gleichungen $\frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db}$ wird alsdann $\frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta'}{db'}$ und die zweite $\frac{d\alpha}{db} = \frac{d\beta}{da}$ geht in $\frac{d\alpha}{db'} = -\frac{d\beta'}{da}$ über. An der ersten ist gar nichts verändert, als dass man, wie durch die Striche angedeutet ist, die reellen Coefficienten der imaginären Bestandtheile nehmen muss; in der zweiten erhalten aber noch die beiden Gleichungsseiten ungleiche Vorzeichen. Jedoch auch diese Unterschiede rühren nur von der veränderten Ausdrucksweise her, weil man die Beziehungen für den imaginären Fall nicht mehr in den ganzen Bestandstücken, sondern in deren reellen Coefficienten darstellt. An sich selbst aber ist die Beziehung für den imaginären Fall keine andere als für den reellen, was auch sichtbar ist, solange man sich mit der nichtumgeformten Substitution der imaginären Bestandstücke begnügt.

Die Hinfälligkeit einer Trennung des imaginären und des reellen Falls zeigt sich völlig klar, wenn man die Beziehung in ihrer Verallgemeinerung für werthige Polynome überhaupt betrachtet. Es sei $x = e_0 + j e_1 + j^2 e_2 + j^3 e_3 + \ldots + j^{n-1} e_{n-1}$ das polynomische Argument und $y = E_0 + j E_1 + j^2 E_2 + j^3 E_3 + \ldots + j^{n-1} E_{n-1}$ irgend eine Function davon. In analoger Weise, wie oben im Falle eines zweiwerthigen Binoms, schliessen wir dann, dass $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{de_0} = \frac{dy}{j\,de_1} = \frac{dy}{j^2 de_2} = \ldots = \frac{dy}{j^{n-1} de_{n-1}}$ ist. Bezeichnen nun g und k zwei ganze positive Zahlen, die kleiner als n oder gleich Null sind, so hat man also ganz im Allgemeinen $\frac{dy}{j^g de_g} = \frac{dy}{j^k de_k}$ oder $j^k \frac{dy}{de_g} = j^g \frac{dy}{de_k}$. Differenzirt man sodann den Ausdruck von y nach e_g und e_k, so ergiebt sich $\frac{dy}{de_g} = \frac{dE_0}{de_g} + j \frac{dE_1}{de_g} + j^2 \frac{dE_2}{de_g} + j^3 \frac{dE_3}{de_g} + \ldots + j^{n-1} \frac{dE_{n-1}}{de_g}$ und für $\frac{dy}{de_k}$ ein analoger Ausdruck. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung $j^k \frac{dy}{de_g} = j^g \frac{dy}{de_k}$ ein,

so erhält man die Gleichung $j^k \frac{dE_0}{de_g} + j^{k+1} \frac{dE_1}{de_g} + j^{k+2} \frac{dE_2}{de_g} + j^{k+3} \frac{dE_3}{de_g} + \ldots + j^{k+n-1} \frac{dE_{n-1}}{de_g} = j^g \frac{dE_0}{de_k} + j^{g+1} \frac{dE_1}{de_k} + j^{g+2} \frac{dE_2}{de_k} + j^{g+3} \frac{dE_3}{de_k} + \ldots + j^{g+n-1} \frac{dE_{n-1}}{de_k}$. Nun müssen nach dem Werthigkeitsprincip die Glieder mit gleichen Signirungen einander gleichgesetzt werden, so dass man zunächst $\frac{dE_g}{de_g} = \frac{dE_k}{de_k}$ und, da g und k alle ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$ vorstellen, $\frac{dE_0}{de_0} = \frac{dE_1}{de_1} = \frac{dE_2}{de_2} = \frac{dE_3}{de_3} = \ldots = \frac{dE_{n-1}}{de_{n-1}}$ hat. Ausserdem erhält man die Gleichungen $\frac{dE_{k+1}}{de_k} = \frac{dE_{g+1}}{de_g}$, $\frac{dE_{k+2}}{de_k} = \frac{dE_{g+2}}{de_g}$, $\frac{dE_{k+3}}{de_k} = \frac{dE_{g+3}}{de_g}, \ldots, \frac{dE_{k-1}}{de_k} = \frac{dE_{g-1}}{de_g}$.

Diese Gleichungen hätte man noch auf andere Weise erhalten können. Setzt man nämlich $z = \int y\,dx$, so ist z nach den Ausführungen der zweiten Nummer dieses Capitels ein werthiges Polynom von der Gestalt $H_0 + jH_1 + j^2H_2 + j^3 H_3 + \ldots + j^{n-1}H_{n-1}$. Ebenso zerfällt $y\,dx$ in verschieden signirte Bestandtheile, die wir mit η_0, $j\eta_1$, $j^2\eta_2$, $j^3\eta_3$, $\ldots$, $j^{n-1}\eta_{n-1}$ bezeichnen wollen, wenn man für y und dx deren polynomische Ausdrücke einsetzt. Es ist also $H_0 + jH_1 + j^2H_2 + j^3H_3 + \ldots + j^{n-1}H_{n-1} = \int(\eta_0 + j\eta_1 + j^2\eta_2 + j^3\eta_3 + \ldots + j^{n-1}\eta_{n-1})$. Aus dieser Gleichung erhält man, wenn man von ihren beiden Seiten das vollständige Differential nimmt, die neue Gleichung $dH_0 + j\,dH_1 + j^2\,dH_2 + j^3\,dH_3 + \ldots + j^{n-1}\,dH_{n-1} = \eta_0 + j\eta_1 + j^2\eta_2 + j^3\eta_3 + \ldots + j^{n-1}\eta_{n-1}$ und hieraus nach dem Werthigkeitsprincip $dH_0 = \eta_0$, $dH_1 = \eta_1$, $dH_2 = \eta_2$, $dH_3 = \eta_3, \ldots, dH_{n-1} = \eta_{n-1}$. Die Ausdrücke η_0, η_1, η_2, $\eta_3, \ldots, \eta_{n-1}$ müssen also die vollständigen Differentiale der entsprechenden Integralbestandtheile H_0, H_1, H_2, $H_3, \ldots, H_{n-1}$ sein. Nun ist η_0 die Summe der einwerthigen Bestandtheile von $y\,dx$, also gleich $E_0\,de_0 + E_{n-1}\,de_1 + E_{n-2}\,de_2 + E_{n-3}\,de_3 + \ldots + E_1\,de_{n-1}$. Dieser Ausdruck soll, wie gesagt, dem vollständigen Differential von H_0 gleich sein; dieses ist aber gleich $\frac{dH_0}{de_0}de_0 + \frac{dH_0}{de_1}de_1 + \frac{dH_0}{de_2}de_2 + \frac{dH_0}{de_3}de_3 + \ldots + \frac{dH_0}{de_{n-1}}de_{n-1}$. Durch Gleich-

setzung der beiden Ausdrücke ergeben sich, da $e_0, e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}$ von einander unabhängig veränderlich sind, die Gleichungen $E_0 = \frac{d H_0}{d e_0}$, $E_1 = \frac{d H_0}{d e_1}$, $E_2 = \frac{d H_0}{d e_2}$, $E_3 = \frac{d H_0}{d e_3}$, $\ldots$, $E_{n-1} = \frac{d H_0}{d e_{n-1}}$. Für eine Function von mehreren Veränderlichen, wie H_0, besteht nun aber der allgemeine analytische Satz, dass, wenn man dieselbe mehrmals und zwar nach verschiedenen Veränderlichen differenzirt, der Werth des Differentials von der dabei eingehaltenen Reihenfolge der Veränderlichen unabhängig ist. In diesem besondern Fall hat man also z. B. $\frac{d\left(\frac{d H_0}{d e_0}\right)}{d e_1} = \frac{d\left(\frac{d H_0}{d e_1}\right)}{d e_0}$ oder $\frac{d E_0}{d e_1} = \frac{d E_{n-1}}{d e_0}$. Diese und die entsprechenden andern Differentialbeziehungen werden auch in der Integraltheorie als die Bedingungen aufgeführt, die erfüllt sein müssen, wenn ein differentieller Ausdruck wie $E_0 d e_0 + E_{n-1} d e_1 + E_{n-2} d e_2 + E_{n-3} d e_3 + \ldots + E_1 d e_{n-1}$ ein vollständiges Differential sein soll. Stellt man nun noch die entsprechenden Bedingungen fest, unter welchen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_{n-1}$ vollständige Differentiale sind, so erhält man alle oben schon auf andere Weise bewiesenen differentiellen Beziehungen zwischen den Elementen von x und y. Von diesen Gleichungen sind die obigen $\frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db}$ und $\frac{d\beta}{da} = \frac{d\alpha}{db}$ nur derjenige Specialfall, welcher sich ergiebt, wenn j eine quadratische Einheitswurzel bedeutet. Hier zerfällt $\int y\,dx = A_0 \pm A_1$ in den einwerthigen Bestandtheil $A_0 = \int (\alpha\,da + \beta\,db)$ und in den zweiwerthigen $A_1 = \int (\beta\,da + \alpha\,db)$, und damit diese Differentialausdrücke vollständige Differentiale seien, müssen die genannten Beziehungen stattfinden.

5. Eine ähnliche Bewandtniss, wie mit dem in der vorigen Nummer behandelten Satz, hat es mit einem andern, auf den Integrationsweg bezüglichen. Auch hier kennt man nur einen imaginären Specialfall, zu dem man überdies nur auf der Krücke der imaginären Graphik gelangt, und doch ist der wahre und allgemeine Sachverhalt nicht nur von der Imaginarität unabhängig, sondern reicht auch hier, wenn man ihn erweitern will, über das Gebiet zweiwerthiger Argumente hinaus. Zunächst aber genügt es, ihn rein analytisch für ein zweiwerthiges Argument darzuthun. Nimmt man eine Function eines zweiwerthigen Arguments zwischen

zwei Werthen des letzteren oder, anders ausgedrückt, hat man die Function als Integral und nimmt dieses zwischen den fraglichen binomischen Grenzen, so ist der Werth der Function, d. h. dieses bestimmten Integrals, von jeder functionellen Beziehung zwischen den Bestandtheilen des Arguments unabhängig, vorausgesetzt, dass die Stammfunction, d. h. das unbestimmte Integral der zu integrirenden Function einwerthig ist.

Es sei also die einwerthige Function $f(a \pm b)$ gegeben und zwischen den Grenzen $a_1 \pm b_1$ und $a_2 \pm b_2$ zu nehmen. Ihre Ableitung in Beziehung auf das ganze Argument werde mit $f'(a \pm b)$ und, da sie zweiwerthig getheilt sein muss, auch durch ihre Bestandstücke $g \pm h$ bezeichnet. Hienach hat man $f(a \pm b) = \int f'(a \pm b)\,(da \pm db)$. Zwischen zwei Grenzen genommen soll nun also $\int\limits_{a_1 \pm b_1}^{a_2 \pm b_2} f'(a \pm b)\,(da \pm db)$ in seinem Werth von der Gestaltung irgend einer functionellen Beziehung zwischen a und b unabhängig sein. Diesen Satz beweisen wir rein analytisch, d. h. ohne die Krücke einer graphischen Construction dadurch, dass wir zeigen, wie er für das Integral jedes der beiden Bestandtheile gilt, in welche die zu integrirende Function nach Auflösung der Klammern zerfällt, wenn man die ein- und zweiwerthigen Glieder von einander trennt. Diese Bestandtheile sind $g\,da + h\,db$ und $\pm (h\,da + g\,db)$. Ist nun b eine bestimmte Function von a, so können wir $g\,da + h\,db$ durch den gleichbedeutenden Ausdruck $\left(g + h\,\frac{db}{da}\right) da$ ersetzen, so dass das bestimmte Integral von $g\,da + h\,db$ sich in $\int\limits_{a_1}^{a_2} \left(g + h\,\frac{db}{da}\right) da$ verwandelt. Ist nun $\varphi(a)$ eine solche Function von a, dass ihr Differentialquotient gleich $g + h\,\frac{db}{da}$ ist, so wird der Werth jenes Integrals gleich $\varphi(a_2) - \varphi(a_1)$. Andererseits ist $g\,da + h\,db$ nach den Ausführungen der vorigen Nummer ein vollständiges Differential einer Function von a und b, deren Form daher von jeder Beziehung zwischen diesen beiden Veränderlichen unabhängig sein muss. Bezeichnet man diese Function mit $\psi(a, b)$, so ist also $\psi(a, b) = \varphi(a)$ und speciell $\psi(a_1, b_1) = \varphi(a_1)$ und $\psi(a_2, b_2) = \varphi(a_2)$. Nun ist der Werth jenes bestimmten Integrals, wie gesagt, gleich $\varphi(a_2) - \varphi(a_1)$, also auch gleich

$\psi(a_2, b_2) - \psi(a_1, b_1)$. Diese Gleichung $\int\limits_{a_1}^{a_2}(g da + h db) = \psi(a_2, b_2) - \psi(a_1, b_1)$ findet also statt, welche functionelle Beziehung auch zwischen a und b existiren möge und der Werth ihrer rechten Seite ist ausserdem von jeder solchen Beziehung unabhängig, wenn nur die Grenzwerthe b_1 und b_2 von b immer dieselben sind. Der Werth des fraglichen Integrals bleibt demnach derselbe, welche Beziehung auch zwischen den Zwischenwerthen von b und denjenigen von a stattfinden möge. Was nun hier für das einwerthige der beiden Partialintegrale erwiesen ist, lässt sich analog auch für das zweiwerthige genau in derselben Weise feststellen, weswegen wir auf eine blosse Wiederholung der Zwischenoperationen verzichten. Aus der Unabhängigkeit der einzelnen Integrale folgt nun die ihrer Summe, womit denn der aufgestellte Satz vollständig und zwar durch rein analytische Schlüsse bewiesen ist. Auf analoge Weise kann man nun auch zeigen, dass der Werth eines Integrals zwischen mehr als zweitheiligen Grenzen unabhängig von der Reihe der Zwischenwerthe ist, worauf hier jedoch nur hingewiesen werden soll, da wir weiter unten hiefür einen weit allgemeineren, blos auf den Begriff des bestimmten Integrals gegründeten Beweis geben werden.

Wollen wir den eben bewiesenen Satz in Anknüpfung an den Begriff des Integrationsweges formuliren, so ist zunächst davon auszugehen, dass hier der Integrationsweg nichts Anderes bedeuten kann, als die Reihe der Zwischenwerthe, die im Uebergang von $a_1 \pm b_1$ zu $a_2 \pm b_2$ bei der Summirung der differentiellen Elemente durchlaufen werden. Hier können die Bestandtheile von der Art a und von der Art b im Zwischenstadium zwischen den Extremen verschiedentlich gewählt werden, während dabei ihre algebraische Summe, also ihre Summe oder ihre Differenz, als Anzahl ihrer wenn auch ungleichartigen Einheiten genommen, dieselbe bleibt. Nun besagt unser Satz in der ursprünglichen Fassung, dass der Werth des Integrals nur von den Bestandtheilen der Grenzwerthe, nicht aber von denen der Zwischenwerthe abhängt. Da nun die Zusammensetzung der Zwischenwerthe aus den Bestandtheilen eine beliebige ist, so kann auch der Weg, auf dem man von der einen Grenze des Integrals zur andern gelangt, ein entsprechend beliebiger sein. Unser Satz lässt sich also auch dahin aussprechen: Der Werth

eines Integrals zwischen binomischen Grenzen ist von dem Wege, auf welchem man von der einen zur andern übergeht, unabhängig.

Um unsern für ein zweiwerthiges Binom allgemein bewiesenen Satz nun in den bereits bekannten Specialsatz für sogenannte complexe, d. h. für binomisch imaginäre Argumente zu verwandeln, ist nichts weiter als eine einfache Vertauschung von b mit $b'\sqrt{-1}$ erforderlich. Wir haben nämlich über die Beschaffenheit von b, ob es reell oder imaginär sei, nicht die geringste Voraussetzung gemacht, also den Sachverhalt bereits für ein imaginäres b mitbewiesen. Nur um ihn auch für den reellen Factor in b, d. h. für b' direct auszudrücken, haben wir noch zu bemerken, dass, da $\sqrt{-1}$ eine Constante ist, eine functionelle Beziehung von a und b auch eine davon abhängige functionelle Beziehung derselben Art zwischen a und b' bedeutet. Ist also der Sachverhalt von der Beziehung zwischen a und $b'\sqrt{-1}$ unabhängig, so ist er es auch von derjenigen zwischen a und b'. Hiemit ist aber die gewöhnliche Formulirung des Satzes für ein Integral zwischen complexen Grenzen ebenfalls gegeben. Diese besteht nämlich darin, zu sagen, dass der Werth eines Integrals zwischen complexen Grenzen von dem Integrationswege unabhängig sei.

Vergleicht man den reellen Fall mit dem imaginären, so liegt der Unterschied in Beziehung auf den Integrationsweg darin, dass die zweiwerthigen reellen Einheiten, wenn sie ausdrücklich einwerthig genommen werden, mit den Einheiten des einwerthigen Bestandtheils in wirklicher Addition oder Subtraction vereinigt werden können, während bei den imaginären Einheiten zu diesem Zweck erst von ihrer specifischen Eigenschaft abstrahirt werden muss. Bringt man aber blos die Anzahl der Einheiten überhaupt, gleichviel welcher Art sie sein mögen, in Anschlag, was unter Umständen ein berechtigtes Verfahren sein kann, so stimmt der reelle mit dem imaginären Fall darin überein, dass es nur eine einzige Reihe von Zwischenwerthen giebt, wenn diese nach dem Inhalt an absoluten Einheiten gemessen werden. Andernfalls ist die imaginäre Gestaltung diejenige, in welcher sich eine thatsächliche Verschiedenheit der Integrationswege dadurch herausstellt, dass man den Artunterschied der Einheiten zur Geltung bringt.

Es sollte sich nämlich eigentlich von selbst verstehen, dass man von einer wirklichen Grösse zu einer andern stetig oder stufenweise immer nur so übergehen kann, dass man dieselben Werthe wiederum passirt, dass es also keinen zweiten Weg giebt, eine Grösse durch Addition der Zwischenwerthe zu erzeugen. Denkt man sich aber von vornherein keine gleichartige Grösse, sondern eine etwa aus zwei Gattungen bestehende, so markirt sich in der Bildung der Zwischenwerthe die doppelte Möglichkeit, bald die eine, bald die andere Gattung zu vermehren und so die Zwischenwerthe in den verschiedensten Combinationen herzustellen und den Uebergang durch irgend eine aus diesen Combinationen ausgewählte Reihe zu machen. Von 10 Apfelbäumen plus 20 Pflaumenbäumen kann man zu $18A + 30P$ in sehr verschiedener Weise kommen. Man kann beispielsweise die $10A$ erst um die ganzen $8A$ vermehrt denken, während die $20P$ in derselben Anzahl verbleiben, und alsdann erst die $10P$ nacheinander hinzufügen. Dieses Verfahren kann man aber auch gradezu umkehren, indem man erst die $10P$ zu den 20 hinzufügt. Auch sieht man, dass eine Menge Wege offenstehen, die A und P gleichzeitig oder abwechselnd, einheitenweise oder in Zusammenfassung mehrerer Einheiten, zu vermehren. Abstrahirt man aber vom Unterschiede und sieht nur auf die jedesmal vorhandene Anzahl von Obstbäumen überhaupt, so giebt es, um von $30O$ zu $48O$ zu gelangen, offenbar nur die Zwischenwerthe 31, 32, ..., 46, 47. Diese Zahlen können jedoch sehr verschieden zusammengesetzt sein, wenn man nach ihren Bestandtheilen an A und P fragt. Genau so verhält es sich nun mit allen ungleichartigen Einheiten, durch was diese auch unterschieden werden mögen. Kommt es also darauf an, wieviel Einheiten beispielsweise von der zweiwerthigen Art genommen werden, so ist der Unterschied der Uebergänge nicht weniger erheblich, als bei den Imaginären, deren Ungleichartigkeit sich von selbst Geltung verschafft.

6. In dem Beweise der vorigen Nummer, durch den wir die Unabhängigkeit des Werths eines zwischen binomischen Grenzen genommenen Integrals vom Integrationswege oder, was dasselbe heisst, von der Gestaltung der Beziehung zwischen den Argumentstücken dargethan haben, sind wir stillschweigend von der Voraussetzung ausgegangen, es müsse bei einem stetigen Uebergange für den Weg als Ganzes oder für jeden seiner etwa unterschie-

denen Theile eine gesetzmässig formulirbare Beziehung zwischen den Argumentstücken bestehen. Die Sicherstellung dieser Voraussetzung ergiebt nun schon an sich einen interessanten Satz, den wir nicht blos der Beweisergänzung wegen hier folgen lassen; denn wir werden für den Hauptsatz der vorigen Nummer noch einen andern Beweis beibringen, der, weil er nur vermittelst der Begriffe vom bestimmten Integral geführt wird, von der fraglichen Voraussetzung unabhängig bleibt.

Zunächst nehmen wir ganz im Allgemeinen unsern Ausgangspunkt von einer Denknothwendigkeit, aus der zugleich die durchgängige Gesetzmässigkeit der gesammten Natur gefolgert werden kann, und die mit dem richtigen Begriff von einer Unendlichkeit eng zusammenhängt. Ist im Laufe der Veränderung einer Grösse jeder Punkt derselben, d. h. jede einzelne Grösse, die durchlaufen wird, so aufzufassen, dass ihr immer ein Punkt irgend einer andern Grösse entspricht, so muss auch zugleich ein Gesetz oder eine endliche Anzahl von Gesetzen gedacht werden, vermöge deren der Uebergang von dem einen Grössenstadium zum andern bewerkstelligt wird. In der Natur und überdies in Allem, was die vom Denken geleitete Phantasie auch immer entwerfen möge, muss die fragliche Auffassbarkeit und Correspondenz stets nachzuweisen sein; denn man braucht einen Vorgang nur auf Zeit- und Raumcoordinaten zu beziehen, um die in ihm enthaltene Grössenveränderung als zu den Punkten von andern Zeit- und Raumgrössen zugehörig zu denken. Der Kern dieses Sachverhalts liegt nun darin, dass eine Gesetzmässigkeit nicht ausschliesslich für einen Grössenpunkt, sondern nur für eine, wenn auch noch so kleine endliche Strecke existiren kann. Wollte man das Gegentheil voraussetzen, so würde sich eine an sich unendliche Zahl, d. h. eine Unzahl von Gesetzen einschieben, und dies ist nach dem richtigen Begriff von der Unendlichkeit eine Absurdität. Es kommt aber auch noch positiv hinzu, dass der Begriff der Gesetzmässigkeit eine Mannigfaltigkeit oder, besser gesagt, eine Mehrheit von Fällen voraussetzt, auf die sich das Gesetz beziehe oder, mit andern Worten, über die es sich erstrecke. Ein selbst veränderungsloser Grössenpunkt kann, für sich allein genommen, offenbar nicht Gegenstand eines Gesetzes der Grössenveränderung sein. Hiezu gehören, wenn es sich um discrete Aenderungen handelt, mindestens zwei Grössenpunkte; sobald aber, wie hier, eine stetige Veränderung in Frage

ist, wird irgend eine Grössenstrecke, d. h. irgend ein wenn auch noch so kleines Stück des Grössenlaufs, erfordert.

Hienach kann es keine empirische Linie geben, wie willkürlich man sie auch gezogen denke, die nicht in ihren Theilen gesetzmässig wäre. Man kann genöthigt sein, die Theile sehr verschieden und sehr klein anzunehmen; aber unser Gesetz der bestimmten Anzahl, vermöge dessen eine Unendlichkeit unterschiedener Dinge als etwas Fertiges und daher an sich nicht existiren kann, hindert, dass jene Untertheilung in Stücke, deren jedes einem besondern Gesetz unterliegt, in einem gegebenen Fall in das Unendliche führe. Von einem Punkt im Raume zum andern, so nahe einander oder so weit von einander beide liegen mögen, kann man nur gesetzmässig, also nur dergestalt übergehen, dass es zwischen ihnen immer nachweisbare Strecken giebt, innerhalb deren eine und dieselbe Function für alle der Strecke angehörigen Punkte aus einer der Coordinaten die übrigen bestimmt. Der Unterschied zwischen einer mathematischen Curve im gewöhnlichen Sinne und einer empirischen Linie oder überhaupt einem beliebigen, gemeiniglich unregelmässig genannten Zuge ist daher nicht durchgreifend. Richtig im Sinne unserer Nachweisung gefasst, bedeutet er nur, dass in jenem Falle ein einziges Gesetz den ganzen Lauf beherrscht, während sich im andern Falle die Linie aus Stücken zusammensetzt, deren jedes sein eignes Gesetz hat, so dass die Unregelmässigkeit nicht für die Theile, sondern nur in einem gewissen Sinne für das Ganze, also nur in dem Mangel eines allen Strecken gemeinschaftlichen Gesetzes und in dem hiemit verbundenen Abbrechen der einzelnen Gesetze nach Durchmessung ihrer Theilstrecken besteht. Nimmt man also hinreichend kleine Theile, so hört der ganze Unterschied zwischen unregelmässigen und mathematisch regelmässigen Linien auf, und es giebt nur noch solche, für deren Lauf eine Gleichung denkbar ist. Demgemäss kann man jede in der Natur gegebene Linie und jeden willkürlich entworfenen oder entworfen gedachten Zug jedenfalls durch eine endliche Reihe von Gleichungen bestimmt denken, deren jede die Gleichung einer bestimmten, wenn auch noch so kleinen Strecke ist. Noch anders ausgedrückt, heisst dies, dass sich die Bewegung von einem Punkte aus immer gesetzmässig und nach Maassgabe einer functionellen Beziehung zwischen den Coordinaten gestaltet und irgend eine Zeit und Strecke hindurch auf diese identische Weise

vollzogen sein muss, ehe von einem neuen Gesetz und einer neuen Function, welche an die Stelle der erstern träte, die Rede sein kann. Dieser principielle Sachverhalt ist, abstract genommen und nicht blos auf Liniengrössen bezogen, für das Verständniss des differentiellen Laufes aller Functionsgrössen von entscheidender Wichtigkeit, aber bisher noch nicht formulirt worden, zum Theil wohl, weil die schwankenden und verworrenen Begriffe vom Unendlichen entgegenstanden.

Eine formelle Vereinigung aller jener Theilgesetze ist übrigens auch möglich; denn man hat nur nöthig, die auf Null gebrachten einzelnen Gleichungen miteinander zu multipliciren, um den ganzen Grössenlauf durch eine einzige Gleichung und eine einzige Function höheren Grades zu umfassen. Wenn wir also in der vorigen Nummer vorausgesetzt haben, b sei eine Function von a, so ist die Existenz eines solchen Verhältnisses eine Nothwendigkeit, falls man nur immer eingedenk bleibt, dass die Function in ihrer unmittelbaren Identität immer nur für irgend eine Strecke zu gelten braucht und dann durch eine andere Functionsform abgelöst werden kann. Will man überhaupt jedesmal einen bestimmten Werth von $a + b$ haben, so muss hiefür jedem Werth von a ein bestimmter von b zugeordnet werden. Dies genügt aber, um nach unserm fundamentalen Hülfssatz über die Gesetzmässigkeit des stetigen Grössenlaufs das Dasein irgend einer functionellen Beziehung, vermöge deren b eine Strecke hindurch aus a bestimmt wird, mitsichzubringen. Die Voraussetzung, auf die wir den Satz von der Gleichgültigkeit des Integrationsweges gründeten, findet sich also erfüllt.

7. Von vornherein ohne eine solche Voraussetzung können wir die Gleichgültigkeit des Integrationsweges feststellen, indem wir vom ursprünglichen Begriff des bestimmten Integrals als der Summe der differentiellen Zwischenwerthe ausgehen und allgemein, ohne Rücksicht auf die besondere Beschaffenheit des Arguments, zeigen, wie der Werth des Integrals stets der Differenz der äussersten Werthe gleich sein müsse. Hätten wir etwa sofort den Begriff des bestimmten Integrals als Differenz der Grenzwerthe fassen können, so wäre es selbstverständlich, dass sein Werth nicht von den Zwischenwerthen abhängig sein könnte; denn der Begriff der Differenz zweier Werthe einer Function hat an sich gar nichts mit den Zwischenwerthen zu schaffen und bleibt daher auch von deren Gestaltung unberührt.

Es versteht sich aber nicht von selbst und ist keine Folge der Definition, sondern ein zu beweisender Satz, dass die Summe der differentiellen Elemente die Differenz der beiden Grenzwerthe der Stammfunction sei.

Es sei $y = f(x) = \int f'(x)\, dx$ in Frage, so ist zu zeigen, dass ein zwischen den Grenzen $x = u$ und $x = v$ genommenes Integral $\int_u^v f'(x)\, dx$ den Werth $f(v) - f(u)$ habe, wie auch das Argument beschaffen sein möge. Welche Gestalt und welchen Werth x habe, so ist $f'(x)\, dx$ das Differential des jenem Werth von x entsprechenden Werths von y. Demzufolge ist $\int f'(x)\, dx = \int dy$; und die Grenzen von $\int dy$ sind hiebei $y = f(u)$ und $y = f(v)$. Nun ist zu beweisen, dass $\int_{f(u)}^{f(v)} dy = f(v) - f(u)$ ist, auf welchem Wege man auch von $f(u)$ zu $f(v)$ gelangen möge. Wir müssen uns hiebei von vornherein die aufeinanderfolgenden dx nicht, wie es gewöhnlich geschieht, als sich gleichbleibend, sondern als verschieden bestimmbar, wenn auch stets als in unbeschränkter Weise klein annehmbar denken. Dementsprechend werden die dy noch ausser deren aus der Functionsform stammender Verschiedenheit diejenigen Verschiedenheiten mitenthalten, die von der Ungleichheit der dx herrühren. Ungeachtet dieser letzteren Verschiedenheiten, die in unserem allgemeineren Beweis vorausgesetzt werden müssen, zeigt sich nun aber, dass, da jedes dy in der Reihe der Zwischenwerthe die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werthe von y ist, bei der Summirung diese Werthe sich heben und dass nur die Differenz der äussersten Werthe als Ergebniss stehen bleibt. Unser Beweis unterscheidet sich von demjenigen für den gewöhnlichen Fall nur durch zwei allgemeiner gefasste und hier auch zu einander gehörige Umstände. Der gemeine Beweis für den Fall eines ungetheilten Arguments lässt dieses vermittelst gleicher Differenzen wachsen, und hierin liegt eine Einschränkung des Differenz- und Differentialbegriffs, die auch bei einem einfachen Argument besser wegbleibt. Nun haben wir aber zweitens bei unserm Beweise das Argument in seiner ganzen Allgemeinheit im Sinne, so dass es selbst beliebig zusammengesetzt, ja überhaupt eine Function anderer Subargumente sein kann. Hierauf bezieht sich nun auch die Wesentlichkeit unserer Voraussetzung, welche die dx von vornherein als ungleich einführt und deren Gleichheit als eine besondere Möglichkeit mit einschliesst.

Haben wir also $x = a + b$, so wird $d\,(a + b)$ verschiedene Werthe annehmen, je nachdem das Functionsverhältniss zwischen a und b beschaffen ist. Constant kann dx nur dann bleiben, wenn sich a und b gleichmässig ändern. In allen andern Fällen ändert $da + db$ mit jedem differentiellen Schritt seinen Werth. Da nun zwischen a und b alle möglichen Functionsverhältnisse obwalten können, für welche die Grenzwerthe dieselben bleiben, so ergeben sich hiedurch verschiedene Reihen von Differentialen dx, und diesen verschiedenen Wegen des Arguments entsprechen die verschiedenen Wege der Function y. Alle diese Wege hat aber der von uns verallgemeinerte Beweis über den Integralwerth von vornherein mitumfasst, indem er über die besondere Natur des Arguments und der Zwischenwerthe gar keine Voraussetzung zu machen hatte. Der natürliche Gang der Ableitungen besteht hienach darin, zuerst in gehöriger Allgemeinheit den Satz zu beweisen, dass ein bestimmtes Integral die Differenz der Grenzwerthe der Integralfunction ist, und alsdann erst zu zeigen, wie bei besonderer Beschaffenheit der Argumente verschiedene Integrationswege möglich sind. Die Unabhängigkeit des Werths vom Integrationswege kennzeichnet sich dann nicht mehr als ein neu hinzukommender Satz, sondern die neue Einsicht besteht vielmehr nur in der Kenntnissnahme von der Möglichkeit verschiedener Integrationswege. Die Feststellung der letzteren kann einen allgemein bewiesenen Satz über den Integralwerth nicht umstossen, und wenn man den Satz unter der neuen Voraussetzung noch einmal ausspricht, so geschieht dies nur, weil er sich hier mehr markirt. Von diesem unserm Standpunkt aus hat sich die gewöhnliche Behandlung der ganzen Angelegenheit gradezu umgekehrt; wir sind nicht von den verschiedenen Integrationswegen ausgegangen und haben für sie nicht einen Satz von der Gleichwerthigkeit des Integrals gesucht, sondern haben umgekehrt den Integralwerth einfürallemal formulirt und dann gefunden, dass er unter Umständen auf verschiedene Weise entstehen könne.

Hiemit ist nun der bisher nur für binomisch imaginäre Grenzen aufgestellte Satz von uns nicht blos überhaupt auf zweiwerthige Binome ausgedehnt, sondern gilt nunmehr auch für Argumente, die beliebige Polynome oder auch sonstige Functionen mehrerer Veränderlicher sind. In diesen Fällen steigert sich die Mannigfaltigkeit der Integrationswege und es wird in vielen Anwendungen der Analysis nicht unerheblich sein, dass die

Unabhängigkeit des durch dieselben Grenzen bestimmten Integralwerths von dem Zwischenlauf der Function oder, was dasselbe heisst, von der Gestaltung des innerhalb des Arguments vorhandenen Functionsverhältnisses von vornherein als allgemeine Eigenschaft jedes bestimmten Integrals feststeht.

8. Der vorstehende Beweis des Satzes, dass ein bestimmtes Integral gleich der Differenz der Stammfunctionen für die Grenzwerthe sei, war natürlich von jeder Voraussetzung über die Beschaffenheit der Function unabhängig. Er findet Anwendung, sowohl wenn die Stammfunction einwerthig, als wenn sie mehrwerthig ist. Die daraus gezogene Consequenz aber, dass der Werth eines bestimmten Integrals vom Integrationswege unabhängig sei, hat natürlich nur dann statt, wenn jeder der beiden Grenzwerthe der Stammfunction immer derselbe bleibt. Nun sieht man jedoch, dass wenn die Stammfunction n werthig ist, das bestimmte Integral im Allgemeinen n^2 Werthe haben muss, weil sich n Werthe für die untere Grenze mit n Werthen für die obere Grenze combiniren. Geht man aber von einem Werth der zu integrirenden Function aus und lässt diese sich stetig mit dem Argument verändern, so wird für den obern Werth des Arguments der Werth der Stammfunction verschieden sein, je nach den Zwischenwerthen des Arguments und der Function, durch die man von der untern zur obern Grenze gelangt, so dass selbst dann, wenn man von den verschiedenen Werthen der mehrwerthigen Function einen herausnimmt und diesen gewissermaassen als einzelwerthige Function behandelt, der Integrationsweg nicht gleichgültig bleibt. Solange das Argument einer mehrwerthigen Function reell bleibt, kann man ihre verschiedenen Werthe als verschiedene Zweige der Function ansehen, da die einer stetigen Reihenfolge von Werthen des Arguments entsprechenden Werthe der Function ebensoviel stetige Reihenfolgen bilden, als die Function Werthe hat. Die Quadratwurzeln aus allen reellen Zahlen der Zahlenreihe bilden z. B. zwei scharf geschiedene Reihen, eine positive und eine negative. Das Gleiche gilt von den Wurzeln einer gemischten Gleichung zweiten Grades, wenn p einen constanten Werth hat und q die reelle Variable ist.

Anders stellt sich die Sache, wenn die unabhängige Veränderliche durch imaginäre Zwischenwerthe geht. Dann lässt sich der Lauf der Function nicht mehr stetig in einem bestimmten, gewissermaassen einzelwerthigen Sinne verfolgen. Nehmen wir

als Beispiel die Function $y = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. Man verändere x so, dass es erst positiv ist, dann binomisch imaginär wird in der Weise, dass der reelle Bestandtheil kleiner wird, durch Null geht und schliesslich negativ wird, während der imaginäre Bestandtheil steigt und dann wieder bis auf Null herabsinkt. Verfolgt man nun unter diesen Umständen den Lauf von $+\sqrt{x}$, so wird deren reeller Bestandtheil bis auf Null sinken und der imaginäre steigen. Lässt man nun das negativ gewordene x dieselben aber negativ gesetzten Werthe durchlaufen, wie im ersten Theil seines Laufes, und dann auf den ursprünglichen Werth zurückkommen, so wird y, wenn es sich stetig ändert, einen negativ reellen Bestandtheil erhalten müssen, während der imaginäre sinkt; denn sonst müsste der imaginäre Bestandtheil plötzlich aus dem Positiven in das Negative überspringen. Die stetige Veränderungsart führt aber, wie man sich durch Nachrechnen überzeugen kann, schliesslich zu einem negativen Werth für y, sobald x auf den ursprünglichen Werth zurückgekommen ist. Man muss das Argument noch einmal denselben Weg nehmen lassen, um auf denjenigen Werth der Function zurückzukommen, von dem man ausgegangen ist. Diese Eigenschaft besitzt jede Wurzel und folglich auch jede mehrwerthige Function, da eine solche als Summe von mehreren Wurzeln dargestellt werden kann.

Was wir nun hier als successive Vielwerthigkeit der Function, unabhängig von jeglicher Graphik, sichtbar gemacht haben, heisst in dem Cauchyschen Jargon, der im Anschluss an die imaginäre Graphik entstanden ist und nur im Hinblick auf diese einen Sinn hat, Polydromie. Indem in unserm Sinne die Function ihre verschiedenen Werthgestalten nacheinander durchläuft, kommt ihr Argument gleich oft auf denselben Werth zurück und macht also, wenn es selbst als Bifunction, nämlich in modulirter Form betrachtet wird, eine entsprechende Anzahl von Perioden durch. Nach Maassgabe dieser Umläufe, die im eigentlichen Sinne des Worts nur dem Subargument zukommen, sind nun die Functionen polydrom getauft worden. Nach unserer unmittelbaren Anschauungsweise können wir dies Verhältniss zugleich sachlich bezeichnend und einfach ohne den plumpen Luxus bizarrer Kunstwörter ausdrücken, indem wir darauf hinweisen, wie, während das Argument eine periodische Function des Subarguments mit der Periode 2π ist, die $n$werthige Hauptfunction selbst, als Function des Sub-

arguments betrachtet, die Periode $2n\pi$ hat. Jedem Intervall 2π entspricht in der Hauptfunction der Uebergang von einer Werthgestalt derselben zur andern, und es müssen n solcher Uebergänge, d. h. alle Werthphasen zurückgelegt sein, damit sich die Function wieder bei demselben Werthe befinde. Hienach kommt eine Function von unbeschränkter Werthezahl nie auf denselben Werth zurück; denn die Anzahl ihrer Werthphasen ist unbegrenzt. Die Angabe der Wertheigenschaften der Functionen reicht hienach vollkommen aus, um das zu charakterisiren, was man in weniger eindringender Weise und durch einen nebelhaften Sprachgebrauch mit den Wörtern monodrom, nicht monodrom und polydrom bezeichnet oder vielmehr verschleiert hat. Wir, die wir nicht etwa blos vom Gängelband der imaginären Graphik unabhängig sind, sondern auch überall grundsätzlich von den Werthigkeiten und Werthgestalten als den letzten Gründen der fraglichen Eigenschaften von vornherein ausgingen, vermochten in all jenen Unterschieden des Laufes der Functionen nichts Anderes zu sehen als ein successives Hervortreten der sonst gleichzeitig vorgestellten Werthgestalten, d. h. nichts als Werthphasen.

Im Anschluss an die bisherige Ausführung können wir nun auch einen bestimmten Satz über den Integrationsweg formuliren, der auch für diejenigen Fälle passt, in denen Werthigkeitsphasen in Frage, also die Functionen nicht einwerthig sind. Unter allen Umständen führen nämlich immer zwei Integrationswege zu demselben Ergebniss, sobald das Subargument auf beiden Wegen sich derart verändert, dass sein Werth an der obern Grenze für beide Wege derselbe wird. Bei Functionen von endlicher Werthezahl wird das Ergebniss ebenfalls dasselbe, wenn die Differenz der Werthe des Subarguments an der obern Grenze $2kn\pi$ beträgt, wobei k eine beliebige ganze Zahl und n die Werthanzahl der Stammfunction bezeichnet. Abgesehen von den angeführten Bedingungen, d. h. in allen übrigen Fällen, ist der Integrationsweg nicht gleichgültig.

9. Nachdem wir in diesem Capitel die markirtesten Sätze, die sich in Beziehung auf zusammengesetzte Argumente ergeben, für polynomische Argumente überhaupt und zum Theil noch allgemeiner für Argumente, die beliebige Functionen sind, bewiesen haben, drängt sich unwillkürlich die Beschränkung auf, in der man bisher bezüglich der fraglichen Sätze verblieben ist. Erstens hat man solche Sätze nur für imaginäre Binome oder, wie es in

dem entsprechenden Sprachgebrauch heisst, für complexe Grössen gefunden. Zweitens ist aus den Beweisen, mit denen man jene beschränkten Sätze ausgestattet hat, noch die weitere und sogar irrthümliche Beschränkung ersichtlich, die in der Annahme liegt, es rühre die Geltung der Sätze in erster Linie aus der Natur des Imaginären her. Doch auch dieser Irrthum schloss noch nicht Alles ab; eine dritte Beschränktheit gesellte sich von vornherein hinzu und blieb dauernd an den andern haften, nämlich die, jenes Imaginäre, auf welches man fälschlich die Sätze als auf den maassgebenden Grund zurückführte, nur durch Vermittlung graphischer Darstellung zu handhaben. Auf diese Art machte sich die falsche Voraussetzung breit, die Einsicht in solche Sätze hinge von der imaginären Graphik ab und die gemeingültigen Operationen der Analysis reichten zu deren Beweis nicht aus. Die Graphik wurde nicht etwa als blosses Veranschaulichungsmittel gebraucht, welches auch fehlen könnte, sondern hat bis heute, wie besonders an den bisherigen, zuerst von Cauchy in Umlauf gesetzten und sich schon über ein halbes Jahrhundert unverbessert fortschleppenden Darstellungen des Satzes vom Integralwerth constatirt werden kann, die Rolle eines unentbehrlichen Zwischengliedes gespielt.

Alle eben angedeuteten Beschränktheiten und Missgriffe haben eine Ursache, die tiefer wurzelt, als die noch lange kein Jahrhundert alten Gaussischen Anfänge zu einer sich selbst unklaren, willkürlichen, mit Mystik versetzten und überdies unmotivirten imaginären Graphik. Der entferntere Grund ist die unrichtige von Gauss nicht etwa berichtigte sondern noch verstärkte Vorstellung, dass die Imaginären noch etwas Besonderes für sich sein müssten, was sich den allgemeinen Grundsätzen der Analysis entzöge und wofür man demgemäss immer noch besondere Nachweisungen brauchte. In dieser unrichtigen Vorstellung sind grade Diejenigen am meisten steckengeblieben, die sich im Anschluss an Gauss und unter Handhabung der imaginären Graphik etwas darauf zu Gute thaten und thun, die Functionen complexer Argumente zu behandeln. Trotz aller Redensarten darüber, dass die imaginären Grössen gleich den negativen einzubürgern seien, hat man doch noch die falsche Idee fortcultivirt, ja gesteigert, für die Operationen mit den Imaginären noch besonderer Beweise zu bedürfen. Dieser durch den Mysticismus und besonders durch den imaginären Aberglauben von Gauss erst recht angeschwollene

Trug steht in Widerspruch mit der Gemeingültigkeit der ganzen Analysis, welche von vornherein und an sich nur eine einzige Art Grössen kennen darf, für diese aber die verschiedensten Signirungen in Betracht zu ziehen hat. Hiebei kommt es nun für die Operationen nicht mehr wesentlich darauf an, ob eine Signirung einfach oder zusammengesetzt sei, ob sie eine ausführbare oder nicht ausführbare Operation anzeige oder was sonst in den Zeichen und deren Verbindung an vollziehbaren oder nicht vollziehbaren Regeln vor die an sich stets absoluten Grössen gesetzt und so für die Operationen mit diesen ausgesprochen werde. Auf diese Art beziehen sich alle analytischen Gesetze und Regeln in letzter Instanz immer auf absolute Grössen, und eine richtige Theorie von der Allgemeinheit der Analysis bringt daher auch eine klare und exacte Imaginärtheorie mit sich. Ein wesentlicher Vorzug unserer neuen Lehre vom Imaginären besteht hienach auch darin, die Kluft weggeräumt zu haben, welche in den Vorstellungen der Mathematiker zwischen den vermeintlichen beiden Grössenarten bisher noch ihr Wesen getrieben und die Allgemeinheit der Analysis, der reinen wie der angewandten, beeinträchtigt hat.

Dreizehntes Capitel.

Signirung, Construction und Lage.

1. Um die verworrenen Ideen, die sich an die Beziehung des Analytischen zum Geometrischen und namentlich an eine geometrische Bedeutung der Vorzeichen, d. h. an eine sogenannte Geometrie der Lage geknüpft haben, gleich an der Quelle unschädlich zu machen, sei hier eine principielle Unterscheidung vorangeschickt. Die Analysis, an und für sich betrachtet, ist ganz unfähig, in ihren Operationen und Formeln irgend welche Begriffe einzuschliessen, die über die allgemeinen Vorstellungen von Grössen überhaupt und deren durch Rechnung bewerkstelligte Zusammensetzung hinausreichten. Die Operationszeichen können daher an sich auch keine andere Bedeutung haben, als diejenige, welche in den durch sie angezeigten Rechnungsregeln unmittelbar enthalten ist. Addition, Subtraction u. s. w., also auch die ent-

sprechenden Zeichen, haben in der isolirten und abstracten Analysis, also in jeglicher Formel, solange diese ohne weitere Unterschiebung als Grössenformel verstanden wird, nie einen andern Sinn, als den unmittelbaren, vermöge dessen sie die Grössen rechnend verbinden. Die Grössen selbst sind dabei nichts weiter als Inbegriffe von Einheiten irgend welcher Art und Benennung. Sind es nicht rein abstracte Zahlen, so ist die Vorbedingung für die vollständige Vollziehung aller Operationen die Gleichartigkeit derjenigen Grössen, die zu einer Grösse zusammengefasst werden sollen. Gleichgültig bleiben aber hiebei alle Eigenschaftsunterschiede der Grössen, die nicht zum Begriff der Grösse und Grössenart selbst gehören. Haben wir beispielsweise Linienlängen, so sind die Eigenschaften grade, gebrochen, krumm, so oder so gelegen u. dgl. nichts, was in einer Rechnungsverbindung als solcher ausgedrückt und erheblich sein könnte. Die Summe $a + b$ ist dagegen gleichgültig, ob etwa die Längen, die man sich unter a und b denken mag, eine einzige grade Linie oder aber miteinander einen Winkel bilden. Auch können sie Stücke einer Curve, also beispielsweise auf dem Umfang eines Kreises abgesteckt sein, und dennoch bleibt die Additionsformel in ihrem unmittelbaren analytischen Sinne davon unberührt.

Aus der gekennzeichneten Unterscheidung folgt nun sofort, dass es thöricht ist, aus rein analytischen Begriffen, also aus blossen Rechnungszeichen etwas über Construction und Lage ausmachen zu wollen. Irgend ein Gesetz der Construction und Lage, also eine ganz bestimmte geometrische Voraussetzung, muss bereits dem Sinn einer Formel zugesellt sein, damit aus dieser Verbindung der Formel und des ihr beigefügten geometrischen Begriffes weitere geometrische Consequenzen möglich seien. Man schliesst alsdann nicht rein analytisch, sondern aus der speciellen Verknüpfung, vermöge deren die Formel ausser ihrem allgemeinen Sinne auch noch den erhält, Grössen von gewisser Lage nach einer bestimmten Regel zu verbinden. Wird nun die Voraussetzung einer solchen Lage oder sonstigen geometrischen Eigenschaft nach Maassgabe irgend einer Regel, wie im Falle bestimmter, also beispielsweise rechtwinkliger Coordinaten, einfürallemal festgehalten, so versteht sich, dass sich hieraus eine Correspondenz von constructiver Gestaltung und rein analytischer Operation, also etwa von Unterschieden in der Lage und Unterschieden in den Rechnungszeichen, ergeben muss. Dieses Bei-

einander hängt aber stets von der ursprünglichen Voraussetzung ab, durch welche das erste und maassgebende Beieinander willkürlich festgesetzt wurde.

Will man Linien auf einer einzigen Axe in Betracht ziehen und nach Maassgabe functioneller Grössenverhältnisse bestimmen, so ist klar, dass die Gleichung, welche man dafür erhält, alle ihre Wurzeln auf eben dieser Axe haben müsse. Im fünften Capitel haben wir bereits gezeigt, wie eine derartige Construction ausfalle. Nun ist eine solche Gestaltung wohl geeignet, alle Vorurtheile zu widerlegen, die über die vermeinte Rechtwinkligkeit des Imaginären durch Gauss unter dessen Nachtretern Curs erhalten haben. In der Rüben- und Kohlkopfsgraphik, welche von eben jenem Gauss ausgegangen ist und die wir bei Gelegenheit unserer Imaginärtheorie schon gekennzeichnet haben, sind die imaginären Bestandtheile binomischer Grössen von vornherein als Ordinaten aufgetragen. Dieser zufällige Umstand entscheidet aber über keinen wirklich geometrischen Sachverhalt, so wenig als etwa die Spannungen von Dämpfen darum etwas mit der Rechtwinkligkeit zu schaffen haben, weil man in einer graphischen Darstellung die Temperaturen zu Abscissen machen und dazu jene Spannungen als rechtwinklige Ordinaten auftragen kann. Die gewöhnliche physikalische und sonstige Graphik ist aber bei Weitem nicht etwas so Willkürliches, wie die jetzt üblich gewordene imaginäre Graphik. Letztere spaltet eine zusammengehörige Grösse $a + b\sqrt{-1}$ erst in zwei Theile, um dann die Stücke für sich zu Coordinaten zu machen. Ueberall sonst aber hat man wirklich von vornherein zwei getrennte ungleichartige Grössen, deren jede ihren gesetzmässigen Lauf nimmt, und von denen die eine thatsächlich Argument, die andere thatsächlich Function ist. Die graphische Curve lässt nun übersehen, welche Grösse die Function, d. h. die Ordinate an jeder Stelle ihres Laufs, nämlich für jeden Werth des durch die Abscisse dargestellten Arguments, habe. Dies ist die natürliche Art, Functionen zu veranschaulichen und hat auch einen eigentlichen geometrischen Sinn; denn wie man jede ebene Curve durch eine Gleichung $y = f(x)$ zu decken vermag, so kann man auch umgekehrt jede analytische Function so auffassen, als wäre sie eine geometrische, und demgemäss eine Curve construiren, die ihr entspricht. Letzteres ist an sich keine Graphik, sondern wirkliche Construction. Graphik wird diese Construction erst in Bezug auf nicht geometrische

oder überhaupt auf solche Grössen, die nicht selbst construirt sind. Echte Graphik setzt daher die Einschiebung eines wirklich constructiven Mittelgliedes voraus; sie erfordert stets, dass eine rein analytische Beziehung, also irgend eine Gleichung oder Function, mag man diese nun kennen oder nicht, als für die Curve maassgebend gedacht werde. Die imaginäre Graphik aber verstösst gradezu gegen diese Forderung; denn indem sie sich mit der Function einer binomischen Grösse befasst, macht sie nicht etwa die binomischen Argumente zu Abscissen und deren Functionen zu Ordinaten, wie es dem allgemeinen Princip entsprechend geschehen muss, sondern construirt eine einheitliche Grösse gleichsam um die Ecke als rechtwinklig gebrochene Linie. Auf diese Weise hat sie zunächst nichts als eine brüchige Verbildlichung der reellen Argumentbestandtheile und zwar auf Kosten der Erschöpfung des ebenen Spielraums der Graphik, in welchem naturgemäss nur zwei Dimensionen zur Verfügung stehen. Um sich ausser den Argumenten die Functionen derselben graphisch zu verschaffen, hat sie keine Mittel. Eine graphische Behandlung der Function gleich dem Argument in einer Nebenzeichnung oder auch auf einer andern Ebene ist nur eine Wiederholung und stellt die Bestandtheile der Function, aber eben nicht die Function selbst, d. h. nicht als Function ihres Arguments dar. Auch kann der gelöste Zusammenhang zwischen Argument und Function nicht etwa dadurch hergestellt werden, dass die Umrisse in der Ebene der Functionen als sogenannte Abbildungen oder, besser gesagt, Verzerrungen der entsprechenden Gebilde in der Ebene der Argumente angesehen werden. Die imaginäre Graphik bleibt daher lieber der Regel nach die grössere Hälfte der Arbeit schuldig, indem sie sich wirklich graphisch nur mit den Argumenten zu thun macht, zu einer Graphik des Functionslaufes aber in der vorherrschenden Praxis thatsächlich nicht gelangt. So ist denn diese imaginäre blosse Argumentgraphik schliesslich nur eine Art, in mehr oder minder willkürlichen Bildern auszusprechen, wie sich jedesmal die Bestandtheile des Arguments bei ihrer Veränderung zu einander verhalten sollen; denn trotz aller Geschraubtheiten von blätterigen Flächenstreifen, mit denen z. B. der gaussige Hypergeometrist Riemann debütirt und die Plattheiten der imaginären Graphik ein wenig in Relief gestellt hat, ist jener enge Rahmen blosser Argumentgraphik nie mit Erfolg durchbrochen worden. Der eigne Versuch jenes Riemann,

auf einer zweiten Ebene den Functionslauf als sogenannte Abbildung, d. h. thatsächlich als Zerrbild des Argumentlaufs darzustellen, hat zu nichts geführt, wenn nicht etwa dazu, die Willkür und den losen Zusammenhang der imaginären Graphik noch mehr bloszustellen.

Schade nur, dass Gauss und die Gaussiker in ihrem mystischen Wunderreich nicht noch ein kleines Wunder mehr verrichtet und sich frischweg unter ihren mehr als dreidimensionalen Räumen den fünfdimensionalen auserlesen haben, um sich aus einer dortigen Mühle für ihre imaginäre Graphik das Papier kommen zu lassen. Dieses Papier würde offenbar nur eine Dimension weniger als die dortigen Körper haben, mithin vierdimensional und hiedurch wohl geeignet sein, in seiner Ebene ohne Confusion alle imaginären Gaussigkeiten, sowohl die Wege der Argumente, als die Wege der Functionen in vier einander nicht querkommenden Coordinaten aufzunehmen. Wir aber, die wir nur im beschränkten Raume von drei Dimensionen hausen dürfen, haben kein Recht, an solche Auskünfte der Hypermathematik zu denken, um mit den Zaubern dieser neuen Wissenschaft zu hantiren. Wir bleiben auf unsere eignen Wege angewiesen und müssen sehen, wie wir unsere Argumente solid und ehrlich in der alten Art und ohne jene mystisch schwindelige Uebermathematik zu verständlicher und übersichtlicher Anschauung bringen. Dabei werden wir selbstverständlich nur eine Axe gebrauchen, später aber dem Bilde, welches für Bivariable von modulirter Form jederzeit nahegelegen hat, eine erweiterte Gestaltung und einen rationellen Sinn geben. Auf diese Weise wird auch das Körnchen Wahrheit, welches in dem ersten instinctiven Ausgangspunkt der Graphik, nämlich in der unwillkürlichen Verbildlichung der Bestandtheile von $\varrho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)$ verborgen war, aber von Gauss nicht etwa aufgehellt, sondern umnebelt und mit Falschheiten versetzt wurde, in reiner Gestalt an den Tag kommen.

2. Zunächst unserer bisherigen Methode folgend, behandeln wir die imaginären Grössen auch hier als einen Specialfall der signirten und werthigen. Wir stellen uns daher die Aufgabe auch in Beziehung auf die Construction sofort allgemeiner, indem wir sie überhaupt auf ein zweiwerthiges Binom ausdehnen. Es handelt sich alsdann um die Construction von Functionen binomischer Argumente, — von Functionen also, wie sie im vorigen Capitel in rein analytischer Weise betrachtet wurden. Ein

Argument, wie es auch zusammengesetzt sein möge, als einheitliche Variable betrachtet, muss hiemit auch zugleich als einheitliche Grösse zur Geltung kommen. Haben wir also für $y = f(x)$ ein binomisches Argument $x = a \pm b$ und wollen wir den Lauf der Function y in seiner Abhängigkeit von den verschiedenen x construiren, so versteht es sich, dass wir die Grösse x in der analytischen Einheitlichkeit ihrer Dimension darzustellen und nicht willkürlich einen solchen Unterschied der Bestandtheile hineinzumischen haben, der an sich gar nicht existirt. Wir müssen also mit dem Ausdruck $a \pm b$ auf derselben Axe bleiben, d. h. überhaupt ihn als Abscisse darstellen; denn die Theile der fraglichen Grösse unterscheiden sich durch die Signirung, sonst aber durch nichts. Auch sind in der reinen wie in der angewandten Analysis Grössen von solcher Ausdrucksform immer in sich einheitlich zusammenhängende, wie am einfachsten schon das Beispiel der Wurzeln einer gemischten quadratischen Gleichung lehrt. Die additive oder subtractive Verbindung der Bestandtheile ist nicht zum Scherz vorhanden und bedeutet auch im imaginären Specialfall eine Zusammenfassung der verschiedenartig signirten Einheiten zu einer Gesammtzahl von Einheiten überhaupt, bei denen von dem Unterschied der reellen und der imaginären Signirung abstrahirt wird. Es ist also in allen Fällen immer eine Grösse, nicht zwei, womit wir es zu thun haben. Dieser Einheitlichkeit wird in der Construction aber nur entsprochen, wenn wir $a \pm b$ als zweiwerthige Abscisse abstecken.

Für unsern Zweck hat die Zweiwerthigkeit nur den Sinn, die Bestandtheile der zweitheiligen Grösse in ihren Eigenschaften zu unterscheiden. Dem $a \pm b$ steht ein $a \mp b$ gegenüber, so dass wir also für die erstere Gestaltung das zweiwerthige b immer als addirt ansehen können. Der Unterschied von Summe und Differenz, insofern dieser sich auf die Operationen und nicht auf die unabtrennbare Eigenschaft der möglichen Doppelwerthigkeit bezieht, tritt nur dadurch gehörig hervor, dass man erwägt, wie $a \pm b = a + (\pm b)$ und $a \mp b = a - (\pm b)$ ist. Haben wir $f(a \pm b) = \alpha \pm \beta$, so sind hiemit die Bestandtheile α und β für alle Fälle bestimmt, und wir können zur Vereinfachung der Sache kurzweg von einem zweitheiligen Argument $a + b$ oder auch $a - b$ ausgehen. Die geometrische Construction macht sich ganz einfach dadurch, dass wir als Abscisse erst a und unmittelbar daran in der Verlängerung auch b auftragen. Im Fall der

Differenz würden wir statt dessen um b Einheiten zurückgehen, d. h. b vom Ende von a abschneiden. Entsprechend müssen wir mit α und β verfahren, um die Ordinate zu erhalten. Uebrigens sei gleich bemerkt, wie das Aneinandersetzen grade von a und dann von b Einheiten nicht einmal nothwendig ist; man kann auch Stücke der Bestandtheile abwechseln lassen, wenn nur immer von jeder von beiden Einheiten die nöthige Anzahl aufgetragen wird.

Solange α und β von der besondern Beschaffenheit von b, nämlich davon, ob dieses an sich positiv reell oder aber positiv imaginär ist, unabhängig sind, bleibt die allgemeine Constructionsregel nicht nur für $b' \sqrt{-1}$, sondern auch für die entsprechenden Bestandtheile der Ordinate bestehen. Im imaginären Fall kann diese Unabhängigkeit aber nur eine zufällige Ausnahme sein. Man wird von $f(a \pm b) = \alpha \pm \beta$ im Allgemeinen nicht auf $f(a \pm b \sqrt{-1}) = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ schliessen können. Das Gesetz der Correspondenz der Werthigkeitsform bleibt zwar gültig; aber im imaginären Fall werden der Regel nach α und β nicht dieselben Werthe annehmen wie im reellen. Letzteres rührt daher, dass in α und β gemeiniglich auch Functionen von $\sqrt{-1}$ vorausgesetzt werden müssen, durch welche Negativitäten entstehen, die sonst nicht vorhanden sein würden. Diese Negativitäten müssen nun folgerichtig in der Construction ebenso behandelt werden, wie ihre imaginäre Ursache. Wie letztere sind sie nur Vorzeichen absoluter Linien und gehören nicht zu denjenigen Operationsvorzeichen, welche, wie die der ursprünglichen Addition und Subtraction im Argument entsprechenden, selbst an der Construction etwas ändern. Ob wir auf derselben Linie als Argument $a \pm b$ oder aber $a \pm b \sqrt{-1}$ construiren, kommt nach dem Gesetz unserer Imaginärtheorie geometrisch, und an sich betrachtet, genau auf dasselbe hinaus. Demgemäss müssen wir aber auch die Consequenzen dieser Einerleiheit ziehen und dürfen daher $(\sqrt{-1})^2$ und $(\sqrt{-1})^3$ nicht als Anzeige einer geometrischen Subtraction missverstehen. Von dieser Consequenz hat man in dem bisherigen Dunkel aller sogenannter Constructionen des Imaginären, die überdies sämmtlich blos graphisch ausfielen, nicht die geringste Ahnung gehabt. Auch wenn man, wie dies vereinzelt geschehen ist, grundsätzlich eine imaginäre Grösse wie eine reelle, d. h. auf gleicher Linie mit dieser, hinzeichnete und

auf diese Weise allerlei analytisch graphische Spielereien trieb, ist man doch jeglicher klaren Einsicht so fern geblieben, dass diese unsere entscheidende und wahrlich nicht auf der Hand liegende Wendung auch nicht von Weitem durch irgend etwas Verwandtes in Frage kommen konnte. Selbstverständlich ist hiebei, dass die gemischte Signirung, welche den Rechnungswerth der Abscisse vorstellen soll, in die auf einheitliche Argumente bezogene Gleichung $y = f(x)$ von aussen hineinkomme, so dass also unabhängig hievon die absolute Ausdehnung von y, sei es reell oder in gemischten, der Hauptgleichung entsprechenden Signirungsbestandtheilen, gleichsam als Rahmen feststeht, in den sich die sonstige Construction zu fügen hat. Diese Construction kann demgemäss nichts Anderes werden, als die Vertheilung weiterer Signirungen auf der bereits ihrer Länge nach gegebenen Ordinate.

Hienach haben wir als allgemeine Form der Ordinate $\varkappa + \iota^2 \lambda \pm (\iota \mu + \iota^3 \nu) = \varkappa + \iota^2 \lambda \pm \iota (\mu + \iota^2 \nu)$, worin ι die absolute $\sqrt{-1}$ bezeichnet. Der fragliche Ausdruck hat unmittelbar die allgemeine Form einer den vierten Wurzeln der Einheit entsprechenden vierfachen Signirung. Jede Function einer binomisch imaginären Grösse muss sich auf diese Form bringen lassen. Bei einer rationalen Function liegt dies unmittelbar auf der Hand; für nichtrationale Functionen erweist es sich durch Benutzung der Maclaurinschen und Taylorschen Reihe nach derselben Methode, durch welche wir die allgemeine Correspondenz der Werthigkeits- und Signirungsformen im zwölften Capitel gezeigt haben. Ein imaginäres Binom $a + \iota b$ ist nämlich nur ein Specialfall eines signirten Quadrinoms $\iota^4 k + \iota^2 l + \iota m + \iota^3 n = k + \iota^2 l + \iota (m + \iota^2 n)$; denn gleichviel ob man die Glieder mit den überschüssigen Signirungen gleich Null setzt oder nicht, so lässt sich immer die gewöhnliche zweitheilige Form herstellen. Die Correspondenz der Signirung, die für eine Function des Quadrinoms erwiesen wird, gilt also auch für das imaginäre Binom.

Zur Abscisse $x = a + \iota b$ construiren wir die Ordinate $y = \alpha + \iota \beta = \varkappa + \iota^2 \lambda + \iota (\mu + \iota^2 \nu)$, indem wir $\alpha = \varkappa + \iota^2 \lambda$ und $\beta = \mu + \iota^2 \nu$ nicht etwa ihren reellen analytischen Werthen nach, sondern jedes als eine binomisch imaginative Grösse und demgemäss als absolute Summe seiner Bestandtheile auftragen. Analytisch ist $\alpha = \varkappa - \lambda$, geometrisch wird aber thatsächlich $\varkappa + \lambda$ construirt, indem die negativen Einheiten, als nur in Folge des

Imaginären negativ, selbständig hinzugefügt werden müssen, wie wenn das Imaginäre ursprünglich im Argument nicht existirt hätte und statt dessen das reell Positive maassgebend gewesen wäre. In der specielleren Construction darf der Ausgangspunkt nicht verleugnet und kein Unterschied eingeführt werden, von dem grade principiell abstrahirt werden soll. Irgend welche Lage- und Gebietsverhältnisse mögen das so construirte Imaginäre auch geometrisch von andern correspondirenden reellen Gebilden unterscheidbar machen; hier aber, wo wir das Imaginäre bereits in seinem eignen Gebiet vor uns haben, kommen solche Beziehungen nicht in Frage.

Die angegebene Construction hat noch die specielle Voraussetzung, dass in $a + \iota b$ weder a noch b ein Glied mit ι^2 einschliesst. Es ist dies also derjenige Fall des allgemeinen Quadrinoms, in welchem die Glieder mit ι^2 und ι^3 Null sind. Nicht jede binomisch imaginäre Grösse darf daher so construirt werden, wie wir $a + \iota b$ dargestellt haben. Ist sie nämlich nicht ein ursprüngliches Imaginäres und enthält sie demgemäss in a und b oder auch nur in einem dieser Bestandtheile etwas imaginativ Negatives, so muss dies auf der Abscisse ebenso positiv construirt werden, wie auf der Ordinate geschehen ist. Hiemit wird denn auch die Uebereinstimmung zwischen den beiden Coordinaten eine vollkommene. Gesetzt, man wollte die analytisch viertheilige Grösse zur Abscisse nehmen, also die Function umkehren und anstatt $y = f(x)$ nunmehr $x = \varphi(y)$ construiren, so würde der Fehler handgreiflich werden, falls man α und β, wie vorher bei a und b der besondern Voraussetzung wegen am Platze war, jedes unmittelbar, d. h. als Differenz anstatt als Summe, rein nach dem Rechnungswerth auftragen wollte. Die wahre Construction der imaginären Binome, insofern sie von aussen in die Gleichung hineingetragen sind, steht also unter der allgemeinen Regel einer Construction der Quadrinome und ist als etwas von der letzteren Unabhängiges, ausser in zufälligen Specialgestaltungen, gar nicht zu denken und zu normiren.

Die beigebrachte Construction muss stets dieselbe Curve ergeben, welches functionelle Verhältniss von a und b man ihr auch zu Grunde lege. Geometrisch muss sich nämlich Alles so gestalten, wie wenn unmittelbar das reelle Binom $a + b$ und dessen Function construirt worden wäre. Im imaginären wie im reellen Fall werden die räumlichen Strecken dieselben und unter-

scheiden sich nur durch ihre imaginären und imaginativen Vorzeichen. Nennen wir die Reihe der Zwischenwerthe, durch die wir den Lauf des Arguments nach Maassgabe einer besondern functionellen Beziehung der Bestandtheile bestimmen, den Constructionsweg, so hat letzterer auf die Curve keinen Einfluss.

3. Ist etwa ein bestimmtes Integral zwischen den binomischen Grenzen $a_1 + b_1$ und $a_2 + b_2$ zu construiren, so lehrt das vorher gewonnene Schema, dass wir hier mit dem allgemeinen Satz ausreichen, dass einem solchen Integral der Flächenraum entspricht, den die Ordinate im Uebergange von einem ihrer Grenzwerthe zum andern beschreibt. In diesem Satz liegt keine Voraussetzung über die Form des Arguments, von der er also unabhängig bleiben muss. Der Werth des fraglichen Integrals wird hienach durch die Fläche zwischen den Ordinaten $\alpha_1 + \beta_1$ und $\alpha_2 + \beta_2$ geliefert. Er hängt nur von den Grenzen und der Form der Hauptfunction f, nicht aber von derjenigen functionellen Beziehung ab, die man zwischen a und b aus allen möglichen gewählt haben mag. Wir hatten dies im vorigen Capitel bereits rein analytisch bewiesen; hier zeigt sich nun der Sachverhalt auch in geometrischer Anschaulichkeit; denn zwischen den Endpunkten der Grenzordinaten kann sich nur eine Curve ergeben, weil stets dieselbe Hauptfunction $y = f(x)$ maassgebend ist und α und β immer jedes als binomisch imaginative Grösse construirt werden.

Das Schema der vorigen Nummer für die Construction des Imaginären und Imaginativen bedarf, um den fraglichen Satz vom bestimmten Integral auch geometrisch sichtbar zu machen, nur noch eine Ergänzung durch die Construction der Differentiale. Am folgerichtigsten und daher auch am natürlichsten bleibt auch $da + \iota db$ ungetrennt. Von $da + db$ für den reellen, also etwa nur durch Zweiwerthigkeit charakteristischen Fall reden wir hier nicht besonders, weil er nach den früheren Darlegungen stets als miteingeschlossen gelten kann, und weil die verschiedene Wahl der Zwischenwerthe sich grade im imaginären Fall als erheblich interessirend erweist. Wir tragen also $da + \iota db$ wiederholt hintereinander auf, indem wir uns die Grösse der Abscisse auf diese Weise entstehend denken. Hiebei machen wir da zum unabhängigen und zugleich constanten Differential, so dass db in Abhängigkeit von da gegeben sein muss. Hiebei bleiben alle Möglichkeiten offen, grade so wie für das functionelle Grundverhältniss von a und b selbst. In jedem einzelnen Falle, d. h. für jede

gewählte Reihe der Zwischenwerthe, erhalten wir zu da einen ganz bestimmten Werth von db und es ist mithin das zweitheilige Differential ebenso bestimmt gegeben, wie das zweitheilige Argument selbst. Während nun auf diese Weise die Abscisse wächst, wechseln die reellen und die imaginären Differentialbestandtheile ab; jedes differentielle Element aber, so klein es auch angenommen sein möge, besteht für den jedesmaligen Kleinheitsgrad aus beiden Bestandtheilen.

Mit den Differentialen der Ordinate werden wir entsprechend verfahren, nur dass wir diese sogar viertheilig nehmen müssen. Jedes differentielle Element der Ordinate ist ein geometrisches Quadrinom mit vierfacher Signirung. Hatten wir das Abscissendifferential $dx = da + \iota db$, so haben wir jetzt das Ordinatendifferential $dy = d\varkappa + \iota^2 d\lambda + \iota d\mu + \iota^3 d\nu$, wobei die Strecken $d\varkappa$, $d\lambda$, $d\mu$ und $d\nu$ hintereinander aufgetragen sind, so dass man zu ihnen auch geometrisch die betreffenden Signirungen hinzugeschrieben vorzustellen hat.

Betrachten wir nun den differentiellen Flächenstreifen mit der Basis dx und der Höhe y, indem wir uns zugleich auch in den Theilungspunkten von dx Ordinaten errichtet und von den Theilungspunkten von y und dy sich-selbst parallele Abscissen gezogen denken. Auf diese Weise ist völlig anschaulich, wie jeder Flächenstreifen vom Inhalt $dydx$ in acht Bestandtheile zerfällt, von denen jedoch je zwei dieselbe Signirung erhalten. Zunächst zerfällt er nach Maassgabe der zweitheiligen Grundlinie $da + \iota db$ in zwei, und jeder dieser Theilstreifen $da\, dy$ und $\iota db\, dy$ nach Maassgabe der viertheiligen Seite noch in vier, nämlich einerseits $da\, d\varkappa$, $\iota^2 da\, d\lambda$, $\iota da\, d\mu$, $\iota^3 da\, d\nu$ und andererseits $\iota db\, d\varkappa$, $\iota^3 db\, d\lambda$, $\iota^2 db\, d\mu$, $db\, d\nu$. Das ganze Differential des Flächenraums, d. h. der Gesammtflächenstreifen mit der Höhe y setzt sich nun wiederum selbst aus den gekennzeichneten Rechtecken $dydx$ und mithin aus den signirten Urbestandtheilen zusammen. Sein Inhalt ist hiemit nicht blos analytisch, sondern auch geometrisch sichtbar ein vierfach signirter. Da sich nun das bestimmte Integral sowohl im reellen als auch im imaginären Fall aus den Flächenstreifen zusammensetzt und die Fläche immer dieselbe bleibt, auf welche Art sie auch aus signirten Bestandtheilen gebildet werden möge, so ändert diese Zusammensetzung den absoluten Werth der Grösse des Integrals nicht. Sein imaginativer Werth, d. h. sein Rechnungswerth bestimmt sich aber, wie eben unsere Construction unmittelbar anschaulich macht, nur durch

die Grenzen mit ihrer Signirung; denn die von den Grenzordinaten gezogenen sich selbst parallelen Abscissen bestimmen den Signirungscharakter jedes Subelements der gesammten, dem Integral entsprechenden Fläche vollständig. Die Menge des von jeder Signirungsgattung vorhandenen Flächenraumes ist ausschliesslich von den Grenzen abhängig, wie man auch die Functionsbeziehung zwischen a und b und demgemäss das Verhältniss von da und db gewählt haben möge.

Letzteres ist in unserer geometrischen Construction aber noch specieller aufzuweisen. Es handelt sich bei der anschaulichen Zusammenfassung aller Rechtecke von derselben Signirungsart immer um differentielle Subelemente in der Rolle von Grundlinien und von Seiten. Nun ist zwischen a_1 und a_2 die Summe der da stets $a_2 - a_1$, wie man auch da wählen möge. Ebenso ist die Summe der db immer $b_2 - b_1$, auch wenn man auf Grund eines andern functionellen Verhältnisses andere Werthe von db erhalten hätte. Gesetzt, man hätte statt einer Reihe von db, wie sie irgend einer Wahl der Zwischenwerthe entspricht, für einen andern Fall eine Reihe von $(db)'$, so würde die Summe dieser $(db)'$ immer noch $b_2 - b_1$ bleiben. Genau dasselbe findet für die Summen der $d\varkappa$, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ statt, welche immer den Werthen $\varkappa_2 - \varkappa_1$, $\lambda_2 - \lambda_1$, $\mu_2 - \mu_1$, $\nu_2 - \nu_1$ gleich sind.

Je nach dem functionellen Verhältniss von b zu a werden aber $\varkappa$, λ, μ und ν ebenfalls Functionen verschiedener Art. Beispielsweise kann die Summe der Rechtecke $da\,d\varkappa$ für sich allein nicht dieselbe bleiben, wenn sich die Function zwischen a und b ändert; denn dann ändert sich auch die Function $\varkappa$ und wird das fragliche Theilintegral ungeachtet der Unverändertheit der Grenzen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ mitverändert. Es bleibt daher keiner der acht Bestandtheile der Gesammtfläche für sich derselbe; wohl aber ist die Zusammenfassung der je zwei gleichartig signirten unter ihnen immer constant, während sich die Function zwischen a und b ändert, wie es nachher zur Charakteristik dieses geometrischen Sachverhalts durch Berechnung der Rechteckssummen gezeigt werden wird. Zuvor sei jedoch noch darauf aufmerksam gemacht, wie die Summen der Rechtecke $da\,d\varkappa$ und demgemäss auch die von jeder der übrigen sieben Arten sich für sich in einen zu einer besondern Curve gehörigen Flächenraum zusammensetzen lassen. Addirt man die $da\,d\varkappa$ zunächst in den Ordinaten, d. h. integrirt man sie nach $d\varkappa$, so erhält man $\varkappa\,da$, und setzt

man nun die Streifen $\varkappa d a$ zusammen, so hat man einen Flächenraum, der zwischen der Abscisse $a_2 - a_1$, den Ordinaten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ und einer Curve liegt, deren Ordinaten a und $\varkappa$ sind. Der Inhalt dieser Curvenfläche ist nun $\int_{a_1}^{a_2} \varkappa d a$ und geometrisch anschaulich nichts als die Summe aller jener Rechtecke $d a d \varkappa$. Die Curve wird sich je nach der Function zwischen a und b verschieden gestalten, da entsprechend auch die zu denselben a gehörigen Zwischenwerthe von $\varkappa$ verschieden ausfallen. Obwohl daher die übrigen drei Begrenzungen des Flächenraums dieselben bleiben, muss dessen Inhalt sich doch nach Maassgabe der Curve ändern. Eine analoge Darlegung gilt für die übrigen sieben Summengruppen. Fassen wir aber die Summe der $d a d \varkappa$ mit der durch gleiche Signirung zugehörigen der $d \nu d b$ zusammen, so haben wir einen von der Function zwischen a und b unabhängigen und daher sich gleichbleibenden Flächenraum. Zwei partielle Curvenflächenräume von einerlei Signirung zusammengestellt variiren als Stücke, aber nicht als Ganzes. Es ist $\int_{a_1}^{a_2} \varkappa d a + \int_{b_1}^{b_2} \nu d b$ von der Functionsänderung zwischen a und b unabhängig, und ebenso verhält es sich mit den übrigen drei Integralsummen. Wie diese Constanz sich begründe, zeigt sich in den nachfolgenden Erwägungen. In der vierten Nummer des vorigen Capitels haben wir allgemein dargethan, dass die signirten Bestandtheile, in die $y d x$ zerfällt, vollständige Differentiale von Functionen der signirten Bestandtheile von x sind. In dem hier fraglichen Fall ist also $\varkappa d a + \nu d b$ das vollständige Differential einer Function von a und b. Bezeichnen wir diese Function mit $\varphi(a, b)$, so ist das zwischen den Grenzen a_1 beziehungsweise b_1 und a_2 beziehungsweise b_2 genommene Integral von $\varkappa d a + \nu d b$ dem Ausdruck $\varphi(a_2, b_2) - \varphi(a_1, b_1)$ gleich. Dieser Ausdruck hängt nun offenbar nicht von der Beziehung ab, die zwischen den Zwischenwerthen von a und b stattfindet, sondern nur von den Grenzwerthen von a und b, die der Voraussetzung nach immer dieselben sein sollen. Demgemäss ist der Werth jenes bestimmten Integrals, also die Summe der einwerthig signirten Flächenelemente immer dieselbe. Auf analoge Weise kann man dies auch für die mit ι, ι^2, ι^3 signirten Summen der Flächenelemente nachweisen. Durch die Analysis zeigt sich also, dass nicht nur der Gesammtflächenraum, sondern auch die Menge des von jeder

Gattung vorhandenen dieselbe bleibt, welche Beziehung auch zwischen a und b platzgreifen möge. In der geometrischen Gesammtconstruction ist aber anschaulich, wie die vier constanten Mengen solcher Art zusammen immer einen und denselben Flächenraum ausfüllen. Die verschiedene Eintheilung dieses Flächenraums nach den vier Arten richtet sich ausschliesslich nach der Eintheilung der Grenzen in signirte Bestandtheile, während die Untertheilung jeder der vier Gruppen und die Grössengestaltung der einzelnen Rechtecke von der besondern Functionsbeziehung zwischen den Bestandtheilen des Arguments abhängt.

Es versteht sich, dass in den bisherigen Ausführungen jene Abänderungsfälle zur Seite gelassen sind, in denen, wie in Nr. 8 des vorigen Capitels gezeigt, der Satz vom Integrationsweg besondere, nicht in der allgemeinen enthaltene Formulirungen erfordert. Es ist daher der Normalfall der einwerthigen Functionen, den man bei obiger Construction zunächst und unmittelbar vor Augen haben muss.

4. Wie gezeigt, ist der construirte Flächenraum dieselbe geometrische Figur, gleichviel ob wir es mit dem reellen oder dem imaginären Fall zu thun haben. Diese räumliche Identität ist in der Ordnung und bedeutet im Grunde nichts Anderes, als was sich in einfacherer Weise darstellt, wenn eine reelle und eine imaginäre Linie durch dieselbe absolute Strecke vorgestellt werden. Alsdann muss man sagen, die betreffende räumliche Linie habe in dem einen Falle einen besondern Rechnungswerth oder Signirungswerth für den zugehörigen Zusammenhang von Operationen. Hat man es mit einer Fläche zu thun, so wird die Gestaltung gemeiniglich nicht ganz so einfach, und wir haben nicht erst jetzt, sondern schon in der letzten Nummer des zehnten Capitels den erweiterten Begriff vom imaginären Werth, d. h. den des imaginativen Werths, nöthig gehabt, um dem Gegenstande in seinen weiteren Consequenzen gerecht zu werden. Hier wollen wir nun grundsätzlich und in voller Allgemeinheit den Begriff des imaginativen Werths einer sachlichen und unmittelbar vorhandenen Grösse specieller erläutern und ihn zum unmittelbaren Werth dieser Grösse in Gegensatz stellen.

Wir gehen zu diesem Zweck wiederum von einem Flächenraum und zwar einem solchen aus, in welchem die Unterscheidung der Bestandtheile sich am leichtesten macht. Es sei uns daher ein Rechteck gegeben, dessen Grundlinie den Signirungswerth

$a + b\sqrt{-1}$ hat, während die andere Seite, die zugleich die Höhe vorstellt, rechnungsmässig durch $c + d\sqrt{-1}$ vertreten wird. Hienach wird der signirungsmässige Flächeninhalt des Rechtecks das Product der beiden Factoren $(a + b\sqrt{-1})$ $(c + d\sqrt{-1})$ sein müssen, während der unmittelbare Werth der Fläche, wie er sich räumlich darstellt, der Grösse $(a + b)$ $(c + d)$ entspricht. Ziehen wir vom Trennungspunkte zwischen a und b und von dem zwischen c und d Linien, welche das Rechteck in vier Rechtecke theilen, so entsprechen sowohl die unmittelbaren als die signirten Inhalte jedes dieser vier Rechtecke den Grössen, welche sich bei Auflösung der Klammern jener Producte ergeben. Wir haben für die unmittelbaren Inhalte für das Rechteck links unten ac, für das rechts unten bc, für das links oben ad, und für das rechts oben bd. Die Inhalte mit Rücksicht auf die Signirung sind für dieselben Theilrechtecke in derselben Reihenfolge ac, $bc\sqrt{-1}$, $ad\sqrt{-1}$ und $bd(\sqrt{-1})^2 = -bd$.

Der Rechnungswerth des Rechtecks hängt vom Rechnungswerth seiner Seiten ab. Jener zerfällt aber in drei ungleichartige Bestandtheile, während dieser nur zwei aufweist; denn aus dem Product der rein imaginären Linienstücke ergiebt sich eine negative Rechtecksfläche. Wie in der Formel $ac + (bc + ad)$ $\sqrt{-1} + (-bd)$ setzt sich das Gesammtrechteck aus einem absoluten, einem negativen und zwei imaginären Rechtecken zusammen. Diese dreifache Zusammengesetztheit kann offenbar nicht mehr einfach imaginär heissen; denn dies würde bedeuten, es hätte das ganze Rechteck das Imaginärvorzeichen. Auch das Wort trinomisch können wir dabei nicht recht brauchen; denn es deutet, und zwar namentlich im Zusammenhange aller unserer Ausführungen speciell diejenige dreifache Signirung an, die den dritten Einheitswurzeln entspricht. Ebenso würden wir die Fläche in ihrer Zusammensetzung schlecht charakterisiren, wenn wir das Absolute und das Negative zusammenziehen und alsdann von einem binomisch imaginären Rechteck reden wollten. Das Neue und Interessante an der Sache besteht eben darin, dass der negative Flächentheil für sich unterschieden werden muss und sich in der Gesammtfläche nicht abgezogen, sondern hinzugefügt findet. Dieses Negative entsteht aus dem Imaginären und ist eine Function desselben; aus diesem Grunde dürfte der Ausdruck imaginativ, welcher den Zusammenhang mit dem Imaginären festhält, grade

da am passendsten sein, wo, wie wir gleich sehen werden, das Imaginäre ganz verschwindet. Wir sagen also, der imaginative Werth des Rechtecks bd sei $-bd$, d. h. negativ, und brauchen ausserdem das Wort imaginativ in dem weiteren Sinne, auch alle andern Functionen des Imaginärzeichens, also zunächst auch dieses selbst, in einem zusammengesetzten Werth mitanzuzeigen. Hienach ist also der imaginative Werth des Gesammtrechtecks derjenige, welcher sich ergiebt, wenn man den Theilrechtecken ihre betreffenden Signirungen zugesellt. Uebrigens kann dieser Werth auch einfach der Rechnungswerth oder Signirungswerth heissen; nur werden diese Benennungen nicht immer genügen, um Missverständnisse auszuschliessen und die grade erforderlichen Ideen anzudeuten.

Hätten wir ein Rechteck mit den Seiten $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$, so enthielte sein imaginativer Werth $a^2 - (-b^2)$ nichts mehr vom Imaginären; wohl aber würde b^2 ein negatives Flächenstück, welches ausserdem noch abzuziehen wäre. In dem zusammengezogenen Rechnungswerth $a^2 + b^2$ findet man aber von besondern Vorzeichen und Unterscheidungen nichts mehr, und dennoch hat dieser an sich reelle Ausdruck in dem fraglichen Zusammenhange auch analytisch den Charakter, der imaginative Werth des Products zweier Grössen zu sein, die unmittelbar, d. h. abgesehen von der imaginären Signirung genommen, $a^2 - b^2$ zum Product haben. Auf diese Weise gelangen wir schliesslich dazu, das Wort imaginativ nicht blos geometrisch von Flächen, sondern auch analytisch von Grössen überhaupt und zwar schon da brauchen zu können, wo noch keine zwei- oder mehrdimensionale sondern nur eine einfache additive oder subtractive Zusammensetzung stattfindet. Demgemäss können wir auch $a + b\sqrt{-1}$ einen imaginativen Werth von $a + b$ nennen. Diese Consequenz führt noch weiter. Haben wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und $b\sqrt{-1}$, so ist der imaginative Werth der Hypotenuse $\sqrt{a^2 - b^2}$ oder, wenn man das eigenthümliche Verhältniss besonders andeuten will, $\sqrt{a^2 + (-b^2)}$. Zieht man diese Wurzel wirklich binomisch, also dergestalt aus, dass man die positiven und die negativen Einheiten für sich getrennt beschafft, so erhält man ungleichartige Summanden. Diese sind, absolut genommen, zusammen der Länge der Hypotenuse gleich, während sie, indem man bei dem einen seine negative Signirung

als eine Anzeige verschiedenartiger Einheiten mitberücksichtigt, den imaginativen Werth, d. h. denjenigen Rechnungswerth vorstellen, durch welchen der etwa vorausgesetzten Gleichung genügt wird. In einer solchen Grösse ist nun nichts eigentlich Imaginäres; in ihrer thatsächlichen Gestalt gleicht sie einer reellen; dennoch giebt ihr aber der Umstand, dass sie durch verschieden signirte Bestandtheile anstatt der entsprechenden unsignirten Grösse figurirt, eine ähnliche Bedeutung wie dem Imaginären, und diese analoge Bedeutung ist es eben, die wir durch Wort und Begriff des Imaginativen hervorzuheben hatten.

Kehren wir jetzt zu jenem Flächenraum zurück, welcher dem Integral zwischen binomischen Grenzen für den reellen wie für den imaginären Fall entsprach. Das Paradoxe der Identität dieses Flächenraums für beide Fälle löst sich dahin auf, dass für reelle Grenzen die Fläche mit ihrem unmittelbaren Werth, für imaginäre Grenzen aber mit ihrem imaginativen Werth in Rechnung kommt. Sie stellt daher geometrisch beide Werthe vor, je nachdem man die Bestandtheile, aus denen sie sich zusammensetzt, ohne Signirungscharakter belässt oder mit diesem ausstattet.

5. Bisher war die Voraussetzung binomischer Coordinaten, insofern sie nicht aus der Gleichung selbst stammten, etwas Willkürliches und nur dazu gemacht, ein geometrisches Gegenbild analytischer Verhältnisse zu sein. Die imaginären Graphiker sind nicht einmal bis zu diesem Punkt, geschweige weiter zu wirklichen geometrischen Thatsachen gelangt. Sie haben ihre sogenannten complexen Grössen nicht einmal einheitlich veranschaulicht, sondern nur die Functionen zwischen den reellen Stücken innerhalb derselben Grösse und zwar wesentlich nur derjenigen des Arguments graphisch illustrirt. Unser ursprünglicher Ausgangspunkt vom Kreis- und Hyperbelschema und die darin enthaltene geometrische Thatsächlichkeit des Imaginären gestattet uns eine Nachweisung wirklich construirter binomischer Imaginaritäten. Auch haben wir im zehnten und im elften Capitel davon schon einigen Gebrauch gemacht. Hier wollen wir die Angelegenheit aus einem allgemeineren Gesichtspunkt betrachten und zeigen, wie durch eine Coordinatencombination, die wir das System der Doppelcoordinaten nennen wollen, die Gleichung jeder Curve in eine solche verwandelt gedacht werden könne, in welcher die unmittelbaren Argumente und Coordinaten zweitheilig sind.

Diese Zweitheiligkeit wird reell oder imaginär ausfallen, je nachdem die maassgebenden eingliedrigen Functionen bereits das eine oder das andere waren.

Betrachten wir vorläufig noch erst ein wenig den Specialfall der Hyperbel nach Maassgabe des gewohnten Schema. Nehmen wir die Hyperbel reell, so ergeben die Projectionen des einwerthigen x und des zweiwerthigen y auf die Asymptoten die secundären Coordinaten $u = \sqrt{\frac{1}{2}}\ (x \pm y)$ und $v = \sqrt{\frac{1}{2}}\ (x \mp y)$. Da es nämlich gleichgültig ist, ob man y oben den positiven oder negativen Werth giebt, wenn man ihm nur unten immer den entgegengesetzten ertheilt, so kann man auf diese Weise die Zweiwerthigkeit, d. h. die ungleichartige Beschaffenheit von y in Vergleichung mit dem relativ einwerthigen x markiren. Es versteht sich aber, dass auf jeder Seite immer nur ein Werth thatsächlich platzgreifen kann, sobald man über die Wahl entschieden hat, und da oben die Projection von y immer zu addiren ist, so wäre es unnatürlich und unbequem, ihm grade in diesem Fall an sich selbst einen negativen Werth beizulegen. Wir können also den Vortheil der grössern Bestimmtheit wahren, ohne deswegen die Ungleichartigkeit von x und y aus dem Auge lassen zu müssen. Wir haben alsdann auf der obern Asymptote $u = \sqrt{\frac{1}{2}}\ (x + y)$ und auf der untern $v = \sqrt{\frac{1}{2}}\ (x - y)$. Hiebei ist y um nichts weniger zweiwerthig als sonst; seine beiden Werthe sind nur in einer bestimmten Weise, nämlich an die conjugirten Werthe der secundären Coordinaten, vertheilt. Ausserdem bemerke man, dass u und v von einander die mit einer Constanten multiplicirten reciproken Werthe sind, indem $u = \frac{\frac{1}{2} r^2}{v}$ und $v = \frac{\frac{1}{2} r^2}{u}$ ist.

Bezieht man die gleichseitige Hyperbel auf die Kreisgleichung, so kann diese Unterordnung nur dadurch geschehen, dass man y imaginär setzt, was soviel heisst, als dass die sonst unzutreffende Gleichungsvoraussetzung bei einem imaginären Werth von y passend werde und so die Hyperbel miteinschliesse. An diesen Hauptpunkt erinnern wir jedoch hier nur, da wir ihn im zweiten Capitel ausführlich erwiesen und als den Ausgangspunkt einer wirklichen Construction des Imaginären gekennzeichnet haben. Durch die vorher angegebenen Projectionen oder auch durch nachträgliche Einsetzung des imaginären y an Stelle des reellen in die bereits gebildeten Formeln, erhalten wir $u = \sqrt{\frac{1}{2}}\ (x + y\sqrt{-1})$

und $v = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x - y\sqrt{-1})$. Zugleich ist $\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x + y\sqrt{-1}) = \dfrac{\tfrac{1}{2}\,r^2}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x - y\sqrt{-1})}$ und $\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x - y\sqrt{-1}) = \dfrac{\tfrac{1}{2}\,r^2}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x + y\sqrt{-1})}$, so dass man unmittelbar sieht, wie jede der binomisch imaginären Coordinaten aus der andern durch eine rationale Operation gewonnen werden könne. Wir haben hier also ein wirkliches geometrisches Beispiel von der Function einer sogenannten complexen oder, wie wir lieber sagen, binomisch imaginären Grösse, und zwar sind die Coordinaten, die von einander angebbare Functionen sind, selbst complex, wie es naturgemäss sein muss, und nicht losgerissene Stücke von Complexitäten, wie in den geometrischen Bodenlosigkeiten der complexen Graphiker.

Die Thatsache, dass sich die Curve, also zunächst die Hyperbel auch durch die einfachen Coordinaten construirt, ist etwas Specielles, wodurch an sich die Beweiskraft der Schlüsse aus werthig zusammengesetzten Coordinaten nicht beschränkt wird. Von wesentlicher Allgemeinheit ist die wirklich geometrische Nachweisung von Punkten, zu denen jede Coordinate binomisch imaginär ist. Diese hätten eher ein Recht, binomisch imaginäre Punkte zu heissen, als die damit übel contrastirenden sogenannten complexen Punkte der blossen Graphik. Bei den letzteren ist die eine Coordinate reell, die andere rein imaginär; in Wahrheit ist aber überhaupt eine derartige Bezeichnungsweise schlecht angebracht; denn schon auf einer und derselben Axe müsste verständigerweise der Endpunkt einer complexen Linie, wenn er sich nach diesem Abstand benennen sollte, complex heissen, weil auch hier die Distanzen, durch die er bestimmt wird, gemischte Grössen sind. In unserm Schema der Doppelcoordinaten ist vermöge der Natur dieser Coordinaten die Bestimmungsweise eines jeden Punktes ebenfalls eine doppelte. Das eine Mal wird er zufällig ebenso wie in der Graphik, aber wohlverstanden aus geometrischen Gründen, durch eine reelle Abscisse und eine imaginäre Ordinate, das andere Mal aber durch eine wirklich complexe Abscisse und eine wirklich complexe Ordinate bestimmt. Weit zweckmässiger stellt man sich aber die ganze Sache vor, wenn man bedenkt, dass der Ort des Punktes stets nur durch absolute räumliche Ausdehnungen angegeben werde, und dass man nur hinzuzufügen habe, die Coordinaten des Punktes hätten die und die imaginativen Werthe, d. h. Rechnungs- oder Signirungswerthe.

Was wir an der Hyperbel und deren Asymptoten gezeigt, haben wir schon früher auch auf den Kreis angewendet, und die vollständige Verallgemeinerung läuft darauf hinaus, überhaupt zu rechtwinkligen Coordinaten in der Ebene noch ein zweites Axenpaar hinzuzunehmen, welches durch Senkung der ursprünglichen Axen um einen halben Rechten entsteht. Alsdann liegt die neue Abscissenaxe um $+ 45^0$ über der alten und die neue Ordinatenaxe liegt $— 45^0$ darunter. Jeder Punkt einer Curve oder sonst eines geometrischen Gebildes kann nun zunächst durch einfache Coordinaten und dann vermöge der Projectionen durch binomisch ausgedrückte Coordinaten angegeben werden. Auch kann man die Gleichung der Curve in den binomischen Coordinaten u und v aus derjenigen zwischen x und y ermitteln. Ist y imaginär, wird also die Curve nicht auf ihre reelle Gleichung, sondern auf eine solche bezogen, die noch das Gegengebilde mitumfasst, so werden die binomischen Coordinaten in ihrem einen Bestandtheil auch imaginär. Auch hier steht im Allgemeinen nichts entgegen, die Gleichung in den imaginär gemischten Coordinaten u und v zu ermitteln; nur können, wenn die Gleichung über den vierten Grad hinausgeht, transcendente Umkehrungen höhergradiger Functionen nicht immer vermieden werden. Da es hier aber mehr auf die Vorstellungsart der Sache im Allgemeinen, als auf besondere Ausführungen ankommt, so bleibt jener Umstand unerheblich. Der Hauptzweck unserer ganzen Anordnung besteht darin, zu zeigen, wie jede Curve auf werthig gemischte Coordinaten bezogen werden kann, die auch gemischt imaginär gemacht werden können, wenn man die zu Grunde gelegte Gleichung entsprechend abändert. Diese Abänderung wird freilich nur dann natürlich gerathen, wenn wirklich ein zureichender Grund vorhanden ist, zwei Functionen, wie in unserm alten Beispiel $x^2 + y^2$ und $x^2 — y^2$ unter der Form der einen als eine einzige zu behandeln.

Letzteres ist beispielsweise für Ellipse und Hyperbel der Fall und gestaltet sich ähnlich, wie im Specialfall des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel. Bei der Parabel aber ist die Zugesellung einer Ergänzungscurve mit negativer Abscisse und dementsprechend imaginärer Ordinate etwas Willkürliches. Hiedurch wird dieselbe Parabel, nur in entgegengesetzter Lage, wieder hervorgebracht. Jedoch sind die secundären Coordinaten selbstverständlich auch hier in beiden Fällen anwendbar und an

Stelle der unmittelbar gegebenen Scheitelgleichung erhält man zwischen u und v die neue Gleichung $v = \sqrt{2}\, p + u \mp \sqrt{2 p^2 + 4 \sqrt{2}\, p u}$, welche für den imaginären Fall die Gestalt $v = - \sqrt{2}\, p + u \mp \sqrt{2 p^2 - 4 \sqrt{2}\, p u}$ annimmt.

Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass der fragliche allgemeine Uebergang von eingliedrigen zu binomischen Coordinaten sich nicht etwa auch allgemein umkehren lässt. Sind beliebige binomische Coordinaten gegeben, so kann man diese auf eingliedrige nur in dem vereinzelten Fall reduciren, wenn die binomische Ordinate der zweite, d. h. conjugirte Werth zur binomischen Abscisse ist. Auf dieser Unmöglichkeit allgemeiner Umkehrung beruht es auch, dass die eingliedrigen Coordinaten, die von der gewöhnlichen imaginären Graphik angewendet werden, auch im Sinne unserer eignen Imaginärtheorie die eigentlich binomischen Coordinaten nicht vertreten können. Nur in den besondern Fällen, in denen die Curve auf beiderlei Weise bestimmbar ist, ergiebt sich rein zufällig eine annähernde Coincidenz, indem der Unterschied sich auf den constanten Factor $\sqrt{\frac{1}{2}}$ beschränkt. Dieser zufällige geometrische Sinn, welcher auch der Graphik bei einiger Abänderung in einzelnen Fällen beigelegt werden kann, ist aber nicht ihr eignes Verdienst, sondern stammt aus unserer wirklichen geometrischen Construction des Imaginären, mit der zugleich die allgemeine Willkürlichkeit und Untauglichkeit jener gemeinen, die Bestandtheile unnatürlich zerstückelnden Graphik blosgelegt ist.

6. Um jenes Körnchen Wahrheit, welches instinctiv dem Ursprung der imaginären Graphik beigewohnt hat, von ihr selbst aber nicht verstanden worden ist, hier voll ins Licht zu setzen und zu etwas Erheblichem zu erweitern, können unsere Imaginärtheorie und Signirungslehre Dienste leisten. Ein Binom $a \pm b$ kann nicht blos auf jene hyperbolisch exponentielle Form gebracht werden, in der wir es früher dargestellt haben, sondern fügt sich auch in eine reelle Form mit Kreisfunctionen. Es lässt sich nämlich in den Ausdruck $\varrho\,(\cos\varphi \pm \sin\varphi)$ verwandeln, wobei $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird und sich φ durch die Gleichung $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ bestimmt. Hat man nun einmal den Gedanken einer zweitheiligen Veränderlichen gefasst und wünscht man, sich die Veränderungen dieser Bivariabeln anschaulicher vorstellig zu

machen, als es die blosse Buchstabensymbolik mitsichbringt, so kann man dies immerhin dadurch thun, dass man sich die Bestandtheile einzeln geometrisch entwirft, gleichviel wie deren Zusammensetzung auch gerathen möge. Hat man Cosinus und Sinus desselben Arguments geometrisch zu denken, so bleibt einem thatsächlich nichts Anderes übrig, als diese beiden zusammengehörigen Kreisfunctionen eben auf die Weise vorzustellen, wie sie ihrer Natur nach, seitdem man sie überhaupt kennt, stets construirt worden sind. Nun hat man nie abstracte Zahlencosinus, sondern nur Cosinuslinien, also Cosinus in Beziehung auf einen Radius, zeichnen können, und da man hier $\varrho \cos \varphi$ und $\varrho \sin \varphi$ als Maasse für die Linien vor sich hat, so muss der Kreis natürlich den Radius ϱ erhalten. Sollte der analytische Ausdruck bivariabel sein, so muss auch ϱ, und zwar unabhängig von φ, veränderlich genommen werden. Wir erhalten demgemäss als Bild der Bestandtheile der Bivariabeln das doppeltveränderliche rechtwinklige Dreieck mit den Seiten ϱ, $\varrho \cos \varphi$ und $\varrho \sin \varphi$.

Will man die Doppelveränderlichkeit dieses Dreiecks recht klar vorstellen, so muss man sie in Theilveränderlichkeiten zerlegen. Man gebe also ϱ einen bestimmten Werth r und setze es mit diesem constant. Alsdann muss sich r im Kreise drehen, damit alle Werthe φ in beliebiger Häufung durchmessen werden können und alle möglichen Kathetencombinationen hervortreten. Letztere erschöpfen sich mit einer einzigen Umdrehung und können sich alsdann nur wiederholen. Wir haben also alle möglichen Werthe von $r \cos \varphi$ und $r \sin \varphi$ gleichsam in einem geometrischen Tableau vor uns, welches den Dienst einer Tabelle leistet, indem es in Horizontal- und Verticalcolonnen die gewünschten Werthe aufweist. Diese analytische Tabellistik erweitert sich nach einer andern Seite, indem man φ constant und ϱ veränderlich setzt. Alsdann dehnt sich der Kreis aus oder, wenn man lieber will, es legt sich um ihn stetig eine Abfolge concentrischer Kreise. Die Werthe $\varrho \cos \varphi$ und $\varrho \sin \varphi$ verändern sich, während das Dreieck sich ähnlich bleibt und nur die Hypotenuse ϱ grösser wird.

Verbindet man beide Veränderungen, so setzen sie sich aus Drehung und aus dem gleichzeitigen Hinauswachsen des Radius über sich selbst zusammen. Man kann indessen jeden dieser Acte auch vom andern trennen und beide nacheinander, ja abwechselnd in beliebig kleinen Stücken aufeinander folgen lassen. Ist eine Gleichung $\chi(\varrho, \varphi) = 0$ gegeben, so ist hiemit die Bivariabilität

ausgeschlossen, und der Lauf der Bestandtheile des modulirten Ausdrucks ist ein solcher, dass der im Kreise liegende Endpunkt der Sinuslinie eine bestimmte Curve beschreibt. Dieser Endpunkt ist auch zugleich derjenige vom jedesmaligen ϱ, so dass also dieses ϱ der Radiusvector ist, dessen Spur, die Curve, den Werthen der zu veranschaulichenden Bestandtheile gleichsam associirt ist. So sind die Elemente des analytischen Ausdrucks construirt; aber das Ganze des Ausdrucks selbst ist es nicht. Wir haben einen veränderlichen Radius und einen veränderlichen Winkel, und die Grösse dieser beiden geometrischen Data genügt, um den jedesmaligen Punkt und mit ihm die Curve zu bestimmen. Das Ganze des modulirten Ausdrucks kann aber nur dadurch zusammengesetzt werden, dass man zur einen Kathete, die $\varrho \cos \varphi$ ist, die andere äusserlich summativ hinzufügt, wobei der negative Werth der zweiwerthigen ebenso geometrisch addirt wird, wie wenn er positiv wäre. In letzterer Beziehung haben wir hier den Fall einer gemischt signirten Linie, deren negativer Theil geometrisch nicht abgezogen wird, während er im Rechnungswerth der gebrochenen Linie abzuziehen ist. Ein solcher Fall musste früher befremden, kann es aber Angesichts unserer Signirungstheorie nicht mehr.

Eine Construction des Ganzen auf derselben Linie kann erst durch Projectionen und zwar auch nur unter Abänderung des Radius zu Stande kommen. Construiren wir von vornherein, statt mit ϱ, mit einem Radius $\varrho \sqrt{2}$ und projiciren dann $\varrho \sqrt{2} \cos \varphi$ und $\varrho \sqrt{2} \sin \varphi$ auf eine Linie, die mit der Axe den Winkel von 45° bildet, so verschwindet der projicirende Factor $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und man erhält eine zweifach signirte Linie, die sich wirklich aus den Stücken $\varrho \cos \varphi$ und $\varrho \sin \varphi$ zusammensetzt. Diese Projectionsart ist schon von unsern frühern Verfahrungsarten her in Anwendung auf hyperbolisch reelle und auf circular imaginäre Bestandtheile bekannt. Hier haben wir sie nur auf den circular reellen Fall übertragen. Ergänzen wir die eine Axe zum System zweier Axen, so wird die andere zweifach zusammengesetzte Linie $\varrho \cos \varphi \mp \varrho \sin \varphi$, und wenn man, wie es natürlich ist, bei der obern Projection nur das Pluszeichen maassgebend sein lässt, so wird die untere Projection auch geometrisch eine Differenz, so dass die Rechnungswerthe der entworfenen Linien im Ganzen und in den Theilen mit den Constructionsoperationen zusammenstimmen. Dies ist nun ein Schritt über das Stückwerk hinaus und eine thatsächliche

Construction des modulirten Ausdrucks, die man im Kreise herum für die verschiedenen Axentheile noch weiter verfolgen kann.

Statt uns mit letzterem Nebenwerk aufzuhalten, greifen wir auf die erste Veranschaulichungsconstruction zurück, durch welche die Bestandtheile isolirt dargestellt werden. Für den Punkt, der durch diese Bestandtheile bestimmt wird, können wir principiell eine sehr allgemeine Gleichung aufstellen, in der alle Grössen veränderlich sind, nämlich $a^2 + b^2 = \varrho^2$. Solange zwischen a und b nicht noch eine weitere Beziehung gegeben ist, genügt dieser Gleichung in der Ebene der Construction jeglicher Punkt, oder, mit andern Worten, ein beliebiger Punkt kann so angesehen werden, als wenn er formell nach Maassgabe dieser Gleichung bestimmt wäre.

Ehe wir an diese Gleichung des reellen Punktes das imaginäre Seitenstück anschliessen, bemerken wir noch das Erforderliche über das Vorkommen des rein Zweiwerthigen, des Einwerthigen und des aus beiden Gemischten. Ausschliesslich in der Abscissenaxe liegt das relativ Einwerthige, ausschliesslich in der Ordinatenaxe aber das rein Zweiwerthige, und wer das senkrechte Lageverhältniss überhaupt für erheblich hält, der sollte auch hier nicht übersehen, wie das relativ Zweiwerthige mit dem Einwerthigen, zu dem es gehört, einen Winkel von 90° bildet. Zwischen diesen beiden Werthigkeiten haben wir einen Uebergang von gemischt signirten Linienbrechungen; denn die um den rechten Winkel gebrochene Länge, die sich aus Abscisse und Ordinate zusammensetzt, stellt, wenn man auch das Negative, wie man hier muss, als geometrisch addirt gelten lässt, in ihrer Veränderung alle werthigen Gemischtheiten vor, die man im Uebergange von $a = \varrho$ zu $\pm b = \pm \varrho$ erhält. Man kann also sagen, dass mit irgend einem schiefen Winkel φ und der zugehörigen Richtung von ϱ eine gemischte Werthigkeit associirt ist, die dem modulirten Binom bei der fraglichen Lage der Darstellung seiner Bestandtheile zukommt.

Man darf aber nicht etwa sagen, dass die Gemischtheit in dem schräge gelegenen Radius selbst vorhanden sei. Allerdings kann man die Bestandtheile auf jede beliebige Linie, also auch jedesmal auf eine solche projiciren, die in der jedesmaligen Richtung des Leitstrahls liegt, und so auch in dieser Richtung auf einer und derselben Linie einen gemischten Ausdruck erhalten. Diese Projectionslinie ist aber, auch wenn sie mit dem Radius

zusammenfällt, nicht mit diesem zu verwechseln; denn sie bleibt der Gleichung $a^2 + b^2 = \varrho^2$ grade so fremd wie jene Axe mit dem Winkel von 45°. Jede Projection auf ϱ selbst ergiebt dagegen keinen gemischten Ausdruck, sondern wiederum ϱ. Beliebige Projectionsaxen liefern uns aber jedenfalls nicht ohne Weiteres das ursprüngliche modulirte Binom; es bleibt also dabei, dass die schiefe Richtung nur ein Merkzeichen ist, dass sich die Signirungsgemischtheit auf die zugehörige, um den rechten Winkel herum gebrochene Linie beziehe. Die ungemischte Signirung entsteht nur dadurch, dass in der gebrochen signirten Linie eines der Stücke gleich Null wird. Es ist schliesslich also nur eine bestimmte Art der Ideenassociation, vermöge deren man bei Axenlage des Radiusvector an ausschliessliche Theilsignirung, bei schiefwinkligen Lagen aber an gemischte Signirung denken mag. Wollten wir schon hier den Factor $cos\,\varphi \pm sin\,\varphi$ selbst als eine Gesammtsignirung, also als ein Vorzeichen der Grösse ϱ auffassen, wovon wir jedoch erst das Analogon im imaginären Fall als wesentlich und erforderlich nachweisen werden, so liesse sich sagen, dass die eine partielle Signirung durch eine Abfolge von Gemischtheiten in die andere übergehe, während ϱ den Quadranten durchläuft.

7. Betrachten wir nun ein imaginäres Seitenstück zu dem reellen veränderlichen Kreis, den wir eben behandelt haben. Ein solches Seitenstück, welches wiederum Kreisfunctionen enthält, wird durch unser System der signitiven Constructionen möglich, indem wir von einer reellen veränderlichen Hyperbel $a^2 - b^2 = \varrho^2$ ausgehen. Alsdann ist der Zwischenkreis mit imaginärer Ordinate $b = b' \sqrt{-1}$ das erforderliche Schema, durch welches die Bestandtheile desjenigen Binoms $\varrho\,(cos\,\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi)$, welches der Gleichung $a^2 - b^2 = a^2 + b'^2 = \varrho^2$ entspricht, bildlich dargestellt werden. Wir haben es hier wieder mit unserm ursprünglichen Hyperbel- und Kreisschema zu thun, jedoch mit zwei Abänderungen des Sinnes. Erstens ist hier keine Construction einer bestimmten Hyperbel und eines bestimmten Kreises, sondern es sind alle Hyperbeln und Kreise in Frage, welche mit variirendem ϱ die Ebene erfüllen. Zweitens haben Hyperbel und Kreis hier das Hauptinteresse nicht als Curven, die der Gleichung $a^2 - b^2 = \varrho^2$ entsprechen, sondern als Merkzeichen für die zusammengehörigen Werthe einer analytischen Bivariabeln. Sie sind, auch

in der rationellen Gestalt und in dem verstandesmässigen, von allen Erdichtungen der mathematischen Alchymie befreiten Sinne, den sie durch unser System erhalten haben, in Beziehung auf das analytische Binom keine eigentliche Construction des Gesammtwerthes, sondern nur eine Darstellung der Bestandtheile in einem entsprechenden geometrischen Bilde. Von uns sind aber die Bestandtheile nunmehr wirklich construirt und nicht blos neu für die Hyperbel, welche dem analogen Binom mit hyperbolischen Functionen, nämlich $\varrho(ch\,\psi \pm sh\,\psi)$ entspricht, als reelles Zubehör eingeführt, sondern auch in Beziehung auf das Imaginäre als ein nothwendiges Ergebniss des Ueberganges abgeleitet. Der Kreis unter dem Gesichtspunkt der Gleichung $a^2 - b^2 = \varrho^2$, d. h. als Fortsetzung einer Hyperbel oder, was dasselbe heisst, als imaginative Hyperbel, nimmt eben in eigentlichster und exactester Construction eine imaginäre Ordinate an. Dieser Sachverhalt, wie die ganze einheitliche Vereinigung von Kreis und Hyperbel aus dem Gesichtspunkt einer einzigen Gleichung, ist erst mit unserer Imaginärtheorie sichtbar geworden; ja von einer Hyperbel neben dem Kreise ist bei den imaginären Graphikern nie die Rede gewesen.

Der Gaussische Kreis stand von vornherein isolirt da und ist dies bei seinem Urheber selbst stets, d. h. länger als ein halbes Jahrhundert, geblieben. Die Nachtreter konnten aber erst recht nicht zu etwas Anderm kommen, zumal da sich unter ihren Händen die Gaussische blosse Graphik noch abstracter verflüchtigte, indem man vorherrschend den Kreis, welcher der modulirten Form des Binoms entsprach, zur Seite liess und unmittelbar $a + b\sqrt{-1}$ in ein Abscissen- und Ordinatenbild übersetzte, womit übrigens auch Gauss selbst inzwischen vorangegangen war. So entschwand jede Chance, an den instinctiven Ursprung der Sache erinnert zu werden. Gauss hatte von diesem nie etwas gemerkt und daher auch nicht einmal sich selbst, nämlich seine eigne, mechanisch äusserliche Procedur der Verbildlichung verstanden. Die Lücke aus diesem Mangel an Verständniss hat er durch mathematische Erdichtung, Metaphysik und Mystik ausgefüllt, die für einen in dieser Richtung gar sehr getrübten Kopf, zumal bei dessen vorwiegender Beschäftigung mit der Kreistheilung, nahelagen. Die höhern Einheitswurzeln und die zugehörige Kreistheilung waren von Anfang an das, worin Gauss, indem er der allgemeinen Gleichungsmethode von

Lagrange stillschweigend nacharbeitete, einen gewissen, wenn auch nicht zu überschätzenden Erfolg gehabt hat.

Nun construirt sich der Theilungspunkt eines Kreises durch die reellen Bestandtheile des imaginären Binoms $\varrho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)$, nämlich durch das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten ϱ, $\varrho\cos\varphi$ und $\varrho\sin\varphi$, wobei φ für den ersten Theilungspunkt den Werth $\frac{2\pi}{n}$ hat, wenn n die Anzahl der Theile bezeichnet. Der Umstand, dass diese Werthe nicht transcendent, sondern algebraisch gegeben sein müssen, dass sich also jenes Binom, welches die Wurzel der zweigliedrigen Gleichung $x^n - \varrho^n = 0$ ist, in ein rein algebraisches verwandeln muss, in welchem die algebraischen Werthe für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ enthalten sind, ist für die Entstehung der imaginären Graphik Nebensache. Genug, dass für Gauss der Kreistheilungspunkt durch eine verworrene Ideenassociation das Vorbild für den sogenannten complexen Punkt wurde, indem sich der Construction der reellen Bestandtheile das analytische Binom sammt seinem Factor $\sqrt{-1}$ unterschob. Um die Befremdlichkeit dieses imaginären Zusatzes angeblich zu erklären, wurde nachträglich das Curiosum von der mittleren Proportionale, welches übrigens nicht neu war, von Gauss wieder wie frisch hinzugedichtet. Zugleich rückten die instinctiven Veranlassungen und hiemit der unverdorbene natürliche Sinn, welcher der ursprünglichen unwillkürlichen Verbildlichung der reellen Bestandtheile von einem klaren Kopfe hätte beigelegt werden können, völlig in die Ferne. Bei dem Versuch, abstract zu werden, machte Gauss aus der Sache dann vollends jene Rüben- und Kohlkopfsgraphik, die wir von vornherein gekennzeichnet haben, und deren Verbrämung mit imaginärem Gespensterglauben und dem zugehörigen Glauben an eine construirte mittlere Proportionale in einem auch sonst so abergläubisch und unrationell angelegten und ausgebildeten Geiste, wie dem Gaussischen, sobald man diese Umstände erst kennt, nicht mehr befremden darf.

Wir von unserm Standpunkt legen überhaupt auf die ganze Art Verbildlichung, selbst nachdem sie vermittelst unserer Imaginärtheorie rationalisirt und nach der Seite des Reellen vervollständigt ist, keinen sonderlichen Werth. Wir betrachten sie sogar wesentlich nur als eine Krücke für Lahmheit im rein analytischen Gebiet, möge es sich nun um Hervorbringung oder um blosses Verständniss handeln. Mit letzterem ist es allerdings im

mathematischen Publicum jeglicher Schicht jetzt häufig so bestellt, dass man bei dem heutigen, gegen manche frühere Epochen herabgekommenen Stande der analytischen Abstractionsfähigkeit bisweilen nicht umhin kann, im Hinblick auf die fragliche Lahmheit gelegentlich auch zu zeigen, wie mit der Krücke weiterzukommen sei.

Beispielsweise bringt es unser analytisches System mit sich, den Modulus des imaginär gemischten Binoms als die eigentliche Grösse, den Factor $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ aber als ein zusammengesetztes Vorzeichen zu betrachten. Ist $\frac{2\pi}{\varphi}$ eine ganze Zahl, so haben wir unsern gewohnten Specialfall der ganzgradigen Einheitswurzeln, und diese haben uns stets als Vorsetzungen im Sinne von Vorzeichen gegolten. Verändert sich aber φ stetig, so nimmt $\frac{2\pi}{\varphi}$ auch alle Zwischenwerthe an, die nicht ganze Zahlen sind. Dies hindert aber nicht, die Analogie mit den ganzgradigen Einheitswurzeln streng festzuhalten, wonach denn der Ausdruck $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ unter allen Umständen in seinem ganzen Laufe eine Einheitswurzel oder, wie man es auch ansehen kann, eine Einheitspotenz vorstellt. Setzt man $\frac{2\pi}{\varphi} = \nu$, so ist jener Ausdruck eine νte Einheitswurzel und zwar diejenige fundamentale, welche, wenn ν eine ganze Zahl ist, unter den primitiven Einheitswurzeln dadurch eine besondere Stellung einnimmt, dass ihr Argument am kleinsten ist. Die Gesammtheit aller νten Einheitswurzeln wird nämlich durch $\cos\frac{2k\pi}{\nu} + \sqrt{-1}$ $\sin\frac{2k\pi}{\nu}$ repräsentirt, und diejenige, für die hiebei $k = 1$ ist, kann als eine besonders hervorzuhebende angesehen werden, nämlich als die erste, wenn die Einheitswurzeln nach der Reihenfolge der ganzen Zahlen k geordnet werden. Man kann also den Ausdruck $\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi$ als die erste unter den νten Einheitswurzeln ansehen und ihn durch $1^{\frac{1}{\nu}}$ oder $1^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ bezeichnen, wenn man festsetzt, dass unter dieser Einheitspotenz nur derjenige ihrer Werthe verstanden werden soll, dessen Argument gleich $\frac{2\pi}{\nu}$ ist, grade so wie man unter dem Werthe einer Ex-

ponentialfunction mit reellem Argument nur ihren positiv reellen Werth, der zugleich der Modulus aller andern Werthe ist, zu verstehen pflegt.

Demgemäss kann kein Zweifel obwalten, wie das neue Vorzeichen $\sqrt[\nu]{1} = 1^{\frac{1}{\nu}} = j(\nu)$ zu verstehen sei. Es ist das erste Beispiel eines veränderlichen Vorzeichens; denn mit der stetigen Veränderung von ν, die von derjenigen von φ abhängig ist, durchläuft es ebenfalls stetig alle Werthe, vermöge deren es den Cyklus von $1 + 0$ bis $0 + \sqrt{-1}$, von da bis $-1 + 0$, dann bis $0 - \sqrt{-1}$ und schliesslich bis wieder $1 + 0$ zurücklegt, um weiter mit wachsendem Argument die alten Werthe von Neuem zu reproduciren. Der gemeine und einfache Uebergang von + zu — oder, mit andern Worten, der gewöhnliche bekannte Zeichenwechsel, habe er nun am Reellen oder am Imaginären statt, ist der einfache Grundfall und hat zur unumgänglichen Bedingung, dass die mit dem Vorzeichen behaftete Grösse dabei Null werde. Unser zusammengesetztes Vorzeichen ist eine Mischung einfacher Signirungen und zwar eine Mischung nach einem quantitativ verschieden bestimmbaren und daher auch stetig veränderungsfähigen Verhältniss. Die positiv und die negativ reelle Signirung ergeben mit der positiv und der negativ imaginären vier Combinationen, und innerhalb der jeder Combination entsprechenden Veränderungsphase kommt es jedesmal auf die Mischungsantheile der Elementarsignirungen an. Die Gesammtsignirung kann ihre sämmtlichen Werthe bis wieder zu ihrem Ausgangswerth nur durchmessen, wenn jeder Bestandtheil zweimal durch Null und ausserdem zweimal durch einen extremen Werth, nämlich durch ein Maximum und durch ein Minimum, geht. Das Gelangen von + zu — ist also hier möglich, ohne dass die Gesammtgrösse Null wird; denn das Gesammtvorzeichen wird nie Null und die Hauptgrösse ϱ an sich braucht es nicht zu werden.

Der gekennzeichnete Vorzeichenlauf steht offenbar analytisch fest, gleichviel ob man sich von ihm ein geometrisches Bild mache oder nicht; denn die Veränderungen zwischen $+1$ und -1 oder $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ werden sich doch wohl noch abstracter denken lassen, als vermittelst der vier Quadranten eines Kreises. Die Verminderung von 1 bis zu 0 und dann weiter bis zu -1 ist in analytisch anschaulicher Vorstellung an

nichts weiter gebunden, als an das Setzen einer Reihe von Zwischenbrüchen, die man unbeschränkt interpoliren kann. Diese unendliche Interpolationsfähigkeit ist der Sinn der analytischen Stetigkeit oder vielmehr das Stetigkeitssurrogat im Analytischen; denn für abstracte Zahlenwerthe giebt es keine eigentliche Stetigkeit, sondern nur unbeschränkte Einschaltbarkeit. Auf analoge Weise verhält es sich mit den Bruchvielfachen von $\sqrt{-1}$; man kann also die zu demselben Werth zurückkehrende Veränderungsreihe von $\varepsilon + \varepsilon' \sqrt{-1}$, in welcher ε absolut immer zwischen 0 und 1 liegt und $\varepsilon' = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ sein muss, offenbar auf rein arithmetische Weise nicht blos herstellen, sondern auch vorstellen. Man wird dabei an nichts weiter als an Zahlencolonnen zu denken brauchen, hat aber nicht grade nöthig, die eine derselben horizontal und die andere vertical zu nehmen, was bereits ein Schema wäre, welches in die durch den Kreis vertretene analytische Tabellistik der oben gekennzeichneten Art einlenkte. Auch mag es immerhin bequem sein, den cyklischen Lauf der Werthe am Kreise gleichsam zu tabellisiren; aber für die reine Analysis hat die specielle Wahl grade dieses schematischen Mittels nicht mehr Bedeutung als der einfachere Fall, in welchem man gelegentlich den Lauf einer Grösse zwischen $+\infty$ und $-\infty$ unter dem Bilde einer graden Linie denkt, die sich von einem Punkte nach beiden Seiten unbeschränkt ausdehnt. In Wahrheit und völlig abstract braucht man auch hier nichts, als die absolute Zahlenreihe mit unbeschränkter Einschaltbarkeit und deren Fortsetzung in das Negative durch weiteres Abziehen von Einheiten oder Einheitstheilen. Ja diese Fortsetzung ist gewissermaassen schon ein schiefes Bild, bei welchem die Verleitung naheliegt, die negativen Zahlen fälschlich verdinglicht, d. h. als eigne Wesen hypostasirt zu denken und so in eine Art mathematischen Gespensterglaubens zu gerathen. In unserm System kennen wir nichts als die absolute Zahlenreihe mit dem Gedanken unbeschränkter Einschaltungsmöglichkeit und dazu die Signirungen aller Grade, die von Plus und Minus an bis zu den zusammengesetzten, ja veränderlichen Vorsetzungen hin vor die einzelnen Zahlengrössen treten mögen, ohne dass deswegen ein besonderer geometrischer Schematismus nöthig wäre, ja für die höher gesteigerte Zahl der Werthigkeiten auch nur beschafft werden könnte.

8. Wo die Abstractionskraft der reinen Analysis walten kann und sich demgemäss alle Vermittlungen in allgemeinen Grössenzeichen und Rechnungszeichen zu vollziehen haben, ist, wie gesagt, jegliche geometrische Schematisirung, insbesondere aber die übliche imaginär graphische, mindestens eine Ungehörigkeit. Der höhere Grad von Wissenschaftlichkeit wird durch den höhern Grad von Abstraction vertreten, und so ist eine Analysis nicht viel werth, die es nicht einmal versteht, auf ihrer eignen Höhe fortzuschreiten, sondern statt dessen gleichsam einen geometrischen Fuss hinkend nachschleppt. Für die Analysis selbst brauchen wir also die signitive Construction des Imaginären nicht. Um so wichtiger wird nun aber die Frage, was diese Construction für die Geometrie selbst leisten könne. Auch kann eine ähnliche Frage nicht blos bezüglich der geometrischen Construction, sondern auch bezüglich jeder sachlichen Darstellung signitiver Art aufgeworfen werden. Hiebei wird eine Antwort für die Geometrie auch eine Antwort für alles Uebrige.

Die signitiven Constructionen liefern die angeschlossenen Gebilde oder, allgemeiner geredet, sie ermöglichen es, dass analytische Nachbarschaften der Formeln als engste geometrische Verwandtschaften hervortreten, und dass umgekehrt diese sachlichen Verwandtschaften auf ihren abstracten analytischen Ausdruck gebracht werden. Nämlich erst durch die signitiven Constructionen erkennt man, dass auch in der unmittelbaren und natürlichen Geometrie, die nicht erst als willkürlich geometrisirte Analysis zur Welt gekommen ist, die Gelegenheiten vorhanden sind, vermittelst der imaginären Beziehungen, d. h. vermittelst der Definition der Beziehungen durch das Unmögliche, zu einheitlichen Gesichtspunkten zu gelangen und verschiedene Gebilde unter eine und dieselbe, nur signitiv sich abändernde Rechnungsregel zu bringen. Wo irgend eine Construction bei sich völlig gleichbleibender Regel unmöglich wird, kann die Unmöglichkeit als solche selber vor Augen geführt, d. h. construirt werden, indem man die zu einer möglichen Construction erforderliche Abänderung eintreten lässt, zugleich aber durch die signitive Vorbemerkung zu dem möglich gemachten Gebilde anzeigt, dass dieses nicht an sich, also z. B. nicht als absolute Linie, sondern nur zusammen mit dem imaginären Vorzeichen die Bedingungen erfülle. Die Fortsetzung der Constructionen in das Gebiet der bedingten Unmöglichkeiten ist aber unter Umständen eine nicht

unwichtige Angelegenheit. Nicht blos die Vermeidung von Unterbrechungen und die Einschaltung von Zwischengebilden, die sonst in jeder Beziehung unmöglich geblieben und nicht einmal als Unmöglichkeiten näher vorstellbar geworden wären, ist ein erheblicher Vortheil, sondern auch die Aufschlüsse, die sich an die Thatsache eines blos signitiven Unterschiedes der geometrischen Gebilde knüpfen, sind von Werth. Zwei geometrische Gebilde sind in Allem einerlei, aber nur signitiv unterschieden, — ein solcher Ausspruch liefert eine Charakteristik, wie sie zugleich abstracter und intimer nicht beschafft werden kann.

Auch durch das Unmögliche werden Beziehungen bestimmt und definirt. Die unmöglichen Grössen sind nicht an sich unmöglich, d. h. es ist nicht das absolut Quantitative an ihnen, sondern die verlangte Beziehung desselben in einem gegebenen Rechnungszusammenhang das Unmögliche. Diese Unmöglichkeit der Beziehung wird nun in äusserster Abstraction auf $\sqrt{-1}$ oder noch besser auf $\sqrt{-}$ reducirt und gilt in der Geometrie, sowie in jeder sachlichen Anwendung ebensogut und ebenso unmittelbar wie zwischen blossen Zahlen oder allgemeinen, in der Benennung noch unbestimmt gelassenen Grössen. Es wäre daher komisch, in der Geometrie, sobald man einmal die Rechnungsbeziehungen der Längen und sonstigen geometrischen Grössen feststellt, blos direct die Möglichkeiten betrachten, nicht aber auch indirect die Schranken der Möglichkeiten zur näheren Bestimmung der Verhältnisse benützen zu wollen. Das Eine ist so nothwendig wie das Andere; denn die nähere Einsicht in den quantitativen Lauf der Unmöglichkeiten lehrt selbst etwas über die Möglichkeiten. Alles Wissen wird nur dadurch am vollkommensten, dass es auch in deutlicher Weise die Schranken feststellt, die das Mögliche von dem Absurden trennen.

Hienach kann es keine Frage mehr sein, dass eine analytische Geometrie nur dann als vollkommen anzusehen sei, wenn sie in unserm rationellen Sinne die imaginären Beziehungen der Gebilde oder, kurz gesagt, die imaginären und die imaginativen Constructionen miteinschliesst. Gegen Ausspinnungen der vielerlei Möglichkeiten, die sich hiebei ergeben, ist aber von vornherein Einspruch zu thun. Es ist genug, dass für den Fall eines wirklichen Bedürfnisses die erforderlichen Constructionsgrundsätze zur Verfügung stehen. Die analytische Geometrie

ist ohnedies schon mit Willkürlichkeiten, Spielereien und Hohlheiten überladen; es wäre nicht angenehm, den unschönen Tand auch noch auf Grund des Imaginären vermehrt zu sehen. Das Analytische an der Geometrie ist eine Methode, aber nicht selbst eine Wissenschaft. Analytische Geometrie ist daher vor Allem Geometrie, aber zur analytischen Abstraction erhobene Geometrie. Dagegen ist sie nicht geometrisirte Analysis oder soll dies vielmehr nicht sein. Die Untersuchung geometrisch interessirender Verhältnisse ist der Zweck und die allgemeine Grössenanalysis das Mittel.

Dieser Zweck erfordert nun freilich zum Theil auch den umgekehrten Weg als Mittel. Erst abstrahirt man die rein analytische Beziehung und dann macht man wieder diese zum Ausgangspunkt, um für alle Consequenzen derselben die dazu denkbaren geometrischen Verhältnisse zu entwerfen. In letzterer Beziehung findet allerdings eine Geometrisirung des abstract Analytischen statt, aber wohlgemerkt, in einer gesunden Geometrie nur insoweit, als es der Hauptzweck, die geometrische Untersuchung selbst, mitsichbringt. Legt man sich die hiemit angedeuteten Beschränkungen auf, so ist keine Gefahr, dass die analytische Geometrie durch die Einführung unseres rationellen Systems des Imaginären etwa noch überladener, unverdaulicher und unnützer werde, als sie es in der Gestalt einer besondern Disciplin jetzt schon ist. Im Gegentheil muss sich grade durch unsere Wendungen herausstellen, wie sinnleer das Kramen in ihr gerathen und zu was sie unter plumpen und müssigen Händen verdrechselt ist.

Zunächst sei grundsätzlich hervorgehoben, wie in geometrischer Hinsicht nur die abhängige Coordinate rein oder gemischt imaginär werden oder, anders ausgedrückt, die Biform annehmen könne. Ist $f(x, y) = 0$ eine Gleichung, die man in das Geometrische, also etwa in eine ebene Curve übersetzt, so kann nur eine der beiden Grössen x oder y in Beziehung auf die andere eine Biquantität werden; denn setzt man x reell, so kann der Gleichungszusammenhang höchstens y zu einer Bigrösse machen. Der Fall einer in unserm Sinne imaginativ zu construirenden Coordinate kann daher für geometrische Zwecke unter den gewöhnlichen Voraussetzungen der analytischen Geometrie nicht eintreten. Auch haben wir ihn thatsächlich für die Uebersetzung analytischer Verhältnisse in geometrische Schemata auf-

gestellt. Um überhaupt eine relativ unabhängige Abscisse als Bigrösse zu erhalten, müssten wir besondere Anordnungen indirecter Coordinaten erdenken, also etwa die abhängige Ordinate einer Curve mit dem Lauf ihrer Biwerthe zur Abscisse für die Construction einer andern Curve machen, in welcher letzteren sich dann die neue Ordinate mittelbar auf die ursprüngliche Abscisse der ersten Curve bezöge. Nach Ausführungen solcher Künste steht jedoch unser Sinn nicht; wir haben mit den Doppelcoordinaten für die Hyperbel ein genügendes und natürliches Beispiel von gleichzeitig vorhandenen Biabscissen und Biordinaten gefunden. In diesem Beispiel war aber für imaginative Construction von Coordinaten einfach deswegen keine Gelegenheit, weil die hier fraglichen Functionen der Bigrössen keine Quadrate von $\sqrt{-1}$ ergeben konnten.

Demgemäss kommen wir in der analytischen Geometrie mit unserer schon früher festgestellten Constructionsart der binomisch imaginär werdenden Wurzeln aus. Es bleibt also nur wesentlich, dass die entworfene Gesammtstrecke als eine analytisch biforme Länge das erforderliche Maass der beiderlei Bestandtheile enthalte, gleichviel in welcher Vertheilung und Abfolge. Die Willkürlichkeit dieses letzteren Punktes gestattet in jedem besondern Fall nähere Bestimmung durch zweckmässige Wahl; doch Derartiges ist Nebensache und lehrt übrigens nur noch, wie die Bigrössen nicht immer die Nothwendigkeit mitsichbringen, grade ein individuell bestimmtes Stück der repräsentirenden Linie imaginär zu setzen.

Unter allen Umständen ist es von einigem Interesse, sich darüber klar zu werden, wie neben den reellen die binomisch imaginären Wurzeln von Curvengleichungen construirt werden müssten, falls man sich auf dieses der Geometrie nicht natürliche, sondern nur analytisch künstlich besaamte Feld der mehr als zweigradigen Verhältnisse überhaupt einlassen wollte. Der erste und einfachste Fall, in welchem überhaupt neben reellen auch biforme Wurzeln möglich sind, ist derjenige dritten Grades; denn da die imaginären Wurzeln immer nur paarweise vorhanden sein können, so ist ein einfacherer Fall nicht möglich. An ihm muss sich also auch vorbildlich alles Uebrige entscheiden. Unter den Fällen dritten Grades ist der einfachste nun wieder derjenige, in welchem man die Kuben der beiden Coordinaten summirt, also derjenige der Gleichung $x^3 + y^3 = r^3$. Weil diese Gleichung

durch willkürliche analytische Combination analog der eigentlichen Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ nachgebildet ist, so spricht man nicht ganz ohne Sinn von einem Kreise dritten Grades, so uneigentlich auch dieser Ausdruck bezüglich der geometrischen Gestalt gerathen ist. Doch um den Namen wird man nicht markten, wo schon die ganze Sache selbst nur Trödel ist, der sich auf dem Stroh der analytischen Geometrie breitmacht, nachdem die Körner zweiten Grades bereits ausgedroschen sind. Wer uns von unsern eignen Grundsätzen her einwenden wollte, dass der sogenannte Kreis dritten Grades ein künstliches Gebilde sei, dem erwidern wir nun, dass dies im Allgemeinen alle Curven und Flächen dritten Grades sind, mag mit dieser Spreu nun analytisch oder anscheinend direct geometrisch, also auch etwa in der projectiven Spielart hantirt werden.

9. Vor dem Eingehen auf das Imaginäre sei noch hervorgehoben, dass der sogenannte Kreis dritten Grades auch vom Standpunkt unserer Theorie des Negativen eine interessante Lehre ertheilen kann. Wird nämlich $x > r$, so wird y negativ, und es entsteht als Anschlussgebilde eine Hyperbel dritten Grades, die auch unmittelbar durch die Gleichung $x^3 - y^3 = r^3$ gewonnen würde. Da die analytischen Geometer schon von vornherein die Einführung negativer Coordinaten auch ohne besondere Motivirung überall für selbstverständlich halten, so verschmilzt oder confundirt sich ihnen vielmehr der Kreis dritten Grades mit der zugehörigen Hyperbel dritten Grades. Wir aber, die wir streng am Kreisanalogon festhalten, erkennen auch die Analogie mit der gleichaxigen Hyperbel zweiten Grades und namentlich diejenige Seite dieser Analogie, vermöge deren die Fortsetzung in das Negative ein genaues Gegenstück der Fortsetzung in das Imaginäre ist. In beiden Fällen nämlich wird die Ordinate y nach Maassgabe des unmittelbaren und engern Sinnes der gegebenen Gleichung als absolute Grösse eine Unmöglichkeit und es bleiben nur signirte Werthe als Lösungen übrig. Die signitiven Lösungen bedeuten aber auch signitive Constructionen, und der Unterschied der Construction des Negativen von der des Imaginären besteht nur darin, dass bei dem Negativen durch die Auswahl einer der beiden möglichen Richtungen noch etwas mitconstruirt werden kann, was bei einer rein signitiven Construction nicht mitconstruirt zu werden braucht. Dem signitiven Sinn der Sache würde es nämlich auch genügen, wenn man das negative

y oberhalb statt unterhalb der Abscisse errichtete; denn die Beigesellung des Minuszeichens macht die Liniengrösse zu einer signirten und der Gleichung genügenden, auch wenn sie nicht die sonst dem Negativen entsprechende und in einem allgemeinen Rechnungszusammenhang ersten Grades begründete Lagebeziehung gegen die positiven Ordinaten hat. So lehrt denn der Kreis dritten Grades, obwohl er nichts als eine geometrisirte Function ist, doch auch etwas zur Theorie des Negativen, und es wird sich auch gleich zeigen, wie er zur Beleuchtung der Imaginärtheorie nicht blos gebraucht werden könne, sondern als leicht übersehbarer Typus sogar nothwendig sei.

Die Gleichung des Kreises dritten Grades hat drei Wurzeln, nämlich $y_1 = \sqrt[3]{r^3 - x^3}$, $y_2 = j\sqrt[3]{r^3 - x^3}$ und $y_3 = j^2\sqrt[3]{r^3 - x^3}$. Diesen drei Wurzeln entsprechen zunächst drei Zweige der Curve, ein reeller und zwei imaginäre. Letztere beiden sind derart zu construiren, dass man die reellen und die imaginären Bestandtheile auf derselben Ordinatenlinie aufträgt. Alsdann ist jeder der beiden Zweige, an sich betrachtet, eine reelle Curve dritten Grades, und die beiden Gleichungen, von denen sie abhängen, sind unter sich und von der Gleichung des reellen Zweiges verschieden. Wollte man jedoch diese drei Curven durch Multiplication der Gleichungen für die reell genommenen Werthe ihrer Ordinaten unter einen Gesichtspunkt bringen, so erhielte man eine Gleichung neunten Grades. Es ist überdies bei jeder Gleichung dritten Grades, die zwei imaginäre Wurzeln hat, eine Nothwendigkeit, dass diejenige Gleichung, welche sowohl die reelle Wurzel jener Gleichung als die reellen Bestandtheilssummen der beiden imaginären zu Wurzeln haben soll, vom neunten Grade sei. Aus diesem Grunde ist auch im Specialfall, nämlich bei solchen Curven, die wie der Kreis dritten Grades durch reine kubische Gleichungen bestimmt werden, eine Gleichung neunten Grades erforderlich, um die drei Zweige als drei reelle Wurzeln darzustellen.

Aus dem eben Dargelegten ersieht man, wie sich unter Umständen für die analytische Geometrie auch durch die Construction der imaginären Zweige einiger Vortheil ergeben könne. Es ist nämlich bisweilen nicht unnütz, eine zusammengehörige und eng verwandte Gruppe von Gebilden, die nach dem System der ausschliesslich reellen Beziehungen eine Gleichung neunten Grades

erfordern würde, mit einer dritten Grades zu beherrschen. Ja noch mehr! Versteht man die Gleichung dritten Grades mit der zugehörigen Curve nicht in der engern Sinnesbegrenzung, in der wir sie betrachtet haben, so hat man behufs voller Allgemeinheit auch drei Abscissenwerthe von x zu veranschlagen, deren jeder mit drei Ordinatenwerthen zu combiniren ist. Dies ergiebt neun Zweige und jeder für sich stellt aus dem reellen Gesichtspunkt eine eigne, von den übrigen verschiedene Beziehung dritten Grades vor, so dass die Vereinigung aller dieser reell genommenen Beziehungen eine Gleichung 27. Grades erfordert. Statt dieser hochgradigen Gleichung genügt nun eine vom dritten Grade, sobald man das System der imaginär signitiven Constructionen zu Grunde legt. Durch letzteres allein vermeidet man auch die nicht beabsichtigten Nebengebilde, die noch in den Gleichungen 9. oder 27. Grades angelegt sind. Hienach ist die signitive Construction imaginärer Zweige oder vielmehr die imaginär signitive Charakteristik gewisser Gebilde sogar das einzige Mittel, eine gewisse Gruppe von räumlichen Zügen als Einheit zusammenzufassen, d. h. unter eine Gleichung zu bringen, die an sich und geometrisch nicht Mehr und nicht Minder enthält, als was zusammengefasst werden soll. Die Ausdehnung solcher Ueberlegungen auf höhere Grade und auch auf Flächen ist leicht; vergessen wir jedoch nicht, dass wir uns bereits mit dem reellen Kreis dritten Grades in einem Gebiet befinden, in welchem nicht mehr echte Geometrie, sondern nur Scheingeometrie, d. h. willkürlich geometrisirte Analysis getrieben wird.

Nach Allem gehören die imaginären Ausdehnungen und zwar auch einschliesslich der sich natürlich ergebenden biformen Ausdehnungsgrössen in die echte Geometrie, wie sie für Curven und Flächen wesentlich durch die Gebilde zweiten Grades und durch deren Combinationen zu höhern Graden repräsentirt wird. Der Kern ist daher das rein Imaginäre, während die gemischten Linien nur ausnahmsweise geometrisch berechtigt sind. Der Regel nach ist aber das Einführen der biformen Längen zu verwerfen, nämlich wo diese auf dem Boden blosser, aber willkürlich und spielerisch geometrisirter Analysis entstehen. In diesem allgemeinen Fall sind ihre Bestandtheile auch vertauschbar, in Stücke trennbar und auf der Gesammtlinie verlegbar, während in den sich natürlich ergebenden Fällen der echten Geometrie angegeben werden kann, welches Stück der Linie reell und welches

imaginär zu setzen sei. Handelte es sich aber blos um räumliche Schematisirung analytischer Functionen, also um geometristisch zugerichtete Analysis, so mag man sogar bivariable Abscissen voraussetzen. Wird dann die Ordinate als beliebige Function einer solchen willkürlich eingeführten bivariabeln Abscisse ohne Rücksicht auf Imaginatives, also kurzweg in ihren ungleichartigen Bestandtheilen construirt, so ergiebt die Bivariation die Erfüllung der Ebene mit einer unbeschränkten Menge von Curven, die sich stetig aneinanderschliessen. Sonderlich nütze sind aber derartige analytische Geometristereien nicht einmal für die Analysis selbst, der es weit besser ansteht, auf den eignen Beinen und mit den eignen Mitteln fortzukommen, anstatt sich geometrisches Stelzenwerk unterschieben zu lassen.

Uebrigens sei noch bemerkt, dass eine Geometrisirung, d. h. räumlich schematische Darstellung beliebiger analytischer Functionen in der Wahl der Darstellungsart sich ebensowenig zu binden braucht, wie Analysis und Algebra selbst. In letzteren kann man die zusammengesetzten Vorzeichen, also namentlich die Einheitswurzeln, in ihre Bestandtheile auflösen oder sie unaufgelöst als individuelle Signirungen behandeln. Nun steht nichts entgegen, letzteres auch in den Geometrisirungen zu thun. Alsdann unterscheiden sich die biwerthigen Linien von den reellen nur durch die Bisignirung, also beispielsweise bei dem sogenannten Kreise dritten Grades durch eine der dritten Einheitswurzeln, die man der betreffenden Ordinate beischreibt, wie sonst ein einfaches Plus oder Minus. Indem auch noch dieses Verfahren zu den übrigen hinzutritt, ist die vollständigste Uebereinstimmung der Analysis mit den Entwürfen willkürlich componirter Gegenbilder erreicht, und die Freiheit im Hantiren mit solchen Dingen ist ebenfalls so vollständig, dass sie an sich nichts zu wünschen übrig lässt. Wohl aber bleibt ihr gegenüber zu wünschen, dass man von ihr den rechten, d. h. der Regel nach so gut wie gar keinen Gebrauch mache; denn nur in den angedeuteten besondern Begrenzungen wirklich sachlicher Geometrie haben die aus analytischen Functionen heraus entworfenen räumlichen Compositionen einen wissenschaftlich ernsten Sinn und Zweck. Wie spärlich aber das Feld, auf welchem Zeichen und Werthigkeiten geometrisch in Frage kommen, bisher besäet worden, und wie verworren obenein der spärliche Anbau ausgefallen, dafür kann die Untersuchung und unsere Erweiterung jenes Rudiments von

Wissenschaft, welches sich trotz seiner bisherigen Kläglichkeit dreist Geometrie der Lage genannt hat, genugsam zeugen.

10. Die gewöhnliche Frage nach der Bedeutung der analytischen Zeichen für die geometrische Lage beruht bereits auf einer schiefen Fragestellung. Rein, analytische Bestimmungen haben, wie in der ersten Nummer dieses Capitels hervorgehoben wurde, an sich gar keinen bestimmten geometrischen Sinn und können daher für das Verschiedenartigste gelten. Soll jene Frage, welche im Grunde nur überhaupt ein Verhältniss der Vorzeichen zu den Lagen im Sinne hat, natürlich und rationell ausfallen, so muss sie gradezu umgekehrt werden. Was bringen die örtlich verschiedenen Lagen, bei einer gegebenen Regel der Construction und einem entsprechenden Gesetz der Uebertragung der Raumverhältnisse in das Analytische, an Consequenzen für die Gestaltung der Vorzeichen mit sich? Dies ist nicht nur die natürliche, sondern auch zugleich diejenige Gestalt der Frage, bei welcher sich die Antwort ohne jede Nebelhaftigkeit oder gar Mystik fast von selbst ergiebt. Consequenzen für die Vorzeichen können nichts weiter sein als Nothwendigkeiten, entweder zu addiren oder zu subtrahiren. Der Gegenstand, um den es sich handelt, lässt sich also in der allereinfachsten Weise dahin formuliren, dass zuzusehen ist, bei welchen Lagen oder Richtungen gewisse Strecken zu addiren, andere aber zu subtrahiren sind. In dem Verfahren, vermöge dessen man den analytischen Ausdruck gewinnt, werden die Operationszeichen durch Correspondenzen und Entgegengesetztheiten der Lagen in gesetzmässiger Weise mitbestimmt, und diese Abhängigkeit des Vorzeichens von der Lage ist der gesunde Kern, den ein Nebelreich unter dem Namen der Geometrie der Lage bis zur Unkenntlichkeit eingehüllt und überdies mit missrathenen oder hohlen Dingen vermischt hat.

Schon früher haben wir hervorgehoben, dass Geometrie der Lage von vornherein, also namentlich schon in den unklaren Ideen von Leibniz, mehr ein Name als eine Sache war. So ist es auch bis auf den heutigen Tag geblieben und selbst das umfangreiche Werk Carnots, welches am Anfang des Jahrhunderts erschien und gradezu den Titel Lagegeometrie führt, hat zwar vor allem Uebrigen, was sonst und bisher unter dieser Rubrik zum Vorschein gekommen ist, den Vorzug einer gewissen Verständigkeit voraus, steht aber an Gedankengehalt im umgekehrten Verhältniss zum Volumen. Die negativen Grössen sind nicht,

wie gewöhnlich, verdinglicht; eine durchgreifend freie Auffassung wird aber auch bei ihnen nicht und noch weniger bei den Imaginären erreicht. Der brauchbarste Hauptgedanke darin bleibt die elementare Nutzanwendung für die Beweise ganz gewöhnlicher Sätze der Geometrie. Hier findet sich, dass schon im Euklidischen Bereich für die Neuern die Gelegenheit geboten ist, eine Correspondenz von Lage und Vorzeichen festzustellen und zur Abkürzung mancher Beweise zu verwerthen. Häufig muss man Beweise durch solche verschiedene Fälle hindurch gesondert wiederholen, die sich beispielsweise nur dadurch unterscheiden, dass in dem einen Fall ein stumpfer Winkel an die Stelle des spitzen tritt, also etwa das Loth, das von der Spitze eines Dreiecks auf die Grundlinie gefällt werden soll, ausserhalb auf deren Verlängerung trifft. Alsdann wird sich der Unterschied im Beweisgange darauf zurückführen lassen, dass Strecken, die das eine Mal addirt werden, das andere Mal zu subtrahiren sind. Man kann sich nun von vornherein die abgeänderte Wiederholung desselben Beweisganges überall ersparen, wenn man einfürallemal die fragliche Beziehung als etwas Allgemeines formulirt und jeden Beweis so einrichtet, dass die Substitution anderer Winkelwerthe nichts weiter erfordert, als diesen gemäss die dann in Frage kommenden Strecken mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen. Man sieht, dass diese Methode darauf hinausläuft, schon in die Elementargeometrie etwas wie die signirten Sinus- und Cosinuslinien einzuführen. Auch liegt es wirklich in der Consequenz des natürlichen Denkens, bei der Veranschlagung der Winkelgrössen nicht immer verschiedene beliebige Ausgangspunkte gelten zu lassen, sondern unter Umständen, und namentlich wo es Vergleichungen gilt, für die Messung einen festen Ausgangsschenkel und eine bestimmte Zählungsrichtung zu Grunde zu legen. Unter dieser Voraussetzung kann man dann auch für die Elementargeometrie bestimmen, wie gewisse von den Winkeln abhängige Linien je nach der Winkelgrösse in der Zusammenfügung der Figurenbestandtheile bald zu addiren, bald zu subtrahiren sein werden. Es gestalten sich demgemäss nicht etwa blos die Beweise einfacher und allgemeiner, wie es Carnot hervorhob, sondern es ist auch die allgemeine Formulirung der Sätze selbst in einheitlicher Weise nur unter der, wenn auch stillschweigenden Voraussetzung möglich, dass die abgeänderte Signirung auch einen abgeänderten Sinn mitsichbringe.

Das eben Angegebene ist eine freie und vervollkommnete Darlegung dessen, was den Gehalt des Carnotschen Aperçüs bildet, und dieses Aperçü ist wiederum so ziemlich Alles, was, abgesehen von eingemischtem, mit der Hauptsache nicht wesentlich zusammenhängendem Nebeninhalt, die eigentliche Lagegeometrie des älteren Carnot erschöpft und seinen voluminösen Band vor der Beschuldigung schützt, überall nur mit Leerheiten angefüllt zu sein. In der That ist es schon immer etwas, wenn ein Buch, welches nicht grade zu den wenigen ersten Ranges gehört, innerhalb der Spreu, welche für die Bücher und insbesondere für die Monographien zweiter Ordnung die Regel ist, irgend ein gutes Körnchen enthält. Von dem, was nach Carnot im Laufe des 19. Jahrhunderts über den Gegenstand zu Markte gebracht worden ist, lässt sich das Gleiche nicht rühmen, mochte nun über Geometrie der Lage ausdrücklich unter dieser Rubrik oder unter andern Etiquetten etwas verlautbart werden. So sind die sogenannten Synthetiker oder Projectiviker der Geometrie mit ihrer Regel der Vorzeichen nie ins Klare gekommen, und es hat sich in dieser Angelegenheit nur die allgemeine Urtheilslosigkeit bestätigt, wenn man auf Schnurren oder Fadheiten, die von ganz untergeordneten Schriftstellern, wie beispielsweise von dem Verfasser eines Buchs über einen verschrobenen barycentrischen Calcül, Namens Möbius, herrührten, Gewicht zu legen sich die Miene gegeben hat. Das Facit der weiteren Entwicklung ist eine steigende Unklarheit und Nebelhaftigkeit gewesen, so dass der Ausdruck Geometrie der Lage, wie ihn Gauss für sein imaginär Senkrechtes, oder auch derjenige analysis situs, in dem Sinne, wie ihn z. B. jener Riemann gebraucht hat, bereits als Anzeichen des Unsoliden, unnatürlich Verzerrten oder mindestens Schiefgerathenen dienen kann.

11. Bereits in unserm ersten Capitel wurde der Sinn des Negativen festgestellt, und demgemäss hat sich uns auch unzweideutig und für alle Fälle ergeben, wie geometrische Ursachen und namentlich Lageverhältnisse das negative Vorzeichen unmittelbar als Beigesellung von Linien mitsichbringen können. Wir haben dargethan, was man in dieser einfachen Angelegenheit bisher schuldig geblieben war, nämlich wie aus dem einheitlichen Gesichtspunkt der Zählung von Abständen die Bestimmungsregel der Zeichen mit Nothwendigkeit folgt. Wir haben diese Nachweisung auf einer Axe durch Annahme eines doppelten Ausgangs-

punktes bewirkt, indem wir den einen Ursprung der Zählung nach Belieben weit verlegen und entweder auf der einen oder auf der andern Seite des unmittelbaren Ausgangspunktes annehmen konnten. An diese Ableitung der Negativität der Strecken und ihres nur für den Bezug auf einen Rechnungszusammenhang vorhandenen Sinnes brauchten wir hier eben nur zu erinnern. Aus ihr folgte alles Weitere, wie beispielsweise das Zeichengesetz für die trigonometrischen Linien, und wer an Ausspinnungen Gefallen findet, kann sich auch das Vergnügen machen, von den Coordinatenstrecken zu den nach Maassgabe der Coordinatenstrecken abgemessenen Flächen oder Körperräumen überzugehen. Es wird ihm alsdann an negativen Flächen und Körperräumen ebensowenig fehlen, wie an negativen Längen. Wir jedoch verzichten gern auf solches Nebenwerk; denn es dient bestenfalls nur dazu, Princip und Methode der erwähnten doppelten Ausgangspunkte zu erläutern.

Dagegen haben wir negative Flächen von einer andern, weniger unmittelbaren Herkunft kennengelernt, deren Existenz sich auf die Imaginarität gewisser Linienbestandtheile gründete. Hiezu war unsere ganze Imaginärtheorie die Vorbereitung, und für letztere haben wir hier nur noch kenntlich zu machen, was speciell auf die Lage zu beziehen ist. Zunächst bleibt der Gegensatz von Plus und Minus für das Imaginäre nothwendig derselbe wie für das Reelle. Weiter ist dann aber die Hauptfrage für die Analysis der Lage nicht die, wie sich etwa im rechtwinkligen Coordinatensystem die imaginäre Ordinate zur reellen Abscisse stelle, sondern nach der natürlichen Analogie die ganz andere, wie die imaginären Ordinaten im Verhältniss zu den reellen Ordinaten gelegen sind. Dies hat nun unser Kreis- und Hyperbelschema für den einfachsten Typus der Sache gelehrt. Dieselbe Gattung von Linien, die sich parallel blieb, war innerhalb eines bestimmten Spielraums reell und wurde innerhalb eines andern, also in einem andern geometrischen Lagebereich, nothwendig imaginär. Das ganze Verhältniss war die natürliche und engste Correlation, die es geben kann. Seiner correlativen Beschaffenheit wegen liess es sich nach Belieben umkehren, so dass man jedes der beiderlei y zum reellen oder zum imaginären machen durfte, ganz wie es zunächst gleichgültig ist, ob man die linke oder die rechte Seite der Axe zur positiven macht. Wie der Uebergang vom Positiven zum Negativen seine Gesetze hat, also

beispielsweise durch Null geschieht, grade so verhält es sich auch mit dem Lauf einer Ordinate, deren reelle Werthe in imaginäre übergehen.

Das ganze Dasein imaginärer Linien beruht darauf, dass eine Gleichung zu Grunde liegt, die in ihrer unmittelbaren Gestalt kein reelles Gebilde der betreffenden Art zulässt. Ein Gebilde kann ihr auf die vorgeschriebene Art nur genügen, wenn diejenigen Grössen, die als absolute unmöglich sind, nicht als solche, also nicht als reelle, sondern nur mit der Beigesellung des Imaginärzeichens gelten sollen. Man kann daher den allgemeinen Satz aufstellen, dass sich geometrische Imaginaritäten nur da ergeben können, wo ein Gebilde unter eine nicht unmittelbar passende Gleichung gebracht wird. Letzteres hört aber auf, eine blosse Spielerei zu sein, und wird zur Nothwendigkeit, sobald es die einheitliche Betrachtungsart mitsichbringt, zwei Gebilde unter einem und demselben Gesichtspunkt zu vereinigen. Rein analytisch angesehen, werden dabei zwei Functionen in eine einzige Functionsform verschmolzen. Hieraus begreift sich auch die Natürlichkeit des weiteren Spielraums und der zugehörigen Lagebeziehungen; denn der Lauf der veränderlichen Grösse erstreckt sich alsdann durch beide Functionsstadien, deren jedes sonst eine besondere Function vorstellte. Im Geometrischen werden es besondere Figurentheile sein, durch welche sich die Bezirke des Reellen und des Imaginären abgrenzen, und diese Figurentheile werden für sich vollständige Gebilde und ganze Curven, sobald man den einheitlichen, durch das Imaginäre vermittelten Gesichtspunkt aufgiebt.

Die grundfalsche Vorstellung von Gauss über eine allgemeine Rechtwinkligkeit des Imaginären, sei es mit sei es ohne seine Mystik, sei es mit oder ohne seine lächerliche Ableitung aus einer mittleren Proportionalität, wurde durch uns von vornherein abgethan, und jenes Gaussische Stück unechter, ja komischer Analysis der Lage wird die Mathematik fernerhin nicht mehr unsicher machen. Was aber positiv mehr bedeutet, als die Wegräumung solcher beschränkter Phantastereien und Mysticitäten, ist unser directer Aufschluss über die dritte Dimension, vor der die Gaussiker verdutzt in voller Rathlosigkeit stehen blieben, und sich mit ihres Meisters Weisheit nicht einmal auszureden, geschweige zu helfen wussten. Die Ausdehnung unseres Grundschema auf Kugel und gleichaxiges Hyperboloid in seinen beiden

Gestalten hat anschaulich gezeigt, wie hier sowohl eine als auch zugleich zwei Coordinaten imaginär werden können, und wie sich der Spielraum der Lage zwischen den reellen und den imaginären Coordinaten vertheilt. Der einfachste Fall war der des einschaligen Hyperboloids, bei welchem nur eine der Coordinaten imaginär wird, während die entsprechende innerhalb der Kugel natürlich immer parallel liegt und reell bleibt.

Im rechtwinkligen Coordinatensystem giebt es natürlich nur Rechtwinkligkeiten, mögen nun die Coordinaten reell oder imaginär sein. Durch verschiedene Abänderungen haben wir aber gezeigt, wie Reelles und Imaginäres auf einer und derselben Axe liegen können, wie sich das Imaginäre im Falle von Polarcoordinaten gestaltet und wie binomisch imaginäre Coordinaten in nicht willkürlichen Fällen wirklich geometrischer Art entstehen können. Die Analysis der Lage modificirt und complicirt sich hiebei je nach der besondern Anordnung der Verhältnisse im jedesmal fraglichen Schema und hat daher im Allgemeinen kein Interesse mehr. Was alsdann wirklich noch ein Interesse hat, reicht schon über den Begriff der blossen Lage hinaus und bezieht sich auf die ungleichartige Zusammensetzung der Figuren, also beispielsweise der Flächen, aus verschieden signirten Bestandtheilen. Oben wiesen wir einen dreifach signirten Flächenraum nach, und Aehnliches lässt sich auch leicht an Körperräumen thun. Sind wir aber erst einmal in diesem Gebiet, so erscheint die ganze frühere Analysis der Lage erst recht als ein unbedeutender und unklarer Anfang. Von dem Mangel einer strengen Ableitung des blossen Vorzeichengegensatzes gewöhnlicher Art bis zur principiellen und unwiderleglichen Regelung der complicirtesten, auf gehäuften Partialsignirungen beruhenden Vorzeichengesetze geometrischer Gebilde war eine weite Kluft zu überbrücken. Mit dieser Ueberbrückung ist aber auch die frühere Analysis der Lage, wenn man einen so anspruchsvollen Namen für die dürftigen Kleinigkeiten nunmehr überhaupt noch brauchen darf, zu einem im schlechten Sinne anfängerischen, durchaus schülerhaften und nebelhaften Vorstadium antiquirt.

Vierzehntes Capitel.

Weitere Anwendungen der neuen Mittel.

1. Die neuen Principien und Mittel, von denen wir in dieser Schrift ausgegangen oder zu denen wir im Laufe der einzelnen Darlegungen gelangt sind, lassen ausser den nächsten Verwendungen, die sich bereits thatsächlich dargeboten haben, selbstverständlich noch viele andere zu. Ihre praktische Nutzbarmachung überhaupt ist insofern ohne Schranken, als alle Anwendungen der reinen Mathematik mit dieser selbst ein gewisses Maass von Umgestaltung erfahren, sobald die verbesserten Begriffe und Methoden bis dorthin vorgeschoben werden. Wir haben bisher noch kein Wort von der Gestaltung der rationellen Mechanik gesagt; aber es wird, um nur ein Beispiel zu streifen, die ganze neue Grundlegung der Vorzeichenlehre und der Imaginärtheorie auch für sie ihre Früchte tragen. Die bekannten Verlegenheiten und Unsicherheiten, die schon den blossen Begriff negativer Kräfte bisher nebelhaft machten und gemeiniglich zu dessen Ausschliessung führten, fallen mit unserer Theorie fort. Auch die Einführung von Imaginären in die Mechanik, die bisher nichts Anderes als eine Hineintragung der entsprechenden Unverdaulichkeiten der reinen Mathematik hätte sein können, lässt sich nach unserm System in einem völlig rationellen und sachlichen Sinne bewerkstelligen, wo ein wirkliches Bedürfniss dazu vorliegt. Aehnliches liesse sich von der Physik und überhaupt allen Anwendungen der Mathematik sagen. Die Brücke dabei würde, soweit es sich um Geometrisches handelt, unsere Theorie des geometrisch Imaginären sein. Uebrigens würden aber auch sonstige sachliche Grössen aller Art als beliebig signirte, also auch als negative und als imaginäre, vorkommen können, sobald die Einheitlichkeit des Gesichtspunktes es mitsichbrächte, den Rechnungszusammenhang zwischen den an sich stets absoluten Grössen auf diese Weise auszudrücken. Doch mag es vorläufig bei dieser allgemeinen Hinweisung auf die leichter ziehbaren Consequenzen sein Bewenden haben; die schwerer zugänglichen würden Ausführungen erfordern, die zu dem für diese Schrift abgesteckten Rahmen nicht mehr passten.

Dagegen kann in dem bei Weitem noch nicht erschöpften Anwendungsfelde der reinen Mathematik selbst noch bezüglich einiger Fälle kurz gezeigt werden, wie sich auch hier die neue Wissenschaft der Werthigkeiten und des Imaginären nach allen Richtungen hin verzweigt. Zunächst sind es die extremen Werthe der Functionen, d. h. deren Maxima oder Minima, bei denen der Begriff der Werthigkeit für die Formulirung der Bedingungen eine leicht verständliche Handhabe darbietet, die in gewissen Fällen auch den Weg der Auffindung directer als bisher gestaltet.

Ein extremer Werth einer Function y ist dann vorhanden, wenn deren Veränderung, mag sie nun in dem einen oder in dem andern Sinne geschehen, dasselbe Vorzeichen annimmt. Bezeichnen wir also die Veränderungen, die unbeschränkt klein genommen werden können, es aber nicht brauchen, mit dy und $d'y$, so wird für den Fall eines extremen Werthes y in $y + dy$ und in $y + d'y$ oder aber in $y - dy$ und in $y - d'y$ übergehen, so dass immer zwei gleichstimmige Werthe für einen und denselben Fall zusammengehören, sich aber nie ungleichstimmige beisammenfinden können. Die unabhängige Differenz des Arguments x wird also $+ dx$ oder $- dx$ sein können und dennoch für jedes der beiden Vorzeichen, also in unserer Sprache geredet, für ein zweiwerthiges dx immer nur ein einwerthig signirtes dy vorhanden sein, welches zwar auch $d'y$ sein kann, aber hiebei seine Signirung nicht ändert.

Fassten wir anstatt der Maxima und Minima überhaupt nur speciell diejenige Classe derselben ins Auge, für welche die Function, also etwa die Curvenordinate, sich in dem einen wie in dem andern Sinne, geometrisch gedacht also nach beiden Seiten, in gleicher Weise verändert, so dass also für die in absoluter Beziehung gleichen dx auch die entsprechenden Functionswerthe von y einander gleich werden, so ist auch $dy = d'y$ und in diesem Fall der symmetrischen Extreme lässt sich das Gesetz ganz einfach in die Werthigkeitsbegriffe fassen. Man hat alsdann nur zu sagen, dass für eine zweiwerthige Differenz $\pm dx$ die entsprechende Differenz der Function dy immer einwerthig ausfallen müsse. Hiebei versteht sich, dass dy, gleichviel ob unbeschränkt klein genommen oder nicht, die ganze, unabgekürzte Differenz vorstellt. Ueberhaupt werden wir es uns in dieser Darlegung über die Maxima und Minima zur Regel machen, mit unabgekürzten Differentialien zu operiren, d. h. die Differenzen, welche

bei jeglicher Grösse doch immer noch die Eigenschaft behalten, gegen Null hin unbeschränkt verkleinerbar zu sein, zunächst in denjenigen vollständigen Werthen zu belassen, welche sie durch die Substitution der unabhängigen Differenz in die Function nach Maassgabe der Form der letzteren annehmen. Nebenbei sei zugleich auch bemerkt, dass für die Differenzen nach der Seite des Grossen im Allgemeinen nur ein bestimmter Spielraum, also der Regel nach eine Schranke vorhanden sein wird, die mit den Stetigkeitsweiten oder, anders ausgedrückt, mit den besondern Punkten der jedesmaligen Function zusammenhängt. Im Fall der symmetrischen Maxima und Minima findet aber eine solche Beschränkung nicht statt; jedoch auch in andern Fällen haben wir hier speciell keine Ursache, uns mit Abmessung des fraglichen Spielraums zu befassen, da für unsere Zwecke schon jeder beliebige nächste genügt. Uns kann nur daran liegen, die gewöhnlich fälschlich gesonderten Fälle sogenannter unendlich kleiner und endlicher Differenzen dadurch rationell in einen einzigen Fall zusammenzufassen, dass wir bei den Differenzen von irgend einer Grösse zugleich den Umstand in Betracht ziehen, dass diese Grösse gegen Null keine Schranke hat und mithin nach Bedürfniss auch unbeschränkt klein vorgestellt werden kann.

2. Betrachten wir zuerst den Fall der allgemeinen Extreme, mögen sie zufällig symmetrisch sein oder es nicht sein. Für $+ dx$ ergiebt sich als volle Differenz $+ dy$ und für $- dx$ entsprechend $+ d'y$. Ist nun sowohl dy als $d'y$ als Function von dx ausgedrückt, so werden nur diejenigen Bestandtheile, welche ungrade Functionen von dx sind, in jedem der Werthe ein anderes Vorzeichen erhalten, so dass sich dy und $d'y$ als dargestellte Functionen von dx nur durch diese Vorzeichengegensätze unterscheiden. Hiebei haben wir nicht etwa gleich die Taylorsche Reihe als Entwicklungsform für den Zuwachs dx, sondern weit allgemeiner jegliche Function im Sinne, vermöge deren dy und $d'y$ in dx dargestellt werden können. Auch denken wir bei dem Begriff der ungraden Function nicht blos direct an ungrade Potenzen, sondern an alle solche Functionen, welche für ein zweiwerthig signirtes Argument auch selbst rein zweiwerthig werden, wofür der Sinus das nächstliegende Beispiel ist. Dies vorausgesetzt, ergiebt sich nun als leitendes Princip, dass die zweifachen Signirungen, welche in den Bestandtheilen vorkommen, für das

Ganze keine zweifache, sondern nur eine einfache Signirung mitsichbringen dürfen.

Zunächst werden die Unbeschränktkleinen der ersten oder, allgemein geredet, der niedrigsten Ordnung in den Ausdrücken für dy und $d'y$ sich nur durch Vorzeichen unterscheiden können, d. h. absolut gleich sein müssen, da sie nichts als die in beiden Fällen abgekürzten Werthe der Differenzen dy und $d'y$ repräsentiren. Diese Abkürzungen müssen aber, ausgenommen in den Vorzeichen, deshalb gleich werden, weil sie aus derselben Function durch dieselben Operationen und, abgesehen vom Vorzeichen, in Bezug auf dasselbe dx gewonnen werden. Da nun in einer Function die erste, beziehungsweise niedrigste Ordnung der Unbeschränktkleinen mit ihrem Vorzeichen über das Vorzeichen der ganzen Function entscheidet, so kann offenbar die zweifache Signirung von dy und $d'y$ nicht vermieden werden, solange die damit behaftete Ordnung nicht verschwindet, d. h. Null wird. Bezeichnet man die betreffende Function von der ersten, beziehungsweise niedrigsten Ordnung mit ε_1, so ist erforderlich, dass $\varepsilon_1 = 0$ sei. Diese Differentialgleichung reicht aber nicht hin; denn damit der noch übrige Rest der gesammten Zuwachsfunction einerlei Zeichen behalte, muss entweder die nächste grade Function ε_2 maassgebend werden und mithin einen von Null verschiedenen Werth haben, oder aber es muss, wenn auch $\varepsilon_2 = 0$ wird, ebenso $\varepsilon_3 = 0$ werden, damit ε_4 maassgebend werden könne u. s. w., bis sich eine von Null verschiedene grade Function findet.

Letztere Regeln sind allgemeiner gehalten als die gewöhnlichen, bei denen die Taylorsche Reihe die Voraussetzung bildet. Unsere Functionen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ brauchen nicht die nach den Potenzen von dx fortschreitenden Glieder der Taylorschen Reihe, sondern können ganz andere Werthe sein, je nachdem sich nämlich die Hauptfunction auch ohne die Taylorsche Reihe in Summanden zerlegen lässt, unter denen die verschiedenen Ordnungen der Unbeschränktkleinen vertreten sind. Bei ganzen algebraischen Functionen entsprechen unsern Begriffen dieselben Werthe, wie wenn man die Taylorsche Reihe zu Grunde legt. Wir halten uns daher bei diesem Falle nicht auf.

Dagegen liefern die Kreisfunctionen ein gutes Beispiel für die Eigenthümlichkeit unseres Verfahrens. Es seien daher etwa von der Function $y = \sin x$ die extremen Werthe zu ermitteln. Drückt man $\sin(x \pm dx)$ durch die bekannte Formel für das

binomische Argument aus, so hat man im Sinne unserer obigen Bezeichnungen $dy = sin\ x\ (cos\ dx - 1) + cos\ x\ sin\ dx$ und $d'y = sin\ x\ (cos\ dx - 1) - cos\ x\ sin\ dx$. Substituirt man nun für $cos\ dx$ den damit gleichwerthigen Ausdruck $1 - 2\ sin^2 \frac{1}{2} dx$, so hat man $dy = + cos\ x\ sin\ dx - 2\ sin\ x\ sin^2 \frac{1}{2} dx$ und $d'y = - cos\ x\ sin\ dx - 2\ sin\ x\ sin^2 \frac{1}{2} dx$. In letzteren Ausdrücken ist im Sinne unserer früheren Bezeichnungsweise das erste Glied ε_1 und das zweite Glied ε_2, und da hiemit Alles erschöpft ist und nicht, wie nach der Methode der Taylorschen Reihe, eine Unendlichkeit von Gliedern vorliegt, so gestaltet sich auch die Formulirung der Bedingungen sofort ganz bestimmt. Da die unabgekürzte Differenz $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ unmöglich Null werden kann, solange wirklich eine Veränderung statthat, so ist also unter der Voraussetzung einer wirklich veränderlichen, d. h. nicht constanten Function die Bedingung $\varepsilon_1 = 0$ genügend, und man braucht nicht noch ausdrücklich die Beziehung $\varepsilon_2 \gtrless 0$ hinzuzufügen, da letztere Ungleichheit eine Folge jener Unmöglichkeit ist. Wir haben also $\varepsilon_1 = cos\ x\ sin\ dx = 0$ und hieraus $cos\ x = 0$ als Bedingungsgleichung extremer Werthe. Diese transcendente Gleichung hat nun eine unbeschränkte Anzahl von Wurzeln, deren allgemeine Form $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ist, in welchem Ausdruck k alle positiven und negativen ganzen Zahlen einschliesslich der Null vertritt. Will man nun noch die Maxima von den Minima unterscheiden, so muss man beachten, dass für ein grades k, also auch für dessen Nullwerth, $\varepsilon_2 = - 2\ sin\ x\ sin^2 \frac{1}{2} dx$ negativ wird und demgemäss ein Maximum anzeigt, während jedem ungraden k ein positives ε_2 und mithin ein Minimum entspricht.

Um unser Verfahren noch an einem Falle zu zeigen, in welchem mehrere Ordnungen der Unbeschränktkleinen Null werden, sei als Beispiel die Verbindung einer hyperbolischen Function mit einer circularen, nämlich $y = ch\ x + cos\ x$, gewählt. Indem wir auch die hyperbolische Function, wie früher gezeigt, für das Binom $x \pm dx$ analog wie die trigonometrische bestimmen und die Ausdrücke für dy und $d'y$ nach dem Range der Unbeschränktkleinen ordnen, erhalten wir $dy = (sh\ x - sin\ x)\ sh\ dx + 2\ (ch\ x - cos\ x)\ sh^2 \frac{1}{2} dx + sin\ x\ (sh\ dx - sin\ dx) + 2\ cos\ x\ (sh^2 \frac{1}{2} dx - sin^2 \frac{1}{2} dx)$ und $d'y = - (sh\ x - sin\ x)\ sh\ dx + 2\ (ch\ x - cos\ x)\ sh^2 \frac{1}{2} dx - sin x (sh\ dx - sin\ dx) + 2\ cos\ x\ (sh^2 \frac{1}{2} dx - sin^2 \frac{1}{2} dx)$. Die in beiden Ausdrücken mit verschiedenen Vorzeichen behafteten

Glieder sind beziehungsweise ε_1 und ε_3, und die beiden gleichsignirten sind ε_2 und ε_4, wenn wir dieser Bezeichnungsweise den oben bestimmten Sinn unterlegen. Setzen wir nun zunächst $\varepsilon_1 = (sh\,x - sin\,x)\,sh\,dx = 0$, so ist die einzige reelle Lösung $x = 0$, und substituirt man diesen Werth in ε_2, so wird dieses ebenfalls gleich Null. Es muss also noch die Bedingung $\varepsilon_3 = sin\,x\,(sh\,dx - sin\,dx) = 0$ und hiemit $sin\,x = 0$ erfüllt werden und zwar ohne der ersten Gleichung $\varepsilon_1 = 0$ zu widersprechen; denn sonst würde die Function keinen extremen Werth haben können. Die Wurzel der ersten Gleichung, nämlich $x = 0$ genügt aber auch dieser, und hierin ist die Bedingung der extremen Werthe nun vollständig enthalten, da man ja nunmehr auch wissen kann, dass ε_4 bei einer nicht constanten Function nicht auch gleich Null sein kann, weil sonst das ganze unabgekürzte Differential $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ zu Null werden würde. Für $x = 0$ wird $\varepsilon_4 = 2\,cos\,x\,(sh^2\,\frac{1}{2}\,dx - sin^2\,\frac{1}{2}\,dx)$ positiv. Es existirt also im reellen Bereich für die untersuchte Function nichts als ein einziges Minimum, nämlich $y = 2$.

3. Nach der vorangehenden Auseinandersetzung ist es leicht, das Verfahren anzugeben, wenn man von vornherein die Frage beantwortet haben will, ob und wann symmetrische Maxima und Minima vorhanden sind. In diesem Verfahren liegt eine Abkürzung, sobald man Indicien hat, dass der Fall symmetrischer Extreme wirklich statthabe; denn wenn man auch nur ein Interesse hat, überhaupt die Maxima und Minima zu finden und nach deren symmetrischen Eigenschaften nicht speciell fragt, so liefert die bestimmtere Fragestellung, falls sie nur zu einer positiven Antwort führt, doch sofort gleichzeitig alle Gleichungen. Damit ein symmetrisches Extrem vorhanden sein könne, muss $dy = d'y$ sein. Die beiden Ausdrücke für dy und $d'y$, die sich formell als die Zweiwerthigkeit $\pm \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \pm \ldots$ darstellen, müssen einwerthig sein. Hieraus folgt, dass die Summe der zweiwerthigen Glieder Null werden muss. Man hat also $\pm (\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \ldots) = 0$. Ist eine Summe von Unbeschränktkleinen verschiedener Ordnungen gleich Null, so muss auch jede Ordnung für sich Null sein; denn die erste oder allgemeiner geredet niedrigste Ordnung ist gleich der negativen Summe der übrigen, die gegen jene unbeschränkt klein ist. Es kann aber unmöglich eine Grösse, die von Null verschieden ist, einer andern gegen sie unbeschränktkleinen gleich sein; denn der Begriff der Gleichheit

zweier Grössen schliesst es aus, dass die eine gegen die andere unbeschränkt verkleinerbar sei. Es bleibt also nur der Nullfall übrig. Uebrigens hätte sich auch direct durch Zerlegung der Gleichung $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \ldots = 0$ in die beiden Factoren ε_1 und $1 + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \ldots$ zeigen lassen, dass $\varepsilon_1 = 0$ sein muss; denn damit ein Product Null werde, muss es wenigstens einer der Factoren sein; der mehrgliedrige Factor kann es aber nicht sein, da er unbeschränkt nahe an 1 grenzt, und muss es demgemäss der andere Factor ε_1 selbst sein. Nachdem nun hiemit erwiesen, dass die erste Ordnung gleich Null ist, folgt sofort, dass es auch die Summe der übrigen sein muss, und wendet man auf letztere dieselbe Zerlegung an, so erhält man auch $\varepsilon_3 = 0$ u. s. w.

Wir haben nunmehr als Vorbedingung eines symmetrischen Maximum oder Minimum $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$ u. s. w., d. h. die Unbeschränktkleinen der ungraden Ordnungen müssen jedes für sich gleich Null sein. Im Uebrigen geben die symmetrischen Extreme zu keiner besondern Bemerkung Veranlassung; denn die Unterscheidung des Maximum vom Minimum hat nichts mit dem Gegensatz von symmetrisch und unsymmetrisch zu schaffen. Hätten wir in dem obigen Beispiel von der Summe des hyperbolischen und des trigonometrischen Cosinus die Frage gleich nach dem symmetrischen Maximum oder Minimum gestellt, so würden wir ohne Weiteres gewusst haben, dass den dortigen Gleichungen $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_3 = 0$ zugleich zu genügen sei. Da dies reell nur durch den Werth $x = 0$ geschehen konnte, so wäre damit die Frage entschieden gewesen. Das Nähere über den Unterschied des Maximum vom Minimum hätte aber in der Bestimmung keine Abänderung erfahren.

Für das Dasein eines symmetrischen Extrems ist es, wie gezeigt, erforderlich, dass die ungraden Summandenfunctionen, die in der ganzen Differenz vorkommen, jede für sich gleich Null seien. Dies genügt aber auch, und es lässt sich daher dem Satz, dass ein symmetrisches Extrem diese Gleichungen mitsichbringe, die Umkehrung hinzugesellen, dass diese Gleichungen das Dasein eines symmetrischen Maximum oder Minimum ohne Weiteres mitsichbringen. Nach den graden Ordnungen braucht man garnicht zu fragen; denn deren Summe kann, ausser im Falle einer constanten Function, nie gleich Null sein. Erst wenn man das Maximum vom Minimum unterscheiden will, hat man das Vorzeichen derjenigen

graden Ordnung, die zuerst nicht gleich Null wird, nach Substitution der dem Extrem entsprechenden Argumentwerthe in Anschlag zu bringen.

In unserm ersten Beispiel vom Sinus war überhaupt nur eine einzige ungrade Ordnung vorhanden, und deren Nullsetzung musste daher sofort die möglichen Fälle symmetrischer Extreme liefern. Hiezu sei noch bemerkt, dass zunächst alle Curven zweiten Grades solche Punkte haben, um welche sie nach zwei Seiten symmetrisch liegen. Hieraus folgt, dass auch Linien in ihnen gezogen werden können, die symmetrische Maxima oder Minima werden. In dem auf rechtwinklige Mittelpunktscoordinaten bezogenen Kreise ist die obere Ordinate, wo sie dem Radius gleich ist, ein symmetrisches Maximum, die untere aber, weil sie negativ ist, ein Minimum. Letzterer Unterschied zwischen Maximum und Minimum zeigt sich noch deutlicher, wenn man die Abscissenaxe sich selbst parallel unterhalb des Kreises verlegt. Bei der Hyperbel wird unter Voraussetzung der gewöhnlichen Coordinaten die positive Abscisse am Scheitel der halben Hauptaxe gleich und im Bereich des Reellen ein symmetrisches Minimum, die negative Abscisse in entsprechender Weise ein Maximum. In der Parabel hat die Abscisse am Scheitel ein symmetrisches Minimum gleich Null. In der Ellipse ist die Ordinate oben, d. h. als positive, wo sie der halben kleinen Axe gleich wird, ein symmetrisches Maximum, unten aber ein Minimum. Die Abscisse wird auf der positiven Seite am Scheitel ein symmetrisches Maximum, auf der negativen ein Minimum.

Für unsere allgemeine Methode, die extremen Werthe, seien es unsymmetrische oder symmetrische, vermittelst unabgekürzter Differenzen zu finden, ist es charakteristisch, dass sie nicht blos von der Taylorschen Reihe, sondern auch vom Differentialbegriff unabhängig bleibt. Unsere Differenzfunctionen, sowohl im Ganzen als auch in den Bestandtheilen, bezogen sich zwar unserer Bezeichnungsart nach auf ein dx; dieses dx bedeutete aber überhaupt jedes zweite Stück des binomisch getheilten Arguments, wobei die Eigenschaft, dass es gegen Null hin unbeschränkt veränderlich ist, nur als eine specielle Folge der Verhältnisse hinzutritt. Auch hätten wir unsern Beweis, dass wenn die Summe solcher Functionen verschiedenen Ranges gleich Null ist, es auch die einzelnen sein müssen, nicht grade an die unbeschränkte Verkleinerung anzuknüpfen brauchen. Der blosse Begriff der

Veränderlichkeit hätte genügt. Nur der Bequemlichkeit wegen haben wir den Beweis aus den bestimmteren Voraussetzungen geführt, die aber auch den Differenzfunctionen nach der Seite des Grossen hin den Spielraum nicht beeinträchtigen. Es bleibt also dabei, dass unsere ganze Theorie der Maxima und Minima nicht blos von der gewöhnlichen Differentialrechnung, sondern auch von der Rechnung mit abgeleiteten Functionen unabhängig ist. Wohl aber hat sie die Darstellbarkeit der Function eines binomischen Arguments durch die Bestandtheile zur Voraussetzung, und wo etwa diese Voraussetzung nicht anders als durch die Taylorsche Reihe erfüllt werden kann, da ergiebt sich das bisher übliche Verfahren als ein Specialfall des unsrigen, nur dass wir unter allen Umständen für die symmetrischen Fälle eine umfassendere Schlussweise voraushaben.

Um die Allgemeinheit unserer Gedanken auch äusserlich in der Bezeichnungsweise kenntlich zu machen, hätten wir nur nöthig u statt dx, sowie v und v' anstatt dy und $d'y$ zu schreiben. Die Grössen u und v lägen alsdann innerhalb des ganzen Spielraums, der sich von Null bis zur nächsten Stetigkeitsunterbrechung erstreckt. Sie schliessen also sozusagen das Stadium der unbeschränkten Kleinheit mit ein, ohne an dasselbe gebunden zu sein. Wir haben jedoch die differentielle Bezeichnungsart vorgezogen, um zugleich zu zeigen, wie sich in rationeller Weise eine Rechnung mit unabgekürzten Differentialen schaffen und verwerthen lasse. Diese Rechnung unterscheidet sich handgreiflich von der gewöhnlichen Differentialrechnung, ist aber auch keineswegs der gewöhnlichen Differenzenrechnung oder, wie man diese auch nennt, der Rechnung mit endlichen Differenzen gleich. Bei der letzteren ist die Bestimmtheit, also Unveränderlichkeit der Differenz Vorbedingung, und es darf daher namentlich die Voraussetzung fehlen, dass die Differenz gegen Null hin beliebig wählbar sei. Unsere Rechnung mit unabgekürzten Differentialen vereinigt die Vortheile des Unbeschränktkleinen, des sogenannten Endlichen und des Veränderlichen. Sie gestattet, cumulativ die verschiedensten Grundsätze anzuwenden, mögen diese nun von der unbeschränkten Verkleinerungsfähigkeit der fraglichen Grössen oder von deren sonstigen Eigenschaften und Beziehungen herrühren. Auch steht es in dieser Rechnungsart frei, je nach Bedürfniss zu den Abkürzungen, also zur eigentlichen Differentialrechnung überzugehen.

4. Nächst der Bethätigung des Werthigkeitsgesichtspunkts für die Maxima und Minima ist noch die Integration mehrwerthiger Differentiale von Interesse. Hiebei kann man mindestens eine solche Umformung vornehmen, dass sich das Integral in werthige Theilintegrale zerlegt, sich also in der Zusammensetzung der Bestandtheile nach der Art des Differentials gliedert. Hat man einfache Summen, so ist das Zerfallen des Integrals in werthige Theilintegrale selbstverständlich; denn beispielsweise ergiebt sich unmittelbar $\int (a \pm b \sqrt{x})\, dx = \int a dx \pm \int b \sqrt{x}\, dx$. Wäre aber $\int \frac{dx}{a \pm b \sqrt{x}}$ gegeben, so müsste dieses, nach unserm allgemeinen Satze von der übereinstimmenden Werthigkeitsform der Function und ihres Arguments, die Gestalt $\alpha \pm \beta$ haben. Für α und β hat man demgemäss zwei Gleichungen, nämlich $\alpha + \beta = \int \frac{dx}{a + b \sqrt{x}}$ und $\alpha - \beta = \int \frac{dx}{a - b \sqrt{x}}$. Es ist also $\alpha = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{a + b \sqrt{x}} + \int \frac{dx}{a - b \sqrt{x}} \right)$ und $\beta = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{a + b \sqrt{x}} - \int \frac{dx}{a - b \sqrt{x}} \right)$. Bringt man nun die Integrale unter ein gemeinschaftliches Integralzeichen und dann die Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner, so hat man $\alpha = \int \frac{a}{a^2 - b^2 x}\, dx$ und $\beta = - \int \frac{b \sqrt{x}}{a^2 - b^2 x}\, dx$. Man würde dies Ergebniss auch gleich von vornherein haben erhalten können, wenn man im Argument des gegebenen Integrals die Zweiwerthigkeit, durch Multiplication mit der conjugirten Zweiwerthigkeit $a \mp b \sqrt{x}$, in den Zähler gebracht hätte. Alsdann hätte sich der so veränderte Ausdruck unter dem Integral einfach in zwei werthige Summanden zerlegt, und es wäre nichts weiter zu thun gewesen, als vor jeden von beiden das Integralzeichen zu setzen. Letztere Methode eignet sich auch am besten, wenn man nicht blos Zweiwerthigkeiten, sondern überhaupt Mehrwerthigkeiten vor sich hat, mögen diese nun algebraisch oder transcendent sein. Die Art, wie man überhaupt alle Mehrwerthigkeiten einer gebrochenen Function aus dem Nenner in den Zähler verlegt, ist in Nummer 4 des siebenten Capitels gezeigt worden. Hienach lässt sich also jedes Integral einer mehrwerthigen Differentialfunction als ein entsprechendes

werthiges Polynom von Theilintegralen darstellen, und diese Umformung ist davon unabhängig, ob übrigens eine Integration ausführbar sein möge oder nicht.

Auch durch willkürliche Einführung von Zweiwerthigkeiten können aus der gegebenen Auflösung gewisser Integrale durch Zerfällung die Auflösungen anderer Integrale gewonnen werden. Namentlich ist dies der Fall, wenn in der Differentialfunction an Exponentialfunctionen angeknüpft werden kann. Es sei $\int\limits_{x=0}^{x=\infty} e^{qx}\, x^n\, dx = \frac{n!}{(-q)^{n+1}}$ gegeben, so lassen sich hieraus entsprechende Integrale von Ausdrücken mit hyperbolischen Functionen ebenfalls in vollständiger Auflösung angeben. Man setze $q = a \pm b$ auf der linken und die zugehörige modulirte Form $q = \varrho e^{\pm z}$ auf der rechten Seite ein und verwandele dann die zweiwerthigen Exponentialfunctionen in ihre hyperbolisch binomische Form, so hat man

$$\int\limits_0^\infty e^{ax}(ch\, bx \pm sh\, bx)\, x^n\, dx = \frac{n!}{(-\varrho)^{n+1}}[ch\,(n+1)z \mp sh\,(n+1)z].$$

Diese Gleichung zerfällt nach dem Werthigkeitsprincip in die beiden Partialgleichungen $\int\limits_0^\infty e^{ax}\, ch\, bx\, x^n\, dx = \frac{n!}{(-\varrho)^{n+1}} ch\,(n+1)\,z$ und $\int\limits_0^\infty e^{ax}\, sh\, bx\, x^n\, dx = -\frac{n!}{(-\varrho)^{n+1}} sh\,(n+1)\,z$. In diesen neuen Integralen ist $\varrho = \sqrt{a^2 - b^2}$ und es wird z durch die Gleichung $ch z = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ bestimmt. Der von uns gewählte Weg ist ebenso wie die Form des Ergebnisses bisher unbekannt gewesen und musste es sein, da die Werthigkeitsrechnung fehlte. Wohl aber hat man mit Hülfe der Imaginären ein Ergebniss für Kreisfunctionen erzielt, indem man, nach unserer Bezeichnungsweise ausgedrückt, $a + b\sqrt{-1}$ für q substituirte. Wir können übrigens auch unser Resultat für hyperbolische Functionen sofort in eines mit Kreisfunctionen umwandeln, indem wir darin $b'\sqrt{-1}$ statt b setzen und dann die von uns früher gebrauchten bekannten Beziehungen zwischen den hyperbolischen und den circu-

laren Functionen zur Transformation verwerthen. Auf diese Weise zeigt sich wieder, dass der Werthigkeitsgesichtspunkt der umfassendere ist, indem man mit der auf reellem Wege gelösten Aufgabe auch zugleich eine andere, von der Imaginarität abhängige durch blosse Substitution miterledigt. Wollte man, nachdem wir die doppelte Seite der Sache gezeigt haben, etwa einwenden, dass sich das auf dem imaginären Wege für Kreisfunctionen gewonnene Resultat durch nochmalige Anwendung der Imaginären in eines für hyperbolische Functionen umwandeln lasse, so wäre diese Häufung ein Umweg, der da zweimal durch das Imaginäre führte, wo wir mit unserm Werthigkeitsverfahren ganz und gar nicht des Imaginären bedürfen.

Auch unsere frühere Integration nach Werthigkeiten, die uns Summen werthiger Integrale lieferte, gilt nicht blos im Allgemeinen für die imaginären Fälle der Einheitswurzeln, sondern lässt sich auch speciell von der reellen Zweiwerthigkeit auf den entsprechenden imaginären Fall übertragen. Unsere Schlussfolgerungen waren nämlich unabhängig davon, ob $b\sqrt{x}$ im Binom $a \pm b\sqrt{x}$ sich reell oder imaginär gestalten möchte. Wir bedürfen daher nicht erst einer Berufung auf die Eigenschaften des Imaginären, um der Gleichung $\int \frac{dx'}{a + b\sqrt{x'}\sqrt{-1}} = \int \frac{a}{a^2 + b^2 x'}\,dx' - \sqrt{-1}\int \frac{b\sqrt{x'}}{a^2 + b^2 x'}$ und ihrer Conjugirten sicher zu sein, die wir beide einfach dadurch erhalten, dass wir $\sqrt{x'}\sqrt{-1}$ an die Stelle von $\sqrt{x}$ setzen.

5. Die in dieser Schrift zuerst gezeigte wirkliche Construction des Imaginären liefert zu den reellen Fällen der Curven diejenigen zugehörigen Gebilde, welche sich analytisch, d. h. für die Rechnung in einzelnen Bestandgrössen als imaginär charakterisiren, während sie, absolut genommen, neue Curvenspecies sind. So verhielt es sich mit dem einfachsten Typus, dem Kreise und der gleichseitigen Hyperbel, und so verhält es sich mit den allerzusammengesetztesten Curven, sobald man nach unserm System ihr reelles Stadium in ein imaginäres fortsetzt. Ob wir bei den Kegelschnitten stehen bleiben oder zu Curven übergehen, die den elliptischen oder gar noch höheren Verallgemeinerungen, nämlich den sogenannten Abelschen Functionen entsprechen, — immer bleibt dasselbe Gesetz bestehen und bewährt sich der

Angelpunkt unserer neuen Imaginärtheorie. Stets werden zweierlei Gebilde unter dieselbe Gleichung gebracht, und man kann von den Eigenschaften und Ergebnissen, die man bezüglich des einen hat, analytisch durch blosse Imaginärsetzungen und deren Consequenzen zu den entsprechenden Eigenschaften und Ergebnissen im andern gelangen; ja man hat letztere eigentlich schon fertig in derselben Formel, wenn man sich das Gebiet dieser Formel, wie man muss, als von vornherein auch für das Imaginäre mitgeltend vorstellt.

Unter den mannigfaltigen Fragen, welche man bezüglich der Curven stellen kann, sind in Beziehung auf das Imaginäre die nach den Quadraturen und Rectificationen am interessantesten. Hiebei wird es nämlich am sichtbarsten, wie auch da, wo es sich um mehr als blosse Consequenzen der Gleichung handelt, die Operation mit dem Imaginären folgerichtig fortgesetzt und auch in geometrische Beziehungen hineingetragen werden kann, die an sich selbständig sind, und daher auch ihren absoluten, von der Gleichung unabhängigen Sinn bewahren müssen. Indem wir unsere Lehre vom Imaginären durch den Begriff des Imaginativen oder, was dasselbe heisst, der abgeleiteten Rechnungs- und Signirungswerthe erweiterten, legten wir auch zugleich den Grund für die Uebertragung der Quadratur- und Rectificationsintegrale in das Imaginäre. Der Einfachheit wegen wollen wir jedoch mit demjenigen Fundamentalfall beginnen, für welchen eine einfache Imaginärsetzung ausreicht.

Letzteres hat statt, wenn man vom Flächenraum des Kreises zur Quadratur der im Innern des Hyperbelarms liegenden Fläche oder auch umgekehrt von dieser zu jenem übergehen will. Sehen wir von den beliebig zu nehmenden Grenzen ab, so ist $\int y\,dx$ in beiden Fällen die maassgebende Function. Der Unterschied besteht nur darin, dass wir y das eine Mal imaginär, d. h. $y = y' \sqrt{-1}$ zu setzen haben. Gehen wir vom Kreise als dem reellen Gebilde, also von der gemeinschaftlichen Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ aus, so ist die Hyperbelordinate imaginär, nämlich, wenn man sie zur genauern Unterscheidung mit einem Strich bezeichnet, $y' \sqrt{-1}$, und das differentielle Element des Flächenraums wird demgemäss auch geometrisch $\sqrt{-1}\, y'\, dx$. Die Summe dieser imaginären, unbeschränkt kleinen Flächenstreifen zwischen irgend zwei Werthen von $y' \sqrt{-1}$ ist der gesuchte

Flächenraum. Letzterer wird daher im Ganzen ebenfalls imaginär. Dies ist es aber auch, was sich schon durch die einfache Substitution im Integral findet. Aus $\int y\,dx$ für den Kreis wird $\int y' \sqrt{-1}\, dx = \sqrt{-1} \int y'\, dx$ für die gleichseitige Hyperbel, und selbstverständlich bleibt diese Gestalt bestehen, wenn man das Integral zwischen den Grenzen x_1 und x_2 nimmt. Man hat $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und daher $y' = \sqrt{x^2 - r^2}$. Die ganze Umwandlung besteht also darin, dass für $x > r$, d. h. für den Fall der Hyperbel, in der allgemeinen, für beide Gebilde geltenden Integralformel der Ausdruck $\sqrt{r^2 - x^2}$ in den nur formell verschiedenen $\sqrt{-1}\,\sqrt{x^2 - r^2}$ übergeht.

Hätte man, statt die Integrale unaufgelöst zu behandeln, bereits eine Auflösung des einen zum Ausgangspunkt gemacht, so würde man auch von dieser durch blosse Substitutionen des Imaginären unmittelbar zur aufgelösten Form des andern Integrals haben gelangen können. Die Auflösung des Kreisintegrals geschieht nämlich durch Arcusfunctionen, und diese übersetzt man dann in die hyperbolischen Areafunctionen, deren wir uns schon bei früheren Gelegenheiten bedient haben, und die man auch wieder durch logarithmische Functionen ausdrücken kann. Die Ausführung dieser Wendung würde aber hier nur unnütz Raum in Anspruch nehmen.

6. Wichtiger ist der Rectificationsfall, weil er neue Consequenzen unseres Princips sichtbar macht. Man hat für das Bogenelement bekanntermaassen die Gleichung $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Diese Gleichung ist keine analytische Folge der Curvengleichung, sondern ein selbständig hinzutretendes geometrisches Ergebniss. Es ist dieser sehr erhebliche Umstand bisher durch das herrschende Vorurtheil verdeckt geblieben, demzufolge in den Anwendungen der Analysis auf Geometrie Alles so ausgegeben wird, als wenn es sich, nachdem einmal die Gleichung der Curve in bestimmten Coordinaten festgestellt wäre, nun auch ausschliesslich und zureichend aus dieser Gleichung entwickeln liesse. Man entwickelt allerdings mit Hülfe der Curvengleichung; aber es ist ein grosser Unterschied zwischen dem, was allein aus dieser Gleichung folgt, und dem, wozu noch eine selbständige neue Gleichung erforderlich ist. Im fraglichen Fall wird die neue Gleichung durch den Pythagoreischen Satz geliefert, indem dieser eine Beziehung zwischen den Differentialen der beiden Veränderlichen und dem Differential

einer dritten Grösse ergiebt, — einer Grösse, die der Curvengleichung an sich ganz fremd ist. Man mag die Curvengleichung analytisch bearbeiten wie man will, so wird man durch keine Operation zu jener Gleichung des charakteristischen Dreiecks kommen. Das geometrische Verhältniss ist mithin die Ursache der Möglichkeit der neuen Gleichung.

Dieses geometrische Verhältniss ist aber auch etwas Absolutes und hat an sich mit der Signirung nichts zu schaffen. Die imaginäre Signirung ist eine Consequenz der Curvengleichung, von welcher der geometrische Uebergang zum Bogenelement unabhängig ist. Soll nun aber die alte Gleichung mit der neu hinzukommenden vereinigt werden, so muss sich auch der Gesichtspunkt einheitlich gestalten. Man darf in demselben umfassenden Rechnungszusammenhange dieselbe Grösse nicht das eine Mal signirt und das andere Mal absolut und doch als identisch figuriren lassen. Um die Identität zu bewahren, d. h. keinen Widerspruch zu begehen, ist es erforderlich, auch in der neuen geometrischen Beziehung, unbeschadet dieser, den signirten Rechnungswerthen im eigentlichen Sinne des Worts Rechnung zu tragen; denn nur auf diese Weise wird Alles der Curvengleichung untergeordnet.

Wir setzen also, im Hinblick auf unser Kreis- und Hyperbelschema, den Zuwachs der imaginären Ordinate y selbst imaginär, d. h. $dy = \sqrt{-1}\, dy'$. Alsdann ist die Gestalt der Pythagoreischen Gleichung im Sinne unseres früher erklärten Sprachgebrauchs eine imaginative. Wir haben nämlich $ds^2 = dx^2 + (\sqrt{-1})^2\, dy'^2$. Wollten wir die rechte Seite einfach als eine Differenz von Quadraten, also $dx^2 - dy'^2$ schreiben, so würde dies grade denjenigen Sachverhalt, auf den es ankommt, unkenntlich machen. Die Geometrie fordert, dass die Summe der Quadrate der absoluten Grössen festgehalten werde; die Analysis aber, dass darin auch die Rechnungswerthe vertreten seien. Beiden Rücksichten zugleich wird nur genügt, wenn man nach unserm System des Imaginativen den imaginären Ursprung des Minuszeichens bedenkt und dieses Zeichen, statt es mit den sonstigen Operationszeichen verschmelzen zu lassen, als Kennzeichen einer charakteristischen und deshalb zu isolirenden Signirung selbständig bewahrt. Man schafft auf diese Weise ein aus ungleichartigen Bestandtheilen zusammengesetztes Binom

neuer Art; denn es ist offenbar eine neue Gattung ungleichartiger Binome, wenn man in ihnen die negativen Grössen grundsätzlich von den positiven unterscheidet und dieser Unterscheidung auch durch alle weitern Operationen hindurch Rechnung trägt.

Um diesen entscheidenden Punkt recht anschaulich zu machen, wollen wir einmal für $\sqrt{-1}$ das Zeichen ι setzen. Wir haben alsdann $ds^2 = dx^2 + \iota^2\, dy'^2$. Hierin muss ι^2, ähnlich wie eine eigentlich imaginäre Signirung, unaufgelöst festgehalten werden. Wenn wir also $ds = \sqrt{dx^2 + \iota^2\, dy'^2}$ durch Wurzelausziehung zu bestimmen hätten, so würden wir, falls es sich bereits um Zahlen handelte, die Wurzel nach der von uns für die imaginären Binome gelehrten binomischen Wurzelausziehung auch für diesen Fall zweitheilig ermitteln, so dass wir für die Wurzel die Form $\alpha + \iota^2 \beta$ erhielten. Jedoch auch algebraisch ist diese Bestimmung der Wurzel in zweierlei Bestandtheilen nach verschiedenen, unsern Grundmitteln entsprechenden Methoden möglich. Man kann dem Binom willkürlich eine zweite Werthigkeit hinzufügen und dann die Wurzel aus dem zweiwerthigen Binom wiederum zweiwerthig bestimmen; natürlicher und directer aber verfährt man hier, wenn man ι^2 das Zeichen für eine besondere Gattung von Einheiten sein lässt, indem man von vornherein festsetzt, dass diese Einheiten mit den andern Einheiten nicht gleichheitlich vereinigt werden sollen, während jedoch ι^4 bereits diesem Trennungsgesetz nicht mehr zu unterwerfen ist. Alsdann zerfällt dieser Festsetzung gemäss die Gleichung $(\alpha + \iota^2 \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\iota^2 \alpha\beta = dx^2 + \iota^2\, dy'^2$ in die beiden Partialgleichungen $\alpha^2 + \beta^2 = dx^2$ und $2\alpha\beta = dy'^2$, woraus sich α und β leicht bestimmen.

In diesen Ausdrücken ist das Integral für die Bogenlänge nun $\int(\alpha + \iota^2\beta) = \int \alpha + \iota^2 \int \beta$. Dieses Integral gilt für beide Fälle, nämlich für den Kreis, wenn es den in Bezug auf die Hyperbel imaginativen Werth, d. h. seinen Rechnungswerth unmittelbar und wirklich erhält, — für die Länge des Hyperbelbogens aber, wenn man die beiden Theilintegrale als Darstellung von Längen auffasst, von denen die eine anders signirt, aber dennoch geometrisch zu addiren ist. Uebrigens hätte man auch von vornherein die Ordinate y als eine neue Art Zweiwerthigkeit behandeln können, nämlich als eine solche, in welcher neben dem reellen auch ein imaginärer Werth gleichzeitig figurirt. Alsdann hätte sich die Trennung der Bestandtheile ohne Weiteres von

selbst verstanden, und es wäre auch sofort klar gewesen, dass noch nicht bei den zweiten, wohl aber bei den vierten Potenzen des Imaginären der Signirungsunterschied verschwinden und hiemit gleichgültig werden musste. Dazwischen lag nämlich der Gegensatz des Absoluten und des Imaginativen und zwar in der speciellen Gestalt des Unterschiedes von Positiv und Negativ, und dieser letztere Unterschied musste durch weitere Quadrirung wegfallen.

Auch sieht man aus dem Bisherigen, dass man sowohl das Integral für die Quadratur als dasjenige für die Rectification über das Doppelgebilde der reellen und der imaginären Curve einheitlich ausdehnen kann, so dass ein einziges Integral den Gesammtflächenraum zwischen zwei beliebigen Grenzen, und ebenso ein einziges die gesammte Bogenlänge bestimmt. Von den Grenzen kann alsdann die eine im Kreise, die andere in der Hyperbel liegen. Jedenfalls erhält man eine aus ungleichartigen Bestandtheilen zusammengesetzte binomische Integralsumme, die im Falle des Quadraturbeispiels der vorigen Nummer sich unmittelbar imaginär binomisch gestaltet, in dem behandelten Rectificationsfalle aber ausser dem Imaginativen auch noch das im engern Sinne Imaginäre aufweist; denn α und β fallen an sich selbst keineswegs reell aus.

7. Eine ähnliche Zerlegung wie für das Bogendifferential ds tritt für den Radiusvector ϱ ein, wenn man für diesen einen der gemeinschaftlichen Curvengleichung entsprechenden Rechnungswerth gewinnen will, der zugleich die absoluten geometrischen Bestandtheile, aber eben mit Signirungen, enthält. Man hat nämlich nach dem Pythagoreischen, mit Rücksicht auf die Imaginarität der Ordinate anzuwendenden Satze $\varrho = \sqrt{x^2 + \iota^2 y'^2}$, und diese Wurzel lässt sich nach der vorher angegebenen Methode in zwei selbständigen, jenem Binom entsprechenden Bestandtheilen darstellen, d. h. auf die Form $u + \iota^2 v$ bringen. Es wird hiebei überdies sowohl u als v binomisch imaginär, aber v ist noch ausserdem im imaginativen Sinne negativ, indem es auch ι^2 zum Vorzeichen hat, dennoch aber absolut eine geometrische Länge vorstellt, welche, an die andere u geometrisch angesetzt, die Länge von ϱ liefert. Nehmen wir unser Hyperbelschema, so zeigt sich, dass der imaginative Werth von ϱ, d. h. die dem ι^2 entsprechende Subtraction, den Radiusvector des Kreises, d. h. den einfachen Kreisradius r liefert. Hienach kann man auch sagen, dass $\varrho = u + \iota^2 v$ in seinen Bestandtheilen und

mit diesen, wie sie sich geometrisch zusammensetzen, auch als Ganzes in der Hyperbel variabel, dagegen dem imaginativen, d. h. der Gleichung entsprechenden Werth nach constant sei. In der That ist $u + \iota^2 v$ eine Constante mit veränderlichen Bestandtheilen, nämlich stets gleich r. Wir können daher, wenn wir das Wort Werthigkeit in einem sehr allgemeinen Sinne brauchen, gradezu sagen, dass ϱ die imaginative Werthigkeit r habe. Diese r-Werthigkeit von ϱ ist eine Consequenz unserer Imaginärtheorie, welche letztere unvollkommen geblieben wäre, wenn wir nicht deren Grundvoraussetzung, die Befassung zweierlei Gleichungen unter eine, in allen Beziehungen durchgeführt hätten. Offenbar kann die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ nur dann auch für die Hyperbel gelten, wenn man den Begriff fasst, dass unter r auch ϱ als besonderer Fall gehöre. Die Gleichung fordert also $\varrho = r$. Der absolute Werth von ϱ erfüllt diese Bedingung nie; er kann dies ebensowenig als etwa eine absolute Hyperbelordinate je der Kreisgleichung entsprechen kann. Es handelt sich auch nur darum, dass ein Rechnungsausdruck für die Länge der Gleichung genüge, und dieser Rechnungsausdruck muss wiederum in Beziehung auf die absoluten Grössen imaginativ heissen, weil diese sich an sich selbst garnicht ihm entsprechend zusammensetzen, d. h. sich nicht subtrahiren, sondern addiren. Hiebei sei daran erinnert, mit welchen Mysticitäten und wie nebelhaft sich Gauss bei seiner imaginären Graphik um irgend einen Gedanken umhertrieb und bemühte, durch den er die Entfernung eines Punktes vom Ursprung der Coordinaten, bei Voraussetzung einer imaginären Coordinate, vorstellig machen möchte. Er verfehlte die Sache vollständig, indem er die Summe der beiden Coordinaten, also $x + y\sqrt{-1}$ für das Maass der fraglichen Entfernung erklärte. So hatte er keine Ahnung davon, wohin eine wirklich rationelle Imaginärtheorie führen könnte und nunmehr geführt hat.

Die Betrachtung und Bestimmung irgend welcher Linien oder geometrischer Verhältnisse in der adjungirten Curve kann ebenso, wie vorher am Beispiel des Radiusvector gezeigt worden ist, mit den entsprechenden Gebilden in der Ausgangscurve aus einerlei analytischem Gesichtspunkt, d. h. nach Maassgabe derselben Gleichung, geschehen. Hiedurch liefert die ganze Geometrie der einen Curve, vermittelst der dem Imaginären und Imaginativen entsprechenden Abänderungen, auch die ganze Geometrie der andern

Curve. Die Geometrie des Kreises schliesst also die der gleichseitigen Hyperbel ein, sobald man analytisch die Kreisgleichung zu Grunde legt und Alles an der Hyperbel, wo erforderlich, durch imaginative Grössen bestimmt, deren absoluter Sinn alsdann ebenso exact und auf analoge Weise die wirklichen räumlichen Verhältnisse liefert, wie etwa im Bereich des gemeinen Gegensatzes von positiv und negativ eine negative Coordinate auch ihren absoluten räumlichen Sinn hat. Uebrigens giebt es auch in der gewöhnlichen Geometrie kein Verhältniss, an welchem man nicht Rechnungsbeziehungen aussondern und welches man daher nicht auch analytisch behandeln könnte. Die Correspondenz in den Doppelgebilden ist daher eine vollständige und umfassende; sie gilt für die niedere, wie für die höhere Geometrie, für das gemeiniglich nicht analytisch und für das analytisch Behandelte.

In erster Linie hat man aber dabei an das zu denken, was in den Cursen der Analysis den Inbegriff der Anwendungen der Analysis auf die Geometrie auszumachen pflegt. Die Ziehung der Tangenten und Normalen, die Bestimmung der Krümmungen und Krümmungshalbmesser, sowie der Evoluten, überdies auch im Allgemeinen die Angabe der geometrischen Maxima und Minima, wozu wir auch noch die sonstigen Stetigkeitseinschnitte, also in unserm Sinne die Durchgänge durch Null und das Unendliche fügen könnten; alsdann das gesammte Bereich, aus dem wir schon unsere Beispiele wählten, nämlich das der Quadraturen und Rectificationen; — alles dies erledigt sich durch das Imaginäre und das Imaginative auch für das jedesmal adjungirte Gebilde. Analytisch ist dabei nichts weiter nöthig als die Substitution des Imaginären und die Festhaltung gewisser Functionen des Imaginärzeichens als imaginativer Signirungen. Auch die absoluten geometrischen Sätze kann man anwenden wie man will, wenn man nur zugleich die Signirungen der vorkommenden Linien consequent mitberücksichtigt und die einschlagenden Unterscheidungen auch in ihren weiteren Folgen sichtbar erhält.

8. Wenn wir bisher hier nur von der Ebene geredet haben, so ist dies der Vereinfachung wegen geschehen. Es versteht sich, dass unser früheres Schema von der Kugel und den beiden gleichaxigen Hyperboloiden auch überhaupt der Ausgangspunkt für imaginäre und imaginative Correspondenzen im Raume ist. Man kann also Tangirungsebenen, Normalen, Flächenkrümmungen,

Quadraturen von Oberflächen und Kubaturen auch zusammen für ein Doppelgebilde erledigen oder, was dasselbe heisst, die Formeln entsprechend imaginär oder imaginativ abändern. Fassen wir demgemäss das Bisherige nur im Hinblick auf die wichtigsten geometrischen Gebilde zusammen, so lässt sich sagen, dass die Geometrie der Kegelschnitte und diejenige der Flächen zweiten Grades vermittelst des Imaginären und des Imaginativen eine bisher nie erreichte Einheitlichkeit gewinnt. Denken wir uns aber das allgemeine Bereich der höhergradigen und der transcendenten Curven und Flächen, so gilt auch hier dieselbe Erweiterung und Uebertragung der Eigenschaften und Beziehungen von dem unmittelbaren auf das imaginäre und imaginativ angeschlossene Gebilde.

Die Analysis und Geometrie, wie sie bis heute ohne unsere neuen Grundmittel sich ausnahm, kannte nur eine einzige Art und einen einzigen Fall, verschiedene Curven- und Flächenspecies derselben Gattung analytisch zusammenzufassen. Dies fand sich nämlich dann, wenn man statt von der Geometrie von der Analysis, d. h. von einer allgemeinen, vollständigen, mit allen Nebenumständen behafteten Gleichung ausgehen konnte. Stellte man also z. B. die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen auf, so steckte natürlich in dieser Form Alles, was an einzelnen Typen in den eigentlichen Specialgleichungen der einzelnen Kegelschnitte vorkommen kann. Die ganze Manipulation, die allerlei Ausmerzungen und Constantenveränderungen erfordert, ist aber ziemlich unfruchtbar; denn sie zeigt das Einfache unter der Gestalt des Verwickelten, belastet die Coordinaten mit willkürlichen Abständen und liefert daher auch unmittelbar nicht Mittelpunktsgleichungen. Wie ein Gebilde aus dem andern entstehen könne, wird dabei ebenfalls nicht klar; denn es vollzieht sich nur eine Eintheilung oder sozusagen Gliederung des Allgemeinen, aber kein Uebergang von einem Gliede zum andern. Für letztern hatte die bisherige Analysis allerdings einen Anfang in den Null- oder Unendlichsetzungen gewisser Constanten, — ein Verfahren, welches jedoch durch die falschen Unendlichkeitsbegriffe übel afficirt wurde und so der gehörigen Strenge fern blieb. Wir dagegen haben nicht nur letztere Uebelstände durch die Rationalisirung der Unendlichkeitsbegriffe mitweggeschafft, sondern durch die Imaginärtheorie auch eine neue Brücke geschlagen, vermöge deren nun, wenn man die Null-

setzungen und Unbegrenztsetzungen von Constanten hinzunimmt, der Weg von einem Specialgebilde zum andern in jeder Richtung zurückgelegt werden kann. So ergiebt sich beispielsweise für die verschiedenen Species von Kegelschnitten ein System rationeller Verwandlungen, in welchem die Stetigkeitseinschnitte auch da nicht hindern, wo das Reelle aufhört und demgemäss ein imaginäres Gebilde anzuschliessen und in die Reihe der constructiven Transformationen einzuschalten ist. Geht man vom vollständigsten und zugleich übersichtlichsten Specialgebilde, nämlich der Ellipse aus, so genügt bekanntlich die Nullsetzung der Excentricität, um zum Kreise, die Unbegrenztsetzung der grossen Axe, um zur Parabel zu gelangen. Um aber zur Hyperbel überzugehen, ist unsere imaginäre Fortsetzung erforderlich. Hiemit hat man denn aber auch zusammen mit den andern Operationen den ganzen stetigen Zusammenhang zwischen allen Species und Subspecies der Kegelschnitte, wobei sich die Einschnitte der Stetigkeit nach bestimmten Regeln markirt finden. Entsprechendes gilt natürlich von den Flächen zweiten Grades, bei denen bereits die Mannigfaltigkeit eine grosse wird. Bedenkt man aber, wie die Methode der imaginären Adjungirung und Ueberbrückung an sich im Grade und in der Transcendenz der Gebilde keine Schranken hat, und wie mit den höheren Formen die Vielgestaltigkeiten und Uebergangswege sich vermehren, so wird man ermessen, von welcher Tragweite die Ueberbrückung der bisherigen Kluft sein müsse.

Fünfzehntes Capitel.

Ausgangspunkte zu einer neuen Lehre von allgemeinen Functionseigenschaften.

1. Was sich gegenwärtig unter dem wenig bezeichnenden Namen allgemeine Theorie der Functionen, besonders als Einleitung zu Tractaten über specielle Functionen, antreffen lässt, — ein Artikel, zu welchem Cauchy seiner Gewohnheit gemäss eine Anzahl neuer Benennungen ohne gehörigen Gehalt beigesteuert hat, — ist nicht nur im Ganzen kümmerlich ausgefallen, sondern

auch noch besonders dadurch verkümmert, dass die imaginäre Graphik mit oder ohne Masken darin überall ihr Wesen treibt. Es lässt sich demgegenüber etwas Höheres schaffen, welches über all den Kleinigkeiten steht, auf die man sich heute etwas zugutethut. Ein Hauptnerv zur Sache war lange vor Cauchy, nämlich schon bei Lagrange, der Beweis der Grundthatsache, dass sich ein Polynom $n$ten Grades in n lineare Factoren zerlegen lasse. Mit diesem Satz gleichwerthig ist der, dass eine algebraische Gleichung wenigstens eine Wurzel habe, d. h. dass, wenn $f(x) = 0$ gegeben ist, sich die Function $f(x)$, insofern sie algebraisch ist, umkehren, nämlich $x = \varphi(p, q, r, \ldots)$ darstellen lasse. An jenem Satz hat nun auch Gauss mit verschiedenen Beweisvarianten als junger Mann geklaubt und seine angeblich strenger seinsollenden Wendungen nach fünfzig Jahren als alter Mann wieder vorgebracht. Grade bei diesem Thema hat er die imaginäre Graphik angebracht. In der That sieht sich aber der ganze Vorgang sofort etwas natürlicher an, wenn man dahinter kommt, dass die übrigens bisher sehr unvollkommen gebliebene Manier, die Wurzeln in ihrer allgemeinen, imaginär gemischten Gestalt stetig zu verfolgen und durch Veränderungen aus einander hervorgehen zu lassen, aus der Theorie der numerischen Gleichungen stammt, für die wiederum Lagrange die weitreichendsten Beiträge geliefert und die auch bis heute noch verhältnissmässig ausgiebigste Form geschaffen hat. Die Umkehrungen sind im Allgemeinen transcendent, und die algebraischen Gestaltungen derselben nur Specialfälle. Solange man also an specifisch algebraischen Formen haften wollte, könnte man nichts völlig Allgemeines erreichen. Hieraus begreift sich auch, dass nur die Zahlengleichungen die erste Veranlassung geben konnten, die Grössenwerthe der Wurzeln ohne Rücksicht auf die algebraische Form in Betracht zu ziehen. Der einzige Rest von anscheinend blos algebraischer Natur bleibt die binomisch imaginäre Form; in Wahrheit ist diese aber den algebraischen und den transcendenten Functionen gemeinsam.

Wir wollen uns nun mit jener Kleinigkeit, die wesentlich schon von Lagrange klar erledigt war und nicht erst auf die Gaussischen Verkünstelungen und Umnebelungen zu warten hatte, nicht für sich allein abgeben, sondern die Aufgabe, wie es sich nunmehr heute auf Grund unseres Systems gebührt, umfassender stellen und so in denkbar grösster Allgemeinheit er-

ledigen. Wir wollen ganz von der algebraischen Function absehen, d. h. überhaupt eine beliebige Function zu Grunde legen und für diese beweisen, dass sie jedenfalls eine reell oder imaginär ausdrückbare Umkehrung zulasse. Diesen Beweis werden wir ohne imaginäre Graphik führen, womit sich dann auch überhaupt, da alle weitern Functionseigenschaften von diesem Grundverhältniss abhängen, die durchgängige Entbehrlichkeit und mithin Unstatthaftigkeit der imaginären Graphik von vornherein mitfeststellt. Es ist alsdann nicht mehr blos die Gaussische Metaphysik zur Graphik, sondern auch die rationalisirte Graphik selbst, die im Interesse einer gesunden, d. h. homogen analytischen Methode verworfen werden muss. Ja noch mehr; schon die modulirte Form der binomischen Imaginären ist für diese allgemeinen Fragen zu speciell und wird daher von uns aus dem Schlussgange ferngehalten. Sie ist es übrigens auch, die zu den thörichten und abgeschmackten Spielereien geometrischer Art Veranlassung gegeben hat; denn der Einheitswurzelgauss, der die Cosinus und Sinus ins Algebraische übersetzt hatte, wusste trotzdem nichts Anderes vorzunehmen, als immer wieder das Original, aus dem er übersetzt hatte, nämlich die Form mit Kreisfunctionen, allen Grössen ohne Kritik als Grundform unterzuschieben. Einen ordentlichen Sinn und Zweck hat aber diese Form nur da, wo es sich um ein erleichtertes Rechnen handelt, wie es mit einer Exponentialfunction möglich ist. Es ist aber offenbare Thorheit, ohne besondern Grund alle Grössen als Exponentialfunctionen behandeln zu wollen; denn eine allgemeine analytische Logarithmenrechnung will ebenso motivirt sein, wie die gemeine Logarithmenrechnung in Zahlen. Vollends erniedrigt sie den Abstractionsgrad allgemeiner Beweise, welche nicht mit Einmischung solcher zufälligen Formen, sondern nur durch diejenigen Begriffe geführt sein wollen, welche wesentlich sind.

Theils um uns über den gewohnten Stufengang nicht hinwegzusetzen, theils um die Eigenthümlichkeit der neuen Methode mehr hervortreten zu lassen, beginnen auch wir mit der algebraischen Function, aber nur als mit etwas Vorbereitendem, dem die Lösung des verallgemeinerten Problems zu folgen hat. Eine gewisse Formänderung der Aufgabe muss aber auch schon hier platzgreifen, damit die Gegenseitigkeit der Umkehrungen hervortrete. Nicht die Form $f(x) = 0$ ist die zweckmässigste, um etwa eine Umkehrbarkeit $x = \varphi(p, q, r, \ldots)$ darzuthun,

sondern es ist weit besser, das, worauf es bei dem Sachverhalt ankommt, dadurch zu fixiren, dass man von vornherein eine Gleichung $f(x, y) = 0$ zu Grunde legt, für welche $y = \varphi(x)$ und $x = \psi(y)$ als in reellen, rein oder gemischt imaginären Grössenwerthen zulässige Umkehrungen nachzuweisen sind.

Wenn also eine algebraische Gleichung zwischen zwei Veränderlichen gegeben ist, so kann man vermittelst unseres darzulegenden Verfahrens zu jedem beliebigen gegebenen Werth einer von beiden Veränderlichen einen reellen oder rein oder gemischt imaginären Werth der andern Veränderlichen bestimmen, welcher der fraglichen Gleichung genügt. Es sei also $z = f(x, y)$ eine reelle oder imaginäre, rationale oder irrationale, ganze oder gebrochene Function der Veränderlichen x und y. Wird nun $z = 0$ gesetzt und einer der beiden Veränderlichen ein beliebiger Werth beigelegt, so wird, wie wir jetzt nachweisen werden, jene Gleichung $f(x, y) = 0$ niemals schlechterdings unerfüllbar; d. h. es giebt immer irgend einen reellen, rein oder gemischt imaginären Werth der andern Veränderlichen, welcher der Gleichung genügt. Diese Thatsache ist aber keineswegs selbstverständlich; man könnte vielleicht, ehe sie bewiesen wird, im Gegentheil vermuthen, dass in gewissen Fällen die Voraussetzung eines Werthes der einen Veränderlichen, der einem gegebenen Werthe der andern entsprechen, d. h. der Gleichung zwischen beiden genügen soll, eine Unmöglichkeit enthielte, die noch über das Imaginäre hinausreichte. Man weiss, dass die analytischen Operationen in vielen Fällen auf reelle Weise nicht ausführbar sind, sondern rein und gemischt imaginäre Grössen liefern; sollte es nicht möglich sein, könnte Jemand meinen, dass bei complicirteren Operationen noch andere Unmöglichkeiten zu Tage träten? In diesem Fall würden die sich hiebei ergebenden unmöglichen Grössen nicht mehr imaginär, sondern ultraimaginär zu nennen sein, da die erstere Bezeichnungsweise auf alle diejenigen unmöglichen Grössen beschränkt ist, die entweder als rein imaginäre auftreten oder sich auf die binomische Form bringen lassen. Jene Frage soll jetzt zunächst hinsichtlich der den algebraischen Gleichungen entspringenden Grössen und sodann ganz allgemein entschieden werden, und wir werden hiebei alle diejenigen Grössen, die nicht über das Gebiet der binomisch imaginären hinausreichen, die rein imaginären und die reellen also miteingeschlossen, der Kürze wegen intraimaginäre nennen.

2. Es ist bei unserm Raisonnement gleichgültig, welche der beiden Veränderlichen man als unabhängig gegeben, also als Argument und welche man als Function betrachte, da die Vertauschung ihrer Rollen die Form der Gleichung unverändert lässt und die Beziehung daher von der nämlichen Art bleibt. Wir werden daher x als unabhängig und gegeben und y als davon abhängig ansehen. Es ist nun streng zu beweisen, dass y irgend einen intraimaginären Werth hat, wenn für x ein solcher gegeben ist. Unser Beweis beruht auf einem Stufengange, vermöge dessen er für eine Function höheren Grades sich darauf gründet, dass er für die Functionen niedrigeren Grades festgestellt ist. Die Aufgabe, den Werth der einer algebraischen Gleichung impliciten Function zu bestimmen, fällt nämlich mit derjenigen zusammen, die Wurzel einer algebraischen Gleichung zu finden, da diese als eine implicite Function eines ihrer Coefficienten angesehen werden kann. Wir werden voraussetzen müssen, dass unser Satz für alle Gleichungen festgestellt ist, die von niedrigerem Grade sind als diejenige, für welche er bewiesen werden soll. Da derselbe aber für lineare Gleichungen als bekannt vorauszusetzen ist, so gilt der Beweis für die quadratischen Gleichungen; findet der Satz aber auf lineare und quadratische Gleichungen Anwendung, so lässt sich der Beweis auch auf die kubischen ausdehnen u. s. f. Der angekündigte Satz braucht überdies unmittelbar nur dann bewiesen zu werden, wenn die Gleichung zwischen x und y eine rationale und ganze ist. Denn bei einer gebrochenen Gleichung ist es blos erforderlich, die linke Seite auf einen gemeinschaftlichen Nenner zu bringen und diesen dann zu unterdrücken, um eine ganze Gleichung zu erhalten; eine irrationale Gleichung aber ist mit allen übrigen Signirungswerthen ihrer linken Seite zu multipliciren, wodurch die linke Seite nach den Ausführungen der vierten Nummer des siebenten Capitels rational wird, während die rechte Seite unverändert bleibt, da sie Null ist. Es sei also $f(x, y) = 0$ eine algebraische, rationale und ganze Gleichung und für x der Werth x_1 gegeben. Geben wir y willkürlich den Werth y_1, so wird die Function $f(x, y)$ den endlichen Werth z_1 haben, so dass man die Gleichung $f(x_1, y_1) - z_1 = 0$ hat. Hierin lasse man x constant sein, und behandle sie so, als wenn sie eine Gleichung zwischen y und z wäre, für die ein Werthepaar y_1 und z_1 gegeben ist. Durch den Zusatz einer kleinen Differenz dy zu y_1 verändert sich $f(x, y)$, wenn man die Kleinen höherer

Ordnungen vernachlässigt, um $\frac{df}{dy}dy$. Ein Zusatz von dz zu z_1, bringt eine Aenderung um $-dz$ hervor. Soll nun die Bedingung $f(x, y) = 0$ erfüllt werden, so muss auch $\frac{df}{dy} - dz$ gleich Null sein, woraus $dy = \frac{1}{\frac{df}{dy}} dz$ folgt. Da nun für z_1 ein Werth von y, nämlich y_1 gegeben ist, so kann man auch den $z_1 + dz$ entsprechenden Werth von y, nämlich $y_1 + dy$, finden. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens, d. h. durch Hinzufügung neuer Incremente, kann man so zu jedem Werth von z gelangen und dafür den entsprechenden Werth von y ermitteln und umgekehrt. Dieses Verfahren ist allerdings nur ein approximatives, weil wir dabei die Kleinen der höheren Ordnungen vernachlässigen. Aber da man die Incremente bei diesem Stufengange so klein machen kann, wie man will, wodurch der Fehler mindestens im quadratischen Verhältniss abnimmt, während er durch die grössere Anzahl der Stufen gleichzeitig nur im einfachen Verhältniss gehäuft werden kann, so kann auch der Fehler hiebei unbeschränkt klein, die Annäherung also unbeschränkt gemacht werden. Auch wird dieses Verfahren durch die Gleichung $y_2 - y_1 = \overset{z_2}{\underset{z_1}{S}} dy$ oder, wenn man die Differenzen dz und dy unbeschränkt klein macht, durch $y_2 = y_1 + \int_{z_1}^{z_2} \frac{dy}{dz} dz$ veranschaulicht.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass $\frac{df}{dy}$ einen endlichen Werth habe. Einen unendlich grossen Werth kann nun die Ableitung einer ganzen Function von endlichen Grössen in keinem Fall annehmen; sollte aber die erste Ableitung von f in Beziehung auf y einen Nullwerth haben, so werden wir ihren Werth vollständig entwickeln und erhalten so, indem wir die Entwicklung gleich Null setzen, eine Gleichung zwischen dy, dz und den bekannten Grössen. Hiebei wird dy jedoch höchstens bis zur $n$ten Potenz darin enthalten sein, wenn die Function $f(x, y)$ vom $n$ten Grade in Beziehung auf y ist. Kommen ausser der $n$ten Potenz noch andere Potenzen von dy, deren Coefficienten nicht zu Null werden, in der Gleichung vor, so werden wir jene vernachlässigen können, indem wir dx und auch damit dy unbeschränkt-

klein setzen. Zur Bestimmung von dy ist alsdann die Auflösung einer Gleichung von höchstens $(n-1)$tem Grade erforderlich; derselbe Fall tritt ein, wenn die $n$te Potenz von dy in der Gleichung überhaupt nicht vorkommt. Kommt sie aber allein vor, so ist sie auf lineare Weise daraus bestimmbar und durch Ausziehung der $n$ten Wurzel erhält man dann den Werth von dy. Da wir also zu einem unbeschränktkleinen Werth von dz den entsprechenden Werth von dy auch dann finden können, wenn die partielle Ableitung erster Ordnung von $f(x, y)$ in Beziehung auf y Null wird, so findet die obige Schlussfolgerung ebenfalls Anwendung. Man kann daher auch hier durch Hinzufügung unbeschränktkleiner Incremente von einem gegebenen Werthepaar von z und y zu jedem andern Werthepaar übergehen. Diese Incremente kann man überdies positiv, negativ, rein oder gemischt imaginär nehmen, so dass es hienach möglich ist, zu jedem intraimaginären Werth von z einen intraimaginären Werth von y zu finden, welcher der Gleichung $f(x, y) = 0$ genügt. Für unsern Zweck ist es jedoch hinreichend, dass dem Nullwerth von z ein Werth von y entspreche, welcher der Gleichung $f(x, y) - z = 0$, also auch der Gleichung $f(x, y) = 0$ genügt. Hat man also in diese Gleichung einen beliebigen intraimaginären Werth von x eingesetzt, so kann man den zugehörigen intraimaginären Werth von y auf die vorher angegebene Weise berechnen. Hiemit ist der angekündigte Satz bewiesen. Derselbe lässt sich auch auf eine Gleichung zwischen mehr als zwei Veränderlichen ausdehnen. Sieht man nämlich eine derselben als Function der übrigen an und lässt von letzteren sich zuerst eine verändern, während die andere constant bleibt, dann eine andere u. s. f., so erhält man durch dasselbe Verfahren wie oben zu jeder Werthecombination der als Argumente angesehenen Veränderlichen einen Werth der Function.

Aus dem nun festgestellten Satz, dass jede in einer algebraischen Gleichung enthaltene Grösse dieser Gleichung durch irgend einen intraimaginären Werth oder, in abgekürzter Ausdrucksweise, durch einen Intrawerth genügen muss, wenn die Werthe aller andern darin enthaltene Grössen bestimmt und gegeben sind oder, mit andern Worten, dass jede algebraische Gleichung irgend eine (intraimaginäre) Wurzel haben muss, folgt zunächst, dass jede Function, die dadurch bestimmt ist, dass für ihr Argument eine convergente, nach den Potenzen der Function fortschreitende Reihe gegeben ist, für jeden Intrawerth ihres Arguments irgend einen

Werth von ebenfalls intraimaginärem Charakter hat. Ist die Reihe nämlich endlich, so ist die fragliche Function damit als Wurzel einer algebraischen Gleichung gegeben und besitzt also nach den obigen Ausführungen die genannte Eigenschaft. Die Anzahl der Glieder kann hiebei so gross sein, wie sie will, da der oben bewiesene Satz auf jede Gleichung von noch so hohem Grade Anwendung findet. Haben wir jedoch den Fall einer unendlichen Reihe, so wird durch Summirung einer endlichen, aber unbeschränkt gross nehmbaren Zahl von Gliedern das Argument mit unbeschränkter Annäherung als eine algebraische Function seiner Function dargestellt; deshalb muss sich auch der sich hiebei ergebende, stets intraimaginär bleibende Annäherungswerth für die Function dem wahren Werth unbeschränkt annähern, und dieser ist deshalb nothwendig ebenfalls intraimaginär, was bewiesen werden sollte.

3. Jeder Function, von der wir uns eine Vorstellung machen können, liegt eine Operation oder ein System von Operationen zu Grunde, vermöge deren aus einer oder mehreren Elementargrössen eine andere Grösse abgeleitet wird, die zu jenen dann im Verhältniss der Function zum Argument steht. Alle analytischen Operationen aber sind zunächst Additionen; durch Zusammensetzung entstehen daraus Multiplication, Potenzirung, Bildung von algebraischen, rationalen und ganzen Functionen; verbindet man hiemit diejenige Operation, welche in der Umkehrung einer gegebenen Operation besteht, so erhält man die Operationen der Division, Wurzelausziehung und der Lösung algebraischer Gleichungen. Durch alle diese Operationen treten aber, wie nachgewiesen, keine andern Unmöglichkeiten zu Tage, als diejenigen, die in $\sqrt{-1}$ liegen. Zu den genannten kommt nun eine transcendente Operation hinzu, die in der Aufsuchung von Grenzwerthen besteht, wie sie z. B. bei der Summation unendlicher Reihen, der Berechnung unendlicher Kettenbrüche, bei der Differentiation und Integration statthat. Diese Operirweisen können aber offenbar nie zu andern Unmöglichkeiten führen, als es diejenigen Operationen thun, in deren beständiger Fortsetzung sie bestehen. Ultraimaginäre Grössen könnten also, wenn überhaupt, nur noch aus der Umkehrung complicirterer Operationen oder aus der Auflösung von Differentialgleichungen hervorgehen, weil in letzterem Falle es sich um eine unbekannte Functionsbeziehung handelt, die gewissen Bedingungen genügen soll, während in den

andern Fällen die Unbekannte die blos numerisch zu bestimmende Wurzel einer Grössengleichung ist.

Es ist hienach nöthig, behufs weiterer Untersuchung die Functionen in zwei Classen zu theilen, nämlich erstens solche, die Wurzeln von Grössengleichungen, und zweitens solche, die Wurzeln von Functionsgleichungen sind. Unter einer Functionsgleichung verstehen wir eine Gleichung, welche die Beziehung zwischen dem Werthe der Function und dem Werthe ihres Arguments nicht direct ausdrückt, sondern durch gewisse allgemeine Eigenschaften definirt. Es sei z. B. $y = E(x)$ eine unbekannte Function und sie werde durch die Bedingung, dass für alle Werthe von x und x' $E(x + x') = y . y'$ sein soll, näher bestimmt. Diese Bestimmungsweise nennen wir dann eine Functionsgleichung, weil durch dieselbe nicht zu einem bestimmten Werth von x ein bestimmter Werth von y gefunden werden kann, sondern weil man aus ihr zuerst die allgemeine Beziehung zwischen jedem Werth von x und dem entsprechenden von y zu entwickeln hat; diese Beziehung ist bekanntlich $y = a^x$. Es ist also die Form der Function oder das Wesen der allgemeinen Beziehung zwischen der Function und ihrem Argument, welches die Auflösung der Functionsgleichung liefert. Diese Form der Function ist durch die Functionsgleichung aber noch nicht gegeben, sondern muss aus derselben erst gefunden werden. Unter einer Grössengleichung verstehen wir dagegen jede Gleichung, in der zu einem beliebigen Werth einer darin enthaltenen Grösse ein bestimmter der andern Grösse gehört und durch welche deshalb die Beziehung zwischen den beiden Grössen schon bestimmt ist, während sie bei der Functionsgleichung erst gefunden werden muss. Der allgemeinste Typus einer Grössengleichung ist die Gleichung $f(x, y) = 0$, wobei die Function f nur gegebene Operationen und Coefficienten einschliessen darf. Die Aufgabe, eine solche Gleichung aufzulösen, fällt mit derjenigen zusammen, die Umkehrung einer gegebenen Function, d. h. die Umkehrung der Operation oder des Systems von Operationen zu suchen, durch welche die Function $y = \varphi(x)$ aus ihrem Argument x entsteht. Bezeichnen wir nämlich mit ψ eine Function von solcher Beschaffenheit, dass, wenn man $y = \varphi(x)$ hat, $x = \psi(y)$ ist, so ist die Function φ dabei die Umkehrung der Function ψ, wie diese die Umkehrung jener ist, und jeder der durch diese Zeichen angedeuteten Operationscomplexe macht den andern rückgängig.

Eine Function ist umkehrbar, wenn sich zu jedem gegebenen Werthe, den die Function haben soll, ein zugehöriger Werth des Arguments ableiten lässt. Letzteres ist aber, wie man weiss, reell nicht immer möglich, z. B. wenn man eine Zahl finden soll, deren Quadrat negativ, oder einen Winkel, dessen Sinus grösser als 1 sein soll. Hiedurch entsteht das Imaginäre, und es ist keine Selbstverständlichkeit oder Trivialität, sondern eine erst zu beweisende höchst merkwürdige Thatsache, dass jede Unmöglichkeit, auf die man bei der Umkehrung von Rechnungsoperationen stösst, sich auf die Unmöglichkeit von $\sqrt{-}$ zurückführen lässt. Wir wollen jedoch hier eine Operation umkehrbar nennen, die auf einen intraimaginären Werth des Arguments führt, so dass wir nur dann von Nichtumkehrbarkeit zu reden hätten, wenn auch jene Zurückführung nicht möglich wäre und sich ultraimaginäre Grössen ergäben. Es ist nun leicht zu sehen, dass die Auflösung einer Grössengleichung $f(x, y) = 0$ einerlei ist mit der Umkehrung der Operationen, die das Functionszeichen f andeutet. Giebt man nämlich x einen bestimmten Werth und setzt $f(x, y) = \varphi(y) = z$, so ist $y = \psi(z)$, und indem man $z = 0$ setzt, erhält man $y = \psi(0)$ als den der Gleichung $f(x, y) = 0$ und dem betreffenden bestimmten Werth von x entsprechenden Werth von y.

Zu den Functionsgleichungen gehören zunächst die Differentialgleichungen; überdies muss sich jede durch eine Functionsgleichung definirte Function, wenn nicht auf eine einfache Grössengleichung, so doch auf eine Differentialgleichung zurückführen lassen, da jede denkbare Function durch die Gesetze ihrer Veränderung vollkommen bestimmt ist und diese durch die Beziehungen der Function zu ihren Ableitungen völlig erschöpft werden müssen. Jede einer Differentialgleichung implicite Function kann man aber nach der Taylorschen Reihe entwickeln, sobald man das höchste darin vorkommende Differential daraus als Function der übrigen ableiten kann, so dass die Behandlung der einer Functionsgleichung impliciten Function auf die Auflösung von Grössengleichungen und die Behandlung durch Reihen definirter Functionen zurückführbar ist. Sobald man also nachgewiesen hat, dass jede durch die Taylorsche Reihe mit intraimaginären Coefficienten definirte oder einer Grössengleichung implicite Function niemals ultraimaginär werden könne, ist auch festgestellt, dass alle analytischen Operationen und Gleichungen stets intraimaginär ausführbar, beziehungsweise auflösbar sind.

Die Auflösbarkeit aller Grössengleichungen ist hienach festgestellt, sobald man sie unter der Voraussetzung erwiesen hat, dass die in der Gleichung selbst enthaltenen Operationen intraimaginär ausführbar sind. Denn wären sie es nicht, so müssten sie nach unsern Darlegungen wiederum durch eine Grössengleichung gekennzeichnet werden können; enthielte diese dann selber unausführbare Operationen, so müsste dies so weiter fortgehen, bis man schliesslich auf einfache Operationen käme, welche intraimaginär ausführbar sind; das Fortgehen ins Unendliche wäre absurd und folglich auch die Voraussetzung der intraimaginären Unausführbarkeit.

Jede Function, mag sie nun intraimaginär sein oder als ultraimaginär fingirt werden, muss sich nach der Taylorschen Reihe entwickeln lassen. Der allgemeinste Begriff der Function ist der einer Grösse, die zu einer andern Grösse in einer bestimmten Beziehung steht, mag diese Beziehung nun möglich sein oder eine Unmöglichkeit zum Ausdruck bringen. Man hat nicht nöthig, vorauszusetzen, dass diese Beziehung auf analytischen Operationen beruhe. Wir werden jedoch zeigen, dass die quantitative Beziehung zwischen Function und Argument stets auch analytisch, nämlich wenigstens durch die Taylorsche Reihe, ausgedrückt werden könne. Bei jeder Function giebt es stets eine stetige Reihe von Werthen des Arguments, der eine stetige Reihe von Werthen der Function entspricht, die nach demselben Gesetz aus ihr entstehen. Denn wäre die Function auch noch so oft unstetig, so muss es doch immer eine, wenn auch noch so kleine Strecke von Argumentwerthen geben, innerhalb deren sie stetig bleibt; denn wenn auch dies nicht der Fall wäre, müsste sie auf jeder Strecke unendlich viele Sprünge machen, was nach dem Gesetz der bestimmten Anzahl absurd ist. Innerhalb des durch diese stetige Argumentwerthreihe gegebenen Gebiets muss dann die Function endliche Werthe haben, für welche ihre Differentialcoefficienten endlich sind, weil im andern Fall eine unendliche Zahl besonderer, nämlich unendlichgrosser Werthe der Ableitungen vorhanden wäre, was gleichfalls dem Gesetz der bestimmten Anzahl widerspricht; auch könnte ein Differentialquotient nicht für die ganze Strecke stetig unendlich bleiben, wie wir weiter unten zeigen werden. Hat also die Function für einen endlichen intraimaginären Werth ihres Arguments endliche intra- oder ultraimaginäre Werthe der Ableitungen, so lässt sie sich nach der Taylorschen Reihe entwickeln, also analytisch ausdrücken. Wenn

überdies die Function für die betreffende Werthereihe intraimaginär ist, so müssen es auch ihre Ableitungen, also auch die Coefficienten der Reihe sein.

Um nun zu zeigen, dass jede noch so complicirte analytische Operation nicht zu ultraimaginären Werthen führen könne, ist es nöthig zu beweisen: erstens dass die Umkehrung jeder intraimaginären Function nach der Taylorschen Reihe mit intraimaginären Coefficienten entwickelbar ist, wenn letzteres auch bei der directen Function der Fall ist; zweitens dass die Umkehrung jeder durch eine differentielle oder eine sonstige Gleichung bestimmten Function Wurzel einer andern Gleichung von nicht verwickelterer Natur ist, die aus jener stets abgeleitet werden kann; drittens dass jede im Allgemeinen nach der Taylorschen Reihe mit intraimaginären Coefficienten entwickelbare Function mindestens einen intraimaginären Werth für jeden beliebigen intraimaginären Werth des Arguments hat. Es ist hiebei zu berücksichtigen, dass alle analytischen Grössen entweder Elementargrössen und als solche reell sind oder aus den Elementargrössen durch die oben genannten mathematischen Operationen entstehen. Imaginäre Grössen können nicht entstehen, solange die Operation der Umkehrung ausgeschlossen ist. Wir werden nun zunächst darlegen, wie auch die Umkehrung jeder durch eine Differentialgleichung oder eine Reihe definirten Function wieder durch eine Differentialgleichung bestimmbar beziehungsweise in eine Reihe entwickelbar ist. Es sei $y = \varphi(x)$ und $x = \psi(y)$, so ist die Function ψ die Umkehrung der Function φ. Ferner ist $\psi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\varphi'(x)}$. $\psi''(y)$ ist gleich $\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = -\frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^3}$. Analog findet man, dass die $n$te Ableitung von ψ einem Bruche gleich ist, in dessen Zähler sich ein aus der zweiten bis $n$ten Ableitung von $\varphi(x)$ zusammengesetzter Ausdruck befindet und dessen Nenner die $(2n-1)$te Potenz von $\varphi'(x)$ ist. Da man also die Ableitungen einer Function durch diejenigen ihrer Umkehrung ausdrücken kann, so kann man die Differentialgleichung, durch welche eine Function definirt ist, in die ihrer Umkehrung verwandeln, und ebenso kann man, wenn die Taylorsche Reihe für eine Function gegeben ist, aus deren Coefficienten diejenigen für die Umkehrungsreihe ableiten, ohne dass hiebei irgend welche neue Unmöglichkeiten eingeführt würden.

4. Ehe wir nun zeigen, dass jede nach der Taylorschen Reihe entwickelbare Function auch dann bestimmbar ist, wenn jene Reihe divergirend ist, sind noch einige Betrachtungen über die Natur aller denkbaren Functionen anzustellen. Die Functionen, welche in der Natur vorkommen, nebst denjenigen, welche die Mathematik erfunden hat, theilen sich in zwei Classen; solche, bei denen der Werth der abhängigen Grösse aus jedem Werth des Arguments nach demselben mathematischen Gesetze entsteht, und solche, bei denen dasselbe Entstehungsgesetz nur innerhalb gewisser Grenzen der Werthe des Arguments gilt, ausserhalb deren wieder andere Functionsbeziehungen statthaben. Die Eigenschaften der Functionen der zweiten Art, die wir wechselnde oder variirende nennen werden, können erst gefunden werden, wenn man ihre Zusammensetzung aus denen der erstern Art oder den gleichbleibenden oder permanenten Functionen, wie diese von uns genannt werden sollen, sowie die Eigenschaften dieser letzteren kennt. Wir gehen deshalb zunächst an die Untersuchung der gleichbleibenden Functionen und zeigen zuerst, dass die Verbindung zweier gleichbleibender Functionsoperationen wieder eine gleichbleibende Function liefert, so dass, wenn $z = f(y)$ und $y = \varphi(x)$ gleichbleibende Functionen sind, auch $z = f\varphi(x)$ eine solche ist. Eine zusammengesetzte Operation kann sich nämlich offenbar nicht verändern, wenn die Bestandtheile und die Art ihrer Verbindung sich gleichbleiben. Hienach ist auch diejenige Function eine gleichbleibende, welche aus einer andern dadurch entsteht, dass man den reciproken Werth dieser nimmt; oder in Buchstaben, wenn man $\frac{1}{f(x)} = \varphi(x)$ setzt, so ist $\varphi(x)$ eine gleichbleibende Function, wenn es $f(x)$ ist, und umgekehrt, da das Nehmen des reciproken Werths eine sich gleichbleibende Operation ist. Aus diesem Grunde folgt eine Thatsache, von der wir weiter unten eine sehr wichtige Anwendung machen werden; es kann nämlich der Werth einer gleichbleibenden Function niemals für eine stetige Reihe von Werthen des Arguments unendlich werden; denn dann müsste der Werth der reciproken Function für die betreffende stetige Argumentwerthreihe Null, also constant sein; es widerspricht aber dem Begriff der gleichbleibenden Function, für gewisse Werthefolgen ihres Arguments constant und für andere veränderlich zu sein. Wäre sie aber für alle Werthe des Arguments constant, so wäre sie eben keine

Function. Da überdies dem Begriffe der gleichbleibenden Function gemäss jede ihrer Ableitungen entweder constant oder ebenfalls eine gleichbleibende Function sein muss und auch nicht von der Richtung abhängen kann, nach welcher man sich das Argument verändern lässt, so kann auch keine Ableitung einer gleichbleibenden Function jemals für eine stetige Reihe von Argumentwerthen unendlich sein.

Sind bei einer gleichbleibenden Function $y = f(x)$ für einen Werth ihres Arguments ein nicht unendlich grosser Werth der Function, sowie ebenfalls nicht unendlich grosse Werthe für alle ihre Ableitungen gegeben, so kann man sie nach der Taylorschen Reihe entwickeln, da die Coefficienten der Taylorschen Reihe durch die Ableitungen der Function gegeben sind. Eine Function aber, die nicht für alle andern als blos vereinzelten Werthe eine in dem obigen Sinne ultraimaginäre Operation wäre, muss für irgend eine stetige Reihe von Werthen ihres Arguments endliche Werthe haben, da lauter unendliche Werthe, wie vorher gezeigt, keine stetige Reihe bilden können und lauter ultraimaginäre Werthe durch die gemachte Voraussetzung ausgeschlossen sind. Entsprechen aber einer stetigen Reihe von Werthen des Arguments endliche Werthe der Function, so kann auch das Differenziren keine unmögliche Operation sein und die Ableitungen der Function haben reelle oder imaginäre Werthe. Sie können, wie wir gezeigt haben, auch nur für vereinzelte Werthe des Arguments unendlich sein, und es giebt deshalb immer Werthe des Arguments, für welche die Function und alle ihre Ableitungen intraimaginäre Werthe haben. Hienach lässt sich also jede gleichbleibende Function, die nicht blos für vereinzelte Werthe des Arguments intraimaginär ist, nach der Taylorschen Reihe mit intraimaginären Coefficienten entwickeln, und wir werden jetzt zeigen, dass die Taylorsche Reihe für jeden intraimaginären Werth des Arguments wenigstens einen intraimaginären Werth der Function liefert. Ist die Reihe convergent, so ist dies ohne Weiteres ersichtlich. Ist sie aber nicht convergent, so ist das schon im zwölften Capitel gebrauchte Verfahren anzuwenden, den Weg von demjenigen Werth x des Arguments, für den die Werthe der Function y und aller ihrer Ableitungen gegeben sind, zu demjenigen Argumentwerth x', für den man den Werth y' der Function sucht, in hinreichend kleine Strecken einzutheilen, deren Grenzen wir mit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ bezeichnen werden, so dass $x = x_1$ und $x' = x_n$

ist. Wählt man nun die Differenz $x_2 - x_1$ so klein, dass die Reihe für $f(x_1 + h)$ convergent ist, wenn h den Betrag jener Differenz nicht überschreitet, so hat man für alle intraimaginären Werthe von x, die zwischen x_1 und x_2 liegen, die intraimaginären Werthe der Function durch die Reihe gegeben. Hierauf entwickelt man $f(x_1 + h)$ nach der Taylorschen Reihe und setzt dann die Differenz $x_3 - x_2$ so klein an, dass die Reihe für alle Werthe von h, die jene Differenz nicht überschreiten, convergent ist. Zu diesem Zweck muss man die Ableitungen der Function für den Werth x_2 des Arguments kennen. Diese entwickelt man ebenfalls nach der Taylorschen Reihe, wobei man freilich, da die Convergenzbreiten der Reihen für die Ableitungen in der Regel kleiner sind, als bei der Stammfunction selbst, die Wege, die x beschreibt, in noch kleinere Strecken wird theilen und dasselbe Verfahren anwenden müssen, das wir jetzt für die Stammfunction selbst gebrauchen. Hiedurch führt unser Verfahren freilich ins Unendliche, aber mit unbeschränkter Approximation zum Ziele. Da es sich übrigens hauptsächlich nur darum handelt, die intraimaginäre Beschaffenheit der Functionswerthe, aber nicht ihre Grösse zu zeigen, so genügt es, dass alle Ableitungen von x_2 nothwendig intraimaginär sein müssen, da es die Function für die stetige Reihe von Werthen, die zwischen x_1 und x_2 liegen, ist. Man erhält alsdann durch die Reihe auch für alle intraimaginären Werthe des Arguments, die zwischen x_2 und x_3 liegen, intraimaginäre Werthe der Function. So fortfahrend gelangt man zu dem Resultate, dass auch dem Werth x_n des Arguments ein intraimaginärer Werth der Function entspricht. Dieses Verfahren ist aber nicht fortsetzbar, wenn die Convergenzbreite der Reihe für einen Werth des Arguments Null wird. Der betreffende Werth ist dann zwar, wenigstens durch unbeschränkte Annäherung, erreichbar, aber nicht überschreitbar. Dieser Fall kann jedoch nur eintreten, wenn die Function oder eine ihrer Ableitungen für diesen Werth unendlich gross wird. Nun giebt es aber, wie im zwölften Capitel gezeigt wurde, da das Argument das ganze Gebiet aller intraimaginären Werthe repräsentirt, unendlich viele Wege, um von einem Werthe des Arguments zum andern zu gelangen, und unter diesen sind diejenigen, die durch Werthe führen, wo die Function oder ihre Ableitungen unendlich werden, nur vereinzelte. Nähme man im Gegentheil an, der Weg von x zu x' müsste nothwendig durch eine gewisse Anzahl solcher kritischer

Werthe führen, so theile man den Weg in ebensoviele Strecken ein, von denen jede durch einen kritischen Werth führt. Diesen kritischen Werth kann man aber umgehen, indem man sich ihm erst unbeschränkt nähert, dann durch Werthe, die ihm unbeschränkt naheliegen, um ihn gewissermaassen herumgeht und nachher den Weg in derselben Weise fortsetzt. Hiebei kann man auf keinen kritischen Werth stossen; denn wäre das Gebiet der intraimaginären Grössen, die dem kritischen Werth naheliegen, auch noch so dicht von kritischen Werthen erfüllt, so müssen dieselben doch dadurch vermieden werden, dass man unbeschränkt nahe um einen von ihnen herumgeht. Nur wenn die kritischen Werthe stetig aufeinander folgten, welche Thatsache sich aber, wie oben gezeigt, mit dem Begriff der gleichbleibenden Function nicht vertragen würde, wäre jenes nicht möglich. Da das Argument also auf seinem Wege jeden seiner kritischen Werthe umgehen kann, so ist der Durchgang durch solche nicht nothwendig, und die Convergenzbreite der Taylorschen Reihe wird nie Null. Das obige Verfahren muss also immer zum Ziele führen. Hieraus folgt dann der allgemeine Satz: Jede Function, die sich nach der Taylorschen Reihe entwickeln lässt, hat zu jedem intraimaginären Werth des Arguments einen intraimaginären Werth der Function. Nun muss, wie oben erwähnt, jede gleichbleibende Function, von der wir wissen, dass sie nicht blos für vereinzelte Werthe des Arguments intraimaginäre Werthe hat, nach der Taylorschen Reihe mit intraimaginären Coefficienten entwickelbar sein, und folglich ist jede Functionsoperation entweder nur für vereinzelte oder aber für alle Werthe des Arguments intraimaginär möglich; die Operationen aber, die auf Addition, Umkehrung und Grenzaufsuchung beruhen und sich aus diesen zusammensetzen, sind, wie nachgewiesen, immer intraimaginär möglich, und es bleiben nur noch diejenigen zu untersuchen, bei denen Function und Argument in einem analytisch nicht definirten Zusammenhange stehen. Gäbe es eine nicht auf analytische Operationen zurückführbare Beziehung zwischen Grössen, so dürfte hiebei nach Obigem der Werth der Function für gar keinen oder nur für vereinzelte Werthe des Arguments intraimaginär, müsste sonst aber wirklich ultraimaginär sein. Wo aber nur vereinzelte Werthe von Grössen in Functionsbeziehung ständen, da wäre eben keine allgemeine Operation vorhanden, wodurch sich die eine Grösse aus der andern ableitet, und die fingirten ultraimaginären Grössen

müssten deshalb undefinirbar sein. Da ferner eine wechselnde Function keine andern Ergebnisse liefern kann, als die gleichbleibenden, die sich in ihr folgen, so führt überhaupt keine Functionsoperation, von welcher Beschaffenheit sie auch sein möge, auf ultraimaginäre Grössen. Hiemit ist streng erwiesen, dass auch durch nichtanalytische Functionen nichts Ultraimaginäres entstehen kann, weil eine Beziehung, die solche Grössen hervorbringen möchte, absolut undefinirbar und folglich gar nicht denkbar sein würde, und zugleich ist dargethan, dass alle Functionsbeziehungen analytisch ausdrückbar sind, da sich jede, wie oben gezeigt, nach der Taylorschen Reihe entwickeln lassen muss.

5. Nachdem erwiesen ist, dass jede Function umkehrbar ist, ist der Satz, dass jede algebraische Gleichung wenigstens eine Wurzel hat, nur ein specieller Fall davon. Ist $\varphi(z) = 0$ und ψ die Umkehrung von φ, so wird z durch die Gleichung $z = \psi(0)$ bestimmt. Die Function ψ als Umkehrung der Function φ muss für jeden Werth, also auch für den Nullwerth ihres Arguments, einen intraimaginären Werth haben. Folglich hat jede algebraische Gleichung irgend eine reelle, rein oder gemischt imaginäre Wurzel, und ist dies erst festgestellt, so kann man auch sogleich zeigen, dass die linke Seite einer Gleichung in soviele lineare Factoren zerfällt, als der Exponent der höchsten Potenz der Unbekannten, also der Grad der Gleichung, Einheiten enthält. Daraus ergiebt sich dann, dass jede Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln hat, von denen einige oder alle einander gleich sein können. Der Beweis dieses Satzes gehört in die Elementaralgebra; er ist auch unabhängig von der Thatsache, dass jede Gleichung irgend eine intraimaginäre Wurzel haben müsse; denn, wenn auch letztere Voraussetzung nöthig ist, um zu zeigen, dass eine Gleichung nicht mehr als n solcher Wurzeln haben könne, so würde jener Satz doch dadurch nicht umgestossen werden, wenn die Gleichung keine Wurzeln haben könnte, weil sie dann doch ebenfalls nicht mehr als n hätte. Der Satz also, dass eine algebraische Gleichung höchstens n reelle oder imaginäre Wurzeln hat, ist rein elementar beweisbar; aber um zu zeigen, dass sie auch nicht weniger als n, seien es nun gleiche oder auch ungleiche, Wurzeln haben könne, sind Ausführungen der höhern Algebra nothwendig, und die vorangegangenen Auseinandersetzungen sollten dazu dienen, zwei neue und von willkürlichen Kunstgriffen freie Beweise dieses Hauptsatzes der Algebra zu liefern. Diese Beweise liefen beide darauf

hinaus, die Mangelhaftigkeit der Taylorschen Reihe zur Berechnung der Functionswerthe, wenn sie divergent wird oder unendlich grosse Coefficienten annimmt, durch ein geeignetes Verfahren zu überwinden, welches wir auch schon öfter angewendet haben und welches in allen Fällen, wo die Divergenz der Taylorschen Reihe störend ist, anwendbar sein wird. Der erste dieser Beweise zeigte die Auflösbarkeit jeder algebraischen Gleichung durch ein auf unbeschränkter Approximation und stufenweisem Fortschreiten von niedern zu höhern Gleichungen beruhendes Verfahren; der zweite leitete lediglich aus dem ganz allgemein gefassten Begriffe der Function ab, dass jede Unmöglichkeit, die in Functionsoperationen liegen möge, sich auf diejenigen zurückführen lasse, die im Negativen und Imaginären liegen. Daraus ergab sich die Möglichkeit der unbekannten, sei es algebraischen, sei es transcendenten Operationen, durch welche die Wurzel einer Gleichung aus ihren Coefficienten entsteht, als Specialfall.

Nach dem Vorangehenden ist nunmehr nicht blos von einem Fundamentalsatze der Algebra, sondern von einem obersten und leitenden Satz der gesammten Functionslehre zu reden. Dieser Satz spricht die intraimaginäre Umkehrbarkeit einer jeglichen analytischen Function aus, mag diese nun explicit oder nur implicit gegeben sein. Er bedeutet also zugleich die intraimaginäre Lösbarkeit einer jeden Functionsgleichung. Auch liegt in ihm die Thatsache, dass sich jeder Widerspruch, der in den quantitativen Abhängigkeiten zunächst unerkennbar angelegt sein mag, in dem Hervortreten des Imaginären oder auch des Negativen zeigen müsse und in keiner andern Weise zeigen könne. Die Zurückführung aller in die ursächlichen Grössenbestimmungen einschlagenden Unmöglichkeiten auf einfache signitive Unmöglichkeiten gewinnt nun aber ein weit anschaulicheres Interesse, sobald man bedenkt, was dieser zunächst abstract analytische Sachverhalt für den Sachverhalt aller Wirklichkeit der Dinge zu bedeuten habe. Den rein analytischen Functionen kann man überhaupt die Sachfunctionen entgegensetzen, zu denen alsdann bereits die geometrischen und die phoronomischen Functionen zu zählen sind, obwohl diese auch noch rein mathematische heissen müssen. Die Functionen, insofern sie mechanische Verhältnisse, d. h. Beziehungen materieller Kräfte ausdrücken, sind schon vollständige Naturfunctionen. Ausser den physikalischen

und überhaupt den in der Naturwissenschaft vorkommenden Grössenfunctionen hat man aber noch an diejenigen quantitativen Abhängigkeiten zu denken, die in die Culturwelt gehören, also beispielsweise für die socialen und wirthschaftlichen Beziehungen erheblich werden. Denkt man nun bei dem Worte Sachfunction an das gekennzeichnete, allesumfassende Bereich von Grössenfunctionen, so gilt auch hier unser Grundgesetz von der signitiven Ausdrückbarkeit jedes hier vorkommenden Unmöglichen, sobald wir voraussetzen, dass sich jegliche, in ihrer näheren Gestaltung noch so unbekannte Sachfunction müsse auf eine analytische Form bringen lassen.

Letzteres ist nun in der That in dem Sinne der Fall, dass eine jegliche in der Wirklichkeit sachlich durch irgendwelche ursächliche Beziehungen vermittelte Grössenabhängigkeit nur rein abstract gedacht zu werden braucht, um nichts weiter übrig zu lassen, als den Begriff von allgemeinen Grössen, d. h. Zahlgrössen, die nach Regeln und zwar nach Rechnungsregeln auseinander erzeugt und durcheinander bestimmt werden. Etwas Anderes ist aber der Begriff der analytischen Function eben auch nicht. Jede Sachfunction ist daher grade insofern reine Grössenfunction, als sie analytische Function ist, und das quantitativ Functionelle an ihr besteht eben in der Art, wie die Natur summirt oder sonst das unsern Rechnungsoperationen Entsprechende vollzieht. Auch ist es nicht nöthig, dass man im besondern Falle die analytische Function, d. h. die Realfunction, die einer in der Wirklichkeit vorhandenen Grössenabhängigkeit entspricht, thatsächlich angeben könne. Es ist genug, zu wissen, dass sie vorhanden sein müsse; denn die effective Angabe ihrer Constitution hängt von dem jedesmaligen Grade ab, in welchem man in die Gesetze und das Verhalten der Natur oder der sonstigen Wirklichkeit eine zutreffende, und wenigstens theilweise deductive Einsicht gewonnen hat. Auch liegt nicht einmal immer etwas daran, solche Functionen, namentlich wenn sie sehr complicirt sind, unmittelbar und individuell in ihren verschiedenen Bestandtheilen und in ihrer detaillirten Verfassung zu kennen. Wohl aber ist es von höchstem Interesse, im Allgemeinen zu wissen, dass im Wesen der Dinge an Grössenbeziehungen nichts sein könne, was nicht auch, wenn es in abstracter Art gedacht würde, sich als analytische Function, d. h. als Rechnungsfunction erweisen müsste.

An unsern obersten Satz der Functionslehre und an das, was zu ihm gehört, hat sich nach unserm System nun erst das Speciellere über die allgemeinen Eigenschaften der Functionen, namentlich mit Rücksicht auf Bivariabilität der Argumente, anzuschliessen. Sonst beginnt man mit diesem Speciellen, da man die Fundamentalwahrheit in ihrer functionellen Allgemeinheit nicht kennt und überdies fälschlich der Meinung ist, die specifische Behandlung der Functionen von Bivariabeln sei die Hauptsache. Uns ist diese nur ein Nebenfall von zweiter Ordnung; denn wo vorgängige Umkehrungen vorausgesetzt werden können, was in einer sehr allgemeinen Weise möglich ist, verstand es sich für unsere Methode immer von selbst, jedes Argument von vornherein als intraimaginär, d. h. in seiner allgemeinen, sei es reellen, sei es imaginären oder gemischten Form vor Augen zu haben. Jeden Satz und jede Aufgabe machten wir gleich in dieser Allgemeinheit geltend, und hierauf beruhte auch unsere im zwölften Capitel verallgemeinerte und erweiterte Fassung und verbesserte Beweisart des Satzes von der Gleichgültigkeit des Integrationsweges. Ueberhaupt sind auch nöch andere Feststellungen in jenem Capitel, die sich auf den Lauf der Functionen beziehen, mit ihren veränderten Gesichtspunkten und Methoden als speciellere Fortsetzungen zu dem zu betrachten, was wir hier nur in den wichtigsten Ausgangspunkten, also grade in demjenigen Gebiet behandelt haben, welches bisher, abgesehen von dem beschränkten Algebrasatz, nur eine einzige grosse Lücke gewesen ist. Jedoch auch die herkömmlichen Specialien sind lückenhaft oder, was noch schlimmer ist, zum grössten Theil Ausfüllungen mit Spielereien. Auch in dieser Beziehung haben wir im zwölften Capitel einiges Nähere angegeben, und können demgemäss hier darauf verzichten, in die Hohlheiten der modischen Theorien vom Functionslauf einzugehen.

Indem wir unsere Grundmittel bis zu den angegebenen Specialitäten selber benützt haben, sind wir bereits an die Grenzen des für dieses Werk abgesteckten Rahmens gelangt. Weitere Ergebnisse aus den Grundmitteln gehören anderwärts hin. Unser Abschluss mit dem allgemeinsten Gesichtspunkt einer Functionenlehre entspricht auch der neu gewonnenen Vorstellung vom Gesammtbau der Mathematik, da es sich überall und durchgängig in höchster Abstraction um functionelle Beziehungen

handelt. Der Stufenbau der Mathematik wird uns im Folgenden jedoch noch einmal beschäftigen, nämlich dann, wenn wir aus dem Bisherigen die letzten Ergebnisse für Studien-, Lehr- und Forschungsmethoden gewinnen werden.

Sechzehntes Capitel.

Lernen und Lehren der Elemente.

1. Die ganze vorangehende Schrift kann in allen ihren principiellen und die Grundmittel betreffenden Darlegungen zugleich als eine Einleitung zur Reform des Studiums, der Forschung, der Mittheilungsart und der Lehrweise angesehen werden. Nur Einiges unter dem, was sie an specialistischen Erfindungen enthält, gehört nicht unter jenen allgemeineren Gesichtspunkt. Von solchen Vereinzelungen abgesehen ist aber die vorliegende Arbeit recht eigentlich ein Wegweiser, und zwar ist sie dies erstens überhaupt in Rücksicht auf die Fortsetzung des Weges, den die Geschichte der Mathematik seit länger als zwei Jahrtausenden zurückgelegt hat, und zweitens in Bezug auf die besondern Irrgänge, in denen sich grade die heutige Mathematik, namentlich in Folge ihrer übeln Berathung seit den letzten fünfzig Jahren, verwickelt findet. Es ist demgemäss nichts natürlicher, als dass wir unsere sachlichen Aufklärungen, neuen Grundmittel und Ausführungen auch mit einer Hinweisung darauf abschliessen, wie von dem neuen Standpunkt aus und auf Grund der neuen Mittel die Mathematik unter den heutigen Verhältnissen zu erlernen, in welchen Richtungen und in welchem Geiste sie zu pflegen und wie sie am zweckmässigsten darzustellen und zu lehren sei.

Der späteren Auflage des Werkes über die Principien der Mechanik ist am Schluss eine Studienanleitung beigefügt worden, die vornehmlich nur das mechanische und das angrenzende physikalische Gebiet im Auge hatte, aber zur Ergänzung auch die Erlernung der reinen Mathematik mitbehandelte. Hier handelt es sich nun ausschliesslich um die reine Mathematik; denn nur dieses enger begrenzte Gebiet passt zum Inhalt des vorliegenden

Buchs. Der heutige Zustand der wissenschaftlichen Arbeitstheilung weist den fachmässigen Mathematikern allerdings auch die analytische oder rationelle Mechanik zu; es würde aber, wie gesagt, die Einheitlichkeit und Gleichartigkeit des Thema der vorliegenden Schrift stören, wollten wir unsere Anleitung auf das Gebiet der Mechanik ausdehnen. Sachlich wäre, falls wir einmal diese Grenze überschritten, auch kein Grund vorhanden, bei der Mechanik stehen zu bleiben; wir müssten mindestens die ganze mathematische Physik, ja eigentlich alle mathematisch behandelten Wissenschaften mithineinziehen; denn es gehört zu unsern obersten Grundsätzen, dass der isolirte Fachmathematiker, der nichts nach Anwendungen fragt und mit den Anwendungsstoffen sich nicht selber befasst, zu den Erzeugnissen einer verirrten Uebercultur zu zählen und in der neuern Zeit, wie schon im Alterthum, eine Naturverzerrung, um nicht zu sagen eine Missgeburt, gewesen ist. Wenn wir also hier vornehmlich nur von der reinen Mathematik handeln und auch nicht einmal nebenbei das Studium der Mechanik mitskizziren, so können wir eben in dieser angemessenen Art verfahren, weil das mechanische Werk mit seiner Studienanleitung die Ergänzung der hier zu gebenden bildet. Auch umgekehrt ist die Anleitung hier eine Ergänzung der Anleitung dort; denn ist die Anleitung auch im mechanischen Werk in sich vollständig, so ist sie doch bezüglich der reinen Mathematik in einigen Richtungen nicht ausführlich genug und ausserdem auf einige Keime der neuen Grundmittel, nicht aber auf deren ganzen hier vorliegenden Umfang bezogen. Auch der Umstand, dass im Werk über die Principien der Mechanik nur die Kräfte eines einzigen Verfassers, hier aber die von zweien thätig gewesen sind, muss entscheidend ins Gewicht fallen. Auf diese Weise wurde es möglich, in der vorliegenden Schrift Gebiete zu behandeln, die sonst unzugänglich und unangreifbar geblieben wären; denn der Verfasser des mechanischen Werks konnte dieses ohne Augen arbeiten; in der neuen Schrift sind aber auch Untersuchungen und Rechnungen von so verwickeltem Charakter enthalten, dass Niemand sie anstellen und erledigen kann, der allein auf Kopfrechnen angewiesen ist und nicht selbst sieht und schreibt. Die Anleitung stützt sich aber wiederum auf die Hauptschrift und würde daher da, wo es sich um Beispiele von umständlicheren analytischen Speculationen handelt, keinen Rückhalt gehabt haben, wenn die Hauptschrift

selbst den entsprechenden Inhalt nicht detaillirt aufzuweisen hätte. So sollen denn, auch soweit es sich blos um reine Mathematik handelt, die beiden Anleitungen eine zusammengehörige Doppelbehandlung desselben Gegenstandes bilden, dergestalt dass die Ausführlichkeiten der früheren Darstellung hier davon befreien, in denselben Richtungen in das Einzelne zu gehen, und gestatten, in andern Richtungen um so eindringlicher und umfassender zu verfahren. Jede Arbeit ist etwas für sich und kann auch in dieser Isolirung nützen. Wer aber den Vortheil zu steigern wünscht, wird nicht umhin können, beide zu studiren.

Bei der Grundlage alles Studiums und aller Lehre, bei den Elementen, muss es sich zeigen, ob die Mathematik an klaren Grundbegriffen und gediegenen Grundwahrheiten überall festen Boden unter sich habe. Die Elemente sind daher nicht, wie heute gemeiniglich geschieht, als etwas zu verstehen, was dem ersten Schülerthum sozusagen hingeworfen werde und in jeglicher Gestalt für den Anfänger gut genug sei. Die Elemente sind nicht etwas Niedriges, worüber man sich leichten Kaufs hinwegsetzen könnte. So dachte nicht einmal das Alterthum; so dachte kein Euklides; denn sonst wäre das Beispiel von verhältnissmässiger Strenge, durch welches auch höhergreifende Werke des Alterthums, wie die Archimedischen, sich ausgezeichnet haben, nie in die Welt gekommen. Hätten die Alten in den Elementen, d. h. in den einfacheren Grundlagen keine Klarheit verlangt, so würden sie solche auch in den zusammengesetzteren Lehren nicht bethätigt haben. Die Modernen haben, wie es heute sichtbarer als je ist, für die Elemente, sei es nur der modernen oder auch der gesammten Mathematik, keine Klarheit geschafft und, wo diese schon überliefert vorhanden war, sie nicht einmal gewahrt. Dies hat sich nun an ihnen dadurch gerächt, dass sie in den höhern Gebieten in arge Verzwicktheiten gerathen sind und fast überall, mit äusserst seltenen oder auch nur annähernden Ausnahmen, kaum einer leidlich verständlichen, geschweige einer geniessbaren oder gar eleganten Darstellung fähig sind. Lagrange repräsentirte seit Huyghens die letzte grosse und zwar auch nur annähernde Ausnahme; heute aber, im Zeitalter der antieuklidischen Geometrie, liegt es auf der Hand, dass nebelhafte Wüstheit den maassgebenden, nämlich für die Zersetzung und Fäulniss maassgebenden Charakterzug des gesammten und durchschnittlichen mathematischen Treibens ausmacht. Auch die Elemente

sind davon recht erheblich inficirt; man findet kaum mehr Darstellungen, die von den Tagesthorheiten sich freihielten und gar keine solche, welche darauf angelegt, geschweige im Stande wären, dem Unwesen zu steuern. Sollte aber auch diese Epoche der Zersetzung und der Zerfahrenheit nur eine rasch vorübergehende Phase sein, so wird man dennoch nicht eher von einem wohlgegründeten System der Gesammtmathematik reden können, ehe man nicht zu einer umfassenden und guten Darstellung der Elemente gelangt ist, welche alle entscheidenden Anfänge der antiken wie der modernen Mathematik, einheitlich und in gleichartiger Verschmelzung, in sich enthält und zu vollständigster Klarheit bringt.

2. Eine neue und gereifte Zeit braucht auch erweiterte Elemente der Mathematik; sie kann den Begriff von Elementen nicht so eng begrenzen, wie es das Alterthum Angesichts der ihm bekannten Grundlagen und der ihm zugänglichen Methoden musste. Was sind Elemente der Mathematik und wie begrenzen sie sich? Auf diese Frage werden die verschiedenen Weltepochen der Wissensgeschichte auch verschiedene Antworten ertheilen. Von Euklides her, also von vor länger als zwei Jahrtausenden ist die Benennung Elemente (Stoicheia) classisch; doch selten hat man daran gedacht, wie wenig der Name eine Schranke des Inhalts andeutet. Der wahre Begriff der Alten von Elementen war überhaupt ein natürlich logischer und muss auch für uns wiederum ein solcher werden. Man dachte sich die zusammengesetzten und zum Theil sehr complicirten Erkenntnisse eines Wissensgebiets in einfachere Bestandtheile zerlegt, und man meinte im Allgemeinen mit den Elementen einer Wissenschaft alle wesentlichen Bestandstücke, mit deren Hülfe man auch die verwickelteren Einsichten gewinnen und die beliebig combinirten Aufgaben lösen könnte. Der Gegensatz war also der zwischen dem Einfachen und dem Zusammengesetzten, den Ergebnissen der Zerlegung und den mannigfaltigen Combinationen. Hiezu kam allerdings im besondern Falle eine weitere, aber keineswegs zu rechtfertigende Beschränkung. Euklides hielt seine Elemente, die, nebenbei bemerkt, vorwiegend geometrisch ausfallen mussten, noch obenein in dem engen Rahmen solcher Wahrheiten, die sich darstellen liessen, ohne dass irgend eine krumme Linie, ja nicht einmal der Kreis mit einer Graden zur Längenvergleichung zu kommen brauchte. Wir heute würden es mit Recht sonderbar

finden, wenn die Bestimmung des Verhältnisses von Durchmesser und Umfang, also die Ableitung der Zahl π, nicht schon in den Elementen ihren Platz fände. In der That sieht es nach Künstelei aus, wenn Euklides die Inhalte verschiedener Kreise miteinander vergleicht, aber die unmittelbare Inhaltsbestimmung eines einzigen Kreises vermeidet.

Freilich hätte er ganz andere Axiome nöthig gehabt, als die sich im Rahmen seiner Prota vorfanden, wenn er auch nur eine einzige krumme Linie hätte rectificiren und die von ihr umschlossene Fläche hätte quadriren wollen. Archimedes verfehlte nicht, diese neuen Axiome auch ausdrücklich aufzuführen. Seine in dieser Beziehung wesentliche aber unbewiesene Voraussetzung bestand darin, dass die Länge eines Bogenstücks in zwei gradlinige Grenzen eingeschlossen, dass es nämlich einerseits grösser als die zugehörige Sehne und andererseits kleiner als die beiden zugehörigen von seinen Endpunkten aus sich schneidenden Tangentenabschnitte sei. Dieses Axiom bildete die Scheidelinie zwischen der niedern und der höhern Mathematik der Alten. Gemeiniglich weist man darauf hin, dass die Constructionen mit der graden Linie und dem Kreise das Merkmal der Euklidischen Elementarmathematik gewesen wären; dies ist nicht unrichtig, reicht aber zur Kennzeichnung nicht aus; denn der Verzicht auf die Kreismessung gehört nicht wesentlich zu jener Beschränkung der constructiven Grundmittel. Durch Construction der innern und äussern Polygone kann man die Länge der Kreislinie in beliebig enge Grenzen einschliessen, wie es auch Archimedes that, und der Pythagoreische Satz ist für die zugehörige Längenberechnung der Polygonumfänge vollkommen ausreichend. Freilich ergiebt dies nur eine unbeschränkte Annäherung; aber die Nachweisung der Unmöglichkeit einer exacten Quadratur sollte eben auch ein Hauptaugenmerk der Elemente sein. Wäre ein derartiger Unmöglichkeitsbeweis von vornherein als eine elementare Angelegenheit angesehen worden, so wäre eine Unzahl von Phantastereien in den Gehirnen der besser Unterrichteten nie aufgestiegen. Wenn noch gegenwärtig die uralte Epidemie, die Quadratur des Kreises finden zu wollen, ihre regelmässigen Opfer fordert und, wie man aus frühern Zeiten weiss, auch bessere Köpfe heimgesucht hat, so trägt die Haltung der Elemente der Mathematik daran einen Theil der Schuld.

Die Euklidischen Elemente zum Vorbilde nehmen, wäre auch

heute noch immer ein geringerer Fehler, als sich dem Zufall moderner Wüstheiten und Formlosigkeiten überlassen. Wenigstens lässt sich aus jenem alten Buch einigermaassen lernen, was beweisen heisst, und wie eine Kette zusammenhängender Wahrheiten zu bilden ist. Man kann dort erfahren, wie nicht das unbestimmt Allgemeine, sondern das Allerspeciellste, ja individuell Typische der Gebilde die Ausgangspunkte liefere, und wie verkehrt es daher sei, nach gemein scholastischer Art allgemeine Rubriken zu machen, in denen ohne Rücksicht auf den beweisenden Zusammenhang alle Gegenstände derselben Gattung erledigt werden sollen. Eine solche Rubrik, welche dieser irrigen Liebhaberei der Modernen entspräche, würde z. B. der Inbegriff aller Beziehungen sein, welche zwei grade Linien in einer Ebene zu einander haben können. Für eine solche Rubrik müssten Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Rechtwinkligkeit, Parallelismus und Coincidenz zusammen und überdies noch, wenn es dabei natürlich zugehen sollte, ohne Hülfe dritter schneidender Linien behandelt werden. Nun sieht man leicht, dass eine solche Aufgabe ohne Einschiebung von Zwischengliedern, die noch auf andern Voraussetzungen beruhen, unlösbar ist. Schon die beliebte Zusammenfassung der Congruenz aller Dreiecke ist nicht Euklidisch. Für das Euklidische System ist es vielmehr bezeichnend, dass es mit dem gleichseitigen Dreieck, also nicht einmal mit dem Dreieck überhaupt, sondern mit einem individuellen regelmässigen Typus beginnt. Derartige Individualisirungen ziehen sich durch das ganze System, und ehe der erweiterte Pythagoreische Satz bewiesen wird, findet er erst in dem gewöhnlichen engeren Sinne seinen Platz. Auf dieser Art und Weise beruht der wahrhafte Sinn des synthetischen Fortschreitens, wobei freilich der Begriff synthetisch noch einen andern Sinn hat als den ihm die gemeine Logik unmittelbar beizulegen pflegt. Nach letzterer heisst jeder Gang vom Allgemeinen zum Besondern synthetisch, und die gewöhnliche Vorstellung denkt dabei an subsumirende Unterordnung speciellerer Wahrheiten unter allgemeinere. Das ist nun offenbar nicht das Verhältniss, welches statthat, wenn man vom engern Pythagoreischen Satz zum erweiterten übergeht. Hier geht der speciellere Sachverhalt voran und folgt der allgemeinere erst nach. Dieser allgemeinere Sachverhalt beruht jedoch auf reichhaltigeren Voraussetzungen, also auf einem Plus an speciellen Möglichkeiten. Der Fall des rechtwinkligen Drei-

ecks ist ein vereinzelter in Vergleichung mit allen sonstigen Dreiecksgestaltungen. Es liegt also eine Zusammensetzung und demgemäss eigentliche Synthesis darin, wenn man den allgemeinern Fall auf den besondern zurückführt und die Combination nachweist, vermöge deren die dem individuellen Typus zugehörige Wahrheit auch ein Bestandstück des dem allgemeinen Fall entsprechenden Sachverhalts bildet.

In der That wäre es sehr wohlthätig, wenn die Modernen sich daranmachen wollten, diesem in den antiken Beispielen vergrabenen Begriff wahrer Synthesis wieder zum Leben zu verhelfen. Statt die starre Gliederpuppe des äusserlichen logischen Rubrikenwerkes nachzuahmen, die unschönen Einschnitte und das fleischlose Todtengerippe zu copiren, wie es in neuerer Zeit innerhalb und ausserhalb der Mathematik bisweilen geschehen ist, soll man lieber in den bessern Geist eindringen und das Gute freimachen, welches als gesunder und natürlicher Kern unter der Schale der Euklidischen Darstellung enthalten ist. Dieser Kern ist der strengere Begriff vom Beweisen und der bessere Begriff von eigentlicher Synthesis der Wahrheiten.

3. Bei Gelegenheit einer neuen Ausgabe des Euklides durch Peyrard äusserte sich Lagrange dahin, die Geometrie sei jetzt eine todte Sprache; aber wer sie studiren wolle, müsse es an denjenigen Erzeugnissen thun, die in ihr als einer noch lebendigen geschrieben worden wären. Diese Vergleichung athmet den ganzen Stolz moderner analytischer Ueberlegenheit. Lagrange, der seinen Schriften keine einzige Figur einverleibte, sah in der modernen Analysis die lebende Sprache der Mathematik, in der Geometrie und den geometrischen Methoden aber eine abgelebte und überwundene Vorstellungsart und Ausdrucksweise. Ein paar rein geometrische Anknüpfungspunkte und übrigens eine ausschliesslich rechnende Behandlungsweise auch aller räumlichen Grössenverhältnisse, — das war nicht mit Unrecht sein thatsächliches Facit. Auf die antiken Schriften blickte er mit grosser Achtung, wie namentlich seine eigne Würdigung der Archimedischen Arbeit über die Stabilität des Festen auf dem Flüssigen zeigt, und wie er überdies durch ausdrückliches Zurückgreifen auf die Begriffsstrenge der Alten in seinen eignen formell vollendeteren Arbeiten noch besonders bekundet hat. Dennoch sah er in jener ganzen antiken Ueberlieferung, insofern darin vorwaltend durch die Sprache der Geometrie geredet wurde, eine

abgestorbene Geistesverlautbarung. Ihm stand es fest, dass wir nunmehr in unserer eignen lebenden Zeichensprache, welche auf Grössen überhaupt Anwendung findet, nicht aber in jener verblichenen Bildersprache der Geometrie zu verkehren und uns zu verständigen hätten.

Es liegt eine grossartige Einseitigkeit, aber zugleich auch eine wahre Vorwegnahme in diesem Standpunkt. In der That ist die Zurückführung des specifisch Geometrischen auf ein geringstes Maass ein Grundgesetz der höhern Entwicklung der Mathematik. Was von Grössen überhaupt gilt, soll auch in dieser Allgemeinheit, nicht aber erst speciell an Raumgrössen dargethan werden. Ist es nun möglich, eine Menge räumlicher Beziehungen auf einen abstracteren analytischen Ausdruck zu bringen, so findet sich hiemit die unmittelbare Geometrie eingeschränkt und es tritt an deren Stelle eine Art mittelbarer Geometrie. Letztere bedarf nur sehr weniger, eigentlich geometrischer Anknüpfungspunkte und erledigt alles Uebrige auf dem Wege der Rechnung, sei es direct mit Zahlen, sei es mit Buchstabenzeichen ganz allgemein gehaltener Grössenbegriffe.

Wer Latein und Griechisch gründlich erlernen will, muss die classischen Autoren zur Hand nehmen, für welche jene Sprachen nicht blos lebendige waren, sondern grade in ihrer schönsten Blüthe standen. Wendet er sich dagegen an das galvanisirte Spätlingsleben, also an das Latein des Mittelalters oder der neuern Zeit, so hat er nur Verderbtheit und im besten Falle todte Nachahmungskünste vor sich. Will man also die todten Sprachen kennenlernen, so muss man deren wahre Charaktere unter den Hinterlassenschaftsstücken einer einst lebendigen Welt, nicht aber unter den Nachahmungsstücken späterer entfremdeter und auf ein ganz anderes Leben angewiesener Zeiten suchen. Eine andere Frage ist freilich die, ob man sich überhaupt noch um todte Sprachen sonderlich bekümmern solle. Grundsätzlich verneinen wir dies, sobald eine solche Krücke entbehrlich geworden ist. Man geht auf eignen Füssen, wenn man solche hat, die geschickt dazu sind. Mit den todten Sprachen im eigentlichen Sinne des Worts kann sich die heutige Menschheit schon so ziemlich quitt machen; mit jener todten Geometrie und Mathematik der Alten ist sie aber noch nicht gänzlich fertig; denn sie hat noch nicht jenen vollen Ersatz dafür, an den Lagrange von seinem individuell überlegenen Standpunkt freilich schon denken

konnte. Täglich beweist die heutige mathematische Welt, wie sehr ihr ein Elementarcursus in jener todten Sprache noththut, um ihr wieder zu etwas logisch gesundem Leben zu verhelfen.

Allerdings lehrt auch das Studium des Euklides den keine mathematische Logik, der in sich selbst nicht die Anlage dazu trägt. Für letzteren Mangel war der abergläubische Pascal ein ausgezeichnetes Beispiel. Seine Entdeckungen in der Geometrie geben ihm das Recht, in diesem Gebiet wenigstens als ein partielles Genie zu gelten. Seine vornehmlichste Schulung vom Knabenalter an war das Selbststudium der Euklidischen Elemente gewesen. Dennoch hatte er von dem Wesen eines wissenschaftlichen Systems sowenig begriffen, dass er sich in seinen Gedanken über die Mathematik, durch welche er die Welt obenein logisch belehren wollte, von einem argen Wahngebilde befangen zeigte. Er meinte nämlich, das Ideal des Wissens bestehe darin, Alles zu beweisen, und es sei nur eine Folge der menschlichen Schwäche, dass die Axiome unbewiesen blieben. Wer sich in dieser Weise auslassen kann, hat keine Ahnung von der Natur wahren Wissens. Wahrlich erträglicher wäre der umgekehrte Fehler, nämlich zu behaupten, die Nothwendigkeit der Beweise entspräche einer Unvollkommenheit der menschlichen Einsichtsart; denn das Vollkommenere bestände darin, nicht blos die Axiome, sondern Alles unmittelbar, also ohne Beweisbedürftigkeit, zu wissen. Dies wäre das andere Extrem und zu Pascals Wahn gleichsam der Gegenwahn. In Wahrheit kann aber kein Wissen gedacht werden, in welchem nicht das Einfache und Unmittelbare als Ausgangspunkt und der Beweis als Vehikel der zusammengesetzten Einsichten vertreten wäre. Wahre Axiome sind des Beweises nicht blos nicht bedürftig, sondern auch gar nicht fähig. Auch der von Pascal gewähnte Gott könnte sie mit aller seiner Allmacht nicht beweisen, sowenig als er zu machen vermöchte, dass zwei mal zwei gleich fünf würde. Es sei jedoch genug mit diesem ansehnlichen Beispiel, was unter Umständen das Studium des Euklides formell fruchtet oder vielmehr nicht fruchtet. Der alte Matador der Alexandrinischen Gelehrtenkaserne der Ptolemäer hat zwar die Welt praktisch logisch besser einexercirt, als der Lehrer Alexanders selbst. Aristoteles Regeln haben weniger gethan, als das Euklidische Musterbeispiel; dennoch aber hat bei diesem wie bei jenem bisher viel daran gefehlt, wirkliches Leben zu erwecken. Der Missgriff eines Pascal würde allein keine zu-

reichende Instanz sein; aber die Thorheiten der Gegenwart, welche nicht einmal die logischen Erfordernisse einer Parallelentheorie zu begreifen vermögen und hier die Axiomlosigkeit der Beweise, d. h. einen offenbaren Widersinn zum Gesetz machen, beurkunden den gleichen, aber nur noch verschrobener ausgearteten Wahn. Soll also von den Alten noch etwas gelernt werden, so kann dies nur geschehen, insoweit die eigne neuere Initiative bereits mächtig geworden und so in den Stand gesetzt ist, für ihre selbstgestellten Aufgaben hier und da auch der todten Ueberlieferung einige Fingerzeige abzugewinnen. Zunächst werden es nur in dieser Richtung besonders beanlagte Geister sein, denen Derartiges gelingt. Sind aber einmal die erforderlichen Hinweisungen auf diejenigen Punkte vorhanden, auf welche in den alten Schriften die Aufmerksamkeit zu concentriren ist, so kann es für Lernen und Lehren sehr nützlich werden, wenn man auch in weiteren Kreisen einige antike Bücher, wenigstens in Uebersetzungen, wieder zur Hand nimmt. Der in der erwähnten Art Aufmerksamgemachte wird beispielsweise schon durch das blosse erste Buch der Euklidischen Elemente manche formelle Einsicht gewinnen, die aus der neuern mathematischen Literatur in gleicher Vollkommenheit nicht zu extrahiren ist.

4. Unter den modernen Darstellungen der eigentlichen Geometrie ist diejenige Legendres die beste, aber darum noch nicht eine gute. Sie ist eine Nachahmung dessen, was in den Euklidischen Elementen geometrisch ist; auch soll sie die Euklidische Methode vertreten und ist in der That wenigstens ein schwaches Abbild jener antiken Strenge. Im Sinne des erwähnten Lagrangeschen Ausspruchs ist sie aber ein offenbarer Anachronismus; sie ist jene todte Sprache, aber geschrieben von einem Neueren. Ja noch mehr, sie ist nicht blos todte Sprache, sondern auch meistens todter Stoff; denn ein solches Ueberwuchern purer und puter Geometrie widerspricht dem modernen Geist und den modernen Mitteln.

Legendre war sicherlich ein achtbarer Mathematiker, der bis nahe an den zweiten Rang hinaufreichte. Die Methode der kleinsten Quadrate hatte er vor Gauss veröffentlicht und befand sich überhaupt in vielen Punkten ungefähr auf einem ähnlichen Niveau wie der genannte, von seinen Collegen so übermässig und unwahr aufgebauschte Professor. Auch erklären sich einige Specialerfolge unter Personen solcher Art daraus, dass sie sich an aller-

speciellste Aufgaben machten, die, als zu untergeordnet, von den Mathematikern ersten Ranges, also beispielsweise von einem Lagrange, keiner besondern Behandlung gewürdigt worden waren. Leute von weniger hohen Fähigkeiten bewegen sich mehr am Boden, und der kriechende Wurm wird auf Manches stossen, woran im hohen Fluge grade der weiteste Blick, wäre er auch noch so scharf, nicht besonders haftet. Aus der hohen Vogelperspective der Geister ersten Ranges werden die grossen allgemeinen Wahrheiten und Methoden entdeckt und werden die Richtungen bezeichnet, in denen das Erkannte weiter anzuwenden ist. Die geringeren Kräfte und die Thätigkeiten von höchstens zweitem Range sind es dann, die ausreichen, um unten von Fleck zu Fleck zuzusehen, was sich nach jenen höheren Indicien aufspüren lasse. Von solcher Art war beispielsweise die Gaussische Befassung mit den zweigliedrigen Gleichungen; denn Lagrange hatte erst die allgemeine Gleichungsmethode schaffen müssen, nach welcher die fragliche sehr specielle Aufgabe in Angriff genommen wurde. Bei Legendre war nun aber noch sichtbarlich der Vortheil mit im Spiele, den die Gewöhnung an völlig individualisirte Aufgaben mitsichbringt.

Solche individualisirte Aufgaben liegen nicht sowohl im Geiste der geometrischen Methode als vielmehr in jener Befassung mit typisch bestimmten Gestaltungen, wie sie ein Erforderniss der eigentlichen Synthese, d. h. des Weges vom Einfachen zum Zusammengesetzten ist. Etwas Anderes ist es, die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts und der Theilchenanziehung für Körper überhaupt formuliren, und wiederum etwas Anderes, diese Gesetze auf den besondern Fall von Kugeln oder auf den von Ellipsoiden anwenden. Wer von vornherein gewöhnt ist, die Probleme in der specialisirten und typisch bestimmten Gestalt anzugreifen, wird zwar hiemit nicht gleich die höchste Allgemeinheit erreichen, wohl aber eher als auf dem andern Wege die am meisten charakteristischen und für die Anwendung fruchtbaren Sätze gewinnen. Die natürliche Synthese, mag es sich nun um das Gebiet der Geometrie oder das der Analysis handeln, geht diesen Weg zu allen Zeiten, und es ist daher keine besondere antike Eigenheit gewesen, wenn immer bei der Einzelgestalt der Aufgaben eingesetzt und zu den allgemeineren Fällen erst nach Erledigung des Einzeltypus übergegangen wurde. Wie schon oben dargelegt, konnte der erweiterte Pythagoreische Satz erst dem einge-

schränkteren folgen. Auch bleibt er grade in dieser Einschränkung für alle Zeit die typisch charakteristische Wahrheit, ja hat eine individuelle Physionomie, die in seiner Erweiterung verloren geht. Er bleibt in seiner ursprünglichen Beschränkung stets der einfache Bestandtheil, also die einfache Wahrheit, die sich bei der Erweiterung nur in der Zusammensetzung mit andern Elementen wiederfindet.

Nun ist bei aller Achtung vor der modernen Analysis, namentlich in der Gestalt, die ihr Lagrange gegeben hat, nicht zu verkennen, dass ihr Zug zur umfassenden Allgemeinheit nicht immer hinreichend durch die Rücksicht auf besondere Typen aufgewogen wird. In dieser Beziehung ist nun nicht etwa blos von den Alten, sondern auch von solchen Modernen zu lernen, die, wie Huyghens, die Synthese im Sinne typischer Specialaufgaben in allen Richtungen am bedeutendsten vertreten haben. Wer heute die Fruchtbarkeit der in der fraglichen Art individualisirenden Methoden erkennt, wird, gleichviel ob es sich um Geometrie oder Analysis handle, auch bei geringeren Fähigkeiten eher zu Ergebnissen gelangen, als wer ausschliesslich im abstracten Rahmen hochbelegener Allgemeinheiten verbleibt. Eine universelle Förderung ist aber freilich nur durch die Verbindung beider Gesichtspunkte möglich. Jedoch erklärt sich aus unserer Unterscheidung und Darlegung, wie Legendre und Mathematiker von ähnlichem Niveau wenigstens in Einzelheiten hier und da zu etwas gelangen konnten, indem sie von vornherein sozusagen den elementaren Weg gingen, d. h. die einfacheren Specialgestalten der Aufgaben zum Gegenstande ihrer Bemühungen machten.

Hienach haben wir in Legendre ein Beispiel, dass die Schulung in jener todten Sprache der Geometrie doch noch eine Nebenseite hat, die für das Lebendige einübt. Diese Nebenseite ist die von uns gekennzeichnete eigentliche Synthese und hat daher mit der Geometrie als solcher nichts Wesentliches zu schaffen. Der Weg von einfacheren Typen zu zusammengesetzteren Gebilden ist überhaupt der natürlichste und zugleich der einzige wirklich elementare. Er hat für die Arithmetik dieselbe Geltung wie für die Geometrie, wie denn auch Euklides' Elemente nicht ausschliesslich geometrische sind, sondern auch gewisse auf die Zahlen bezügliche Lehren enthalten. Bei Legendre ist es nun allein die Geometrie, deren Elemente er in seinem Buche darstellt. Der Anachronismus dieses Buches besteht darin, dass es

überhaupt zuviel reine Geometrie enthält. Im modernen Sinne müssen die Elemente der Geometrie wirklich auf die nothwendigen Bestandtheile rein und specifisch geometrischer Art beschränkt werden, und was sich durch Rechnung erledigen lässt, muss auch wirklich auf die abstracteren Rechnungsmethoden bezogen und mit deren Hülfe festgestellt werden. Für Letzteres sind die Inhaltsbestimmungen und Inhaltsvergleichungen der räumlichen Gebilde naheliegende Beispiele. Man wird sich hier principiell auf ein paar geometrische Anknüpfungspunkte beschränken und im Uebrigen nicht blos von der Arithmetik, sondern auch von der allgemeinen Grössenanalysis den freisten Gebrauch machen. Geschieht dies nicht, so überwuchert in der umständlichsten und unnützesten Weise die unmittelbare Geometrie, wo man doch mit der kürzeren und durchsichtigeren mittelbaren Geometrie auskommen kann. Ein solcher geometrischer Luxus ist nicht blos unwissenschaftlich, indem er das Besondere anschaulicher Complicationen an Stelle des Allgemeinen rechnender Schlüsse walten lässt, sondern auch grade für den Anfänger eine üble Belastung.

Angesichts der Weite des heut zu durchmessenden mathematischen Gesammtgebiets kann nicht mehr die in den ersten antiken Grundlegungen vorherrschende Beschränkung auf eine durch Geometrie vermittelte Darstellung maassgebend bleiben. Die höhere Abstraction, die in den Rechnungsgesetzen herrscht, gestattet Abkürzungen, und nicht die Anschaulichkeit im Sinne räumlicher Darstellung, sondern die Individualisirung im Sinne elementarer und daher leicht verständlicher Typen ist das Grundgesetz einer guten Lehrart. Von räumlicher Anschaulichkeit ist nur soviel festzuhalten, als erfordert wird, um alle typischen Grundgebilde zu beherrschen. Im Uebrigen ist die Rechnung und mit ihr jenes eigentliche Denken am Platze, welches die sinnlichen Bilder zur Seite lässt, um sich durch Vermittlung anderer Zeichen in einer weniger mittelbaren und mehr wirksamen Weise zu bethätigen. Man hat über das Erforderniss der Anschaulichkeit für den Unterricht die unrichtigsten Lehren verbreitet; man hat leichte Fassbarkeit mit räumlicher Anschaulichkeit verwechselt, während doch nur in den allereinfachsten Fällen das Anschauliche auch zugleich das leicht Fassliche sein kann. Allerdings bedarf man auch der räumlichen Anschauung als eines unentbehrlichen Ausgangspunktes; aber es folgt hieraus nicht, dass Alles räumlich anschaulich werden müsse. Im Gegentheil

ist es ein Vorzug, dass sich der Verstand von der Grundlage der blossen Anschauung bald erheben und dann auf eignen Füssen bewegen kann. Elemente der Geometrie sollten daher künftig äusserst concentrirt ausfallen und immer nur unter Zuhülfenahme von Elementen der allgemeinen Grössenanalysis, also in Anknüpfung an gewisse arithmetische, algebraische und analytische Voraussetzungen, entworfen werden. Dies steht keineswegs der Wahrheit im Wege, dass, wie der Weg der Geschichte selbst gezeigt hat, einige geometrische, ganz einfach anschauliche Grundlehren von einer ausgebildeten Arithmetik unabhängig sind und das Wenige an arithmetischen Einsichten, dessen sie bedürfen, unmittelbar in der geometrischen Darstellung gleichsam mitsichführen können. In derartigen letzten Einfachheiten ist der Ursprung der Erkenntniss ein gemeinsamer und findet sich die räumliche Anschauung mit einem unmittelbaren und anschaulichen Rechnen verbunden, welches an und mit dieser Anschauung ohne bemerkbare Unterscheidung vollzogen wird. Die Sonderung wird erst sichtbar, wenn verwickeltere Verhältnisse in Frage kommen; dann muss sie aber auch zu einer principiellen Trennung der beiderlei Elemente führen.

5. Dem Entwicklungszuge der modernen Mathematik entspricht die Bevorzugung der Elemente der Arithmetik, Algebra und Analysis. In der That ist es eine Rückständigkeit, gleich den Griechen in ihrem classischen Stadium, fast ausschliesslich im Anschaulichen zu verbleiben und so die Geometrie zur maassgebenden Grundlage aller übrigen Mathematik zu machen. Die künstlerische Anlage jenes Volks, vermöge deren das Bildliche besonders gepflegt wurde, mag auch ihren Antheil an jener Einseitigkeit gehabt haben. In der Technik des Rechnens blieb jene classisch griechische Periode bei den ersten kinderhaften Anfängen, und die Ueberlegenheit der Modernen beruht zu einem grossen Theil darauf, dass sie nicht blos die indische Zahlenhandhabung, sondern überhaupt das abstracte Operiren mit allgemeinen Grössen selbständig entwickelt haben. Trotzdem kann das griechische Beispiel für den allerersten Unterricht in der eigentlichen Mathematik insofern etwas lehren, als es besonders bei der heutigen Sachlage und in einem gewissen Maasse auch stets nützlich sein wird, mit sehr concentrirten Elementen der Geometrie den Anfang zu machen. Man wird auf diese Weise wenigstens eine Gewöhnung der Phantasie an die Hervorbringung

gesetzmässiger räumlicher Gebilde erzielen und dem unentwickelten Sinn des Anfängers grade in derjenigen Richtung entgegenkommen, in welcher die Stammesanlagen der modernen Völker von Natur am wenigsten leisten. Es ist nicht blos die Phantasie nach Art der Griechen, sondern überhaupt jegliches auf Gestaltungskraft angelegte Vorstellungsvermögen, dem man mit der ersten Einführung in gute geometrische Elemente ein wenig zur Ausbildung verhelfen kann. Es ist sozusagen das Kinderstadium der Geistesregungen, welches ein Anrecht darauf hat, nach dem Vorbilde der weltgeschichtlichen Entwicklung der Mathematik zuerst an den ihm wahlverwandten Elementen der Geometrie gefördert zu werden. Die allgemeine Grössenanalysis ist eine Abstraction von der Gattungsbestimmtheit der verschiedenen wirklich vorhandenen Grössen, und diejenige Art von wirklichen Grössen, an welche zuerst anzuknüpfen ist, findet sich eben im Gebiet räumlicher Gebilde.

Geht man hinter die eigentliche Mathematik zurück, so findet man in unserm niedrigsten Unterricht als Anfang allerdings das rechnende Element, jedoch nur in der Form äusserlicher Abrichtung, vertreten. Das Rechnen, welches in den Elementarschulen noch zum Schreiben und Lesen hinzukommt, ist wie die beiden letzteren ein Stück technischer Kunstfertigkeit, aber thatsächlich nie eigentliches und gründliches Wissen. Die Regeln der Operationen werden äusserlich beigebracht; von den Gründen des Hantirens wird aber nichts gelehrt. Wäre dem anders, wie es bei einem wirklich guten Elementarunterricht sein sollte, so bildeten die Elemente des Rechnens zugleich den Anfang der Mathematik, indem sie zu concentrirten Elementen der Arithmetik würden. Alsdann wäre auch die Frage nach der Rangstellung der geometrischen Elemente im Unterricht praktisch leicht zu entscheiden. Die Elemente der Geometrie hätten nebenher zu gehen und wären Hand in Hand mit denen der Arithmetik derartig darzustellen, dass sich beide gegenseitig ergänzten. Hiemit erhielten wir wirkliche Elemente der Mathematik, und es käme jene natürliche Gangart zu ihrem Recht, vermöge deren man, ehe man in einer abstracteren Weise Schritte thun kann, sich erst von der Betrachtung bestimmterer Grössen zu den betreffenden abstracteren Begriffen erhoben haben muss.

Wenn Geister hohen Ranges, die auf den Gipfeln ihrer Wissenschaft schöpferisch vorgegangen sind, ihre Aufmerksamkeit auch

der Darstellung oder Lehre der Elemente zuwenden, so steigert dies nicht nur die Bedeutung und Wirksamkeit solcher Männer, sondern ist auch ein Anzeichen, dass sich die Wissenschaft in ihren Grundlagen streng zu gestalten und ernsthaft zu constituiren anfange. Ein erster Versuch unter den Neuern ist die deutschgeschriebene Algebra Eulers, die ursprünglich zu Petersburg 1770 in zwei Bänden erschien und ihr Dasein der Erblindung ihres Verfassers verdankte. Sie beginnt mit dem elementarsten Rechnen und umfasst das Gebiet der Gleichungen bis zum vierten Grade sowie die Diophantische Analysis. Nach dem Tode Eulers und nach fast einem Menschenalter fand sich ihr Werth in der französischen Ausgabe (Petersburg 1798) durch die Hinzufügungen Lagranges erhöht, welche die unbestimmte Analysis betrafen und selbst den Umfang eines Buchs hatten. Letztere sind auch in der neuerdings veranstalteten Gesammtausgabe der Werke Lagranges in Band VII (1877) zu finden. Bezüglich Eulers eigner Arbeit ist noch heut zu sagen, dass sie vor dem neusten Mischmasch von Lehrbüchern, der durch die schlechten modischen Einstreuungen, namentlich durch das Determinantenstroh, aber auch überhaupt durch die Ungediegenheit und Nebelhaftigkeit der jüngsten Epigonenmathematik verunstaltet ist, trotz des Alters entscheidende Vorzüge hat. Schon in unserer dem mechanischen Werk beigefügten Anleitung war auf die vergessene Algebra Eulers als grade auch für Anfänger noch immer schätzbares Lehrwerk aufmerksam gemacht. Das über ein Jahrhundert alte Buch war aber nur aus Bibliotheken zu haben. Nun ist zu Leipzig 1884 ein billiger Abdruck erschienen, indem eine populäre Sammlung von allerlei allgemeiner Literatur (die Reclamsche Universalbibliothek) hiemit auch ein mathematisches Buch aufgenommen hat. So kann sich denn Jedermann für die Kleinigkeit von achtzig Pfennigen Kenntniss und, wenn er nicht im gewöhnlichen Sinne Jedermann ist, sondern nur kritisch zusehen will, auch von den Vorzügen und Mängeln der Eulerschen Art und Weise eine eigne Anschauung verschaffen. Jetzt freilich ist Angesichts der nachher zu besprechenden Elementarvorträge Lagranges die Eulersche Arbeit in die zweite Linie gerückt, behält aber als Nebenhülfe immerhin ihren Werth. Ueberdies muss es ja auch früher oder später dahin kommen, dass der elementare Theil unserer neuen Grundmittel zu weit vollkommeneren Lehrbuchabfassungen führe.

An Neuem ist seit jener Eulerschen Zeit im Gebiet der Elemente vor unsern Grundlegungen nichts hinzugekommen, und die Vermehrungen der Wissenschaft durch und seit Lagrange, die in dem Eulerschen Buch nicht enthalten sind, betreffen nur die höchsten Gebiete der Gleichungstheorie, bestehen also wesentlich in nichts weiter, als in Lagranges Schöpfung der Permutationsalgebra, deren Darstellung auch vom Jahre 1770 datirt, und in dem, was mehr als ein halbes Jahrhundert später Abel und Galois über die Lösungsbedingungen der über den vierten Grad hinausgehenden Gleichungen feststellten. Auch kann man allenfalls noch hieher die Entdeckung des Engländers Jerrard rechnen, der ungefähr zu eben jener Zeit, in welcher auch Abel und Galois thätig gewesen waren, in Erweiterung der alten Tschirnhausenschen Methode den Weg zeigte, in jeder Gleichung ausser dem zweiten und dritten Glied auch das vierte oder das fünfte zu entfernen, womit dann auch die Gleichung fünften Grades auf eine dreigliedrige Form gebracht werden konnte. Dies Alles hat aber nur wesentliche Anwendung auf die höchsten Gebiete der Algebra und geht deren Elemente, wie sie bis auf Lagrange und noch von Lagrange, ungeachtet dessen eigner Entdeckungen, verstanden wurden, unmittelbar nichts an. Selbst heute ist in dieser Beziehung der Begriff von Elementen der Algebra materiell noch nicht geändert. Eulers Algebra war allerdings etwas breit gehalten, wie alle Bücher dieses bedeutenden Mathematikers. Zu dieser Breite gehörte aber auch eine gewisse Deutlichkeit, die allen Eulerschen Schriften eigen ist. Eine ernsthafter rationelle Denkweise, Schärfe und Concentrirung findet man aber erst bei Lagrange, und es ist daher sehr gut, dass dieser Geist ersten Ranges seine Originalität auch in einem eignen Elementarcursus der Arithmetik und Algebra bethätigt hat.

Aeussere Ursache für letzteren wurden die Schöpfungen der französischen Revolution. An der Normalschule hielt Lagrange Vorträge über Arithmetik und Algebra, welche stenographirt, von ihm durchgesehen und dann stückweise zerstreut in den Bänden der Séances des écoles normales von 1795 veröffentlicht wurden. Auf den Rath Lagranges, den man um ein entsprechendes Lehrbuch anging, wurden sie 17 Jahre später im Journal der polytechnischen Schule (7. und 8. Heft, Band II, 1812) wiederabgedruckt. Schliesslich erschienen sie auch neuerdings unter den Gesammtwerken Lagranges im schon erwähnten siebenten Bande

(1877). Die Vernachlässigung dieses dem Umfang nach kleinen, die Elemente nicht blos mit Schärfe und Präcision, sondern auch mit Originalität und Geist behandelnden Werks, welches inzwischen gar nicht zu bekommen gewesen war, würde erstaunlich sein, wenn es nicht überhaupt die Regel wäre, dass in der Nutzbarmachung für die grössere Zahl der Lernenden grade die vorzüglichsten Arbeiten am meisten hinter der gemeinen Fabrikwaare zurückstehen müssen und zunächst immer eine lange Zeit hindurch unter Unkraut verdeckt bleiben. Glücklicherweise können solche Arbeiten ersten Ranges aber auch ein hohes Alter erreichen, ohne zu veralten. Von jenen Vorträgen ist dementsprechend auch jetzt noch eine Uebersetzung zeitgemäss gewesen, die unter dem Titel Lagranges mathematische Elementarvorlesungen, deutsch von Niedermüller, Leipzig 1880 erschienen ist und deren Uebersetzer kurz vor dem Unternehmen durch unsere Nachweisung und Charakteristik mit dieser Arbeit Lagranges bekannt gemacht worden war.

In der That sind diese Leçons d'arithmétique et d'algèbre oder, wie man sie auch weniger passend überschrieben hat, diese Eléments mathématiques von Lagrange bis heute das beste Lehrbuch über den Gegenstand. Ausserdem sind sie aber auch noch ein Zeugniss für die freie mündliche Auslassungsart des grossen Mathematikers, deren ausgiebige Natürlichkeit die Gangart und schöne Ebenmässigkeit seiner Gedanken noch unmittelbarer blicken lässt, als es die gleich für den Druck in concentrirter Weise redigirten Schriften vermögen. Allerdings dehnte Lagrange den Begriff von Elementen der Arithmetik und Algebra nicht weiter aus, als es damals üblich war und es auch heute noch ist. Er konnte demgemäss diesem Buch die originalste seiner hieher gehörigen Schöpfungen, nämlich die Permutationsalgebra, nicht einverleiben. Auch die unbestimmte Analysis konnte hienach keine Ausführung erfahren. Im Kreis seiner Stoffe ist das Buch aber musterhaft und von einer Gründlichkeit und Genauigkeit, wie sie in gemeinen Lehrbüchern, Compendien und Handbüchern nicht vorkommen.

6. Mit den bisherigen Angaben ist an Alles erinnert, was im Bereich der Elemente, sei es der geometrischen oder der algebraischen, wirklich hervorragt. Wenn die Weltgeschichte der Wissenschaft nicht Mehr davon producirt hat, so stimmt dies mit der allgemeinen Thatsache überein, dass auch auf andern Gebieten, sei es des Wissens, der Kunst oder des praktischen Lebens, die grossen Erscheinungen jeder Gattung nur in gering-

fügiger Anzahl anzutreffen sind. Nun folgt aber aus dieser Spärlichkeit nicht einmal, dass sich das Ideal, welches man aufstellen kann, erreicht finde. Das Alterthum ist dem in seinem Bereich denkbaren Ideal verhältnissmässig am wenigsten fern geblieben. Es hat ein hohes Maass von Strenge und Systematisirung erreicht, wenn es auch dabei schliesslich der Ueberschulung nicht entgangen ist und die Natürlichkeit der Gedankenwendungen eingebüsst hat. Die Modernen dagegen sind, was die formelle Darstellung ihrer Kenntnisse anbetrifft, zwar bisweilen, wie namentlich im Falle Lagranges, natürlicher, im Allgemeinen aber noch weit zurück. Umfassende Elemente der Mathematik, die allen Theilen gerecht würden und diese zu einem folgerichtig zusammenhängenden System verbänden, dabei aber zugleich fundamentale Strenge obwalten liessen, sind ein blosser Wunsch. Die Anarchie einer massenhaften Compendienliteratur, betreffe sie die einzelnen Zweige oder handbuchmässig aufgestapelt die gewöhnlichen Inventarstücke des Gesammtgebiets, ist kein Ersatz für ein wohl durchgearbeitetes System. Im Gegentheil dient sie dazu, die grade in der heutigen Mathematik herrschende Verwirrung auch in die Elemente zu tragen und dort zu vervielfältigen.

Niemand wird heute derartigen Compendien thatsächlich ganz entgehen; denn wo sie ihm nicht durch die Schule aufgenöthigt werden, wird er auch im Selbststudium Einzelnes davon schwerlich vermeiden. Sind nämlich auch im laufenden Jahrhundert bezüglich der Elemente neue und erhebliche Zusätze nicht in Frage, so hat es doch an Erfindung neuer Namen für alte Dinge nicht gefehlt, und es ist ausserdem auch mit der Einführung überflüssiger technischer Begriffe von gleichgültigem Inhalt ein sehr schädlicher Luxus getrieben worden. Nun will der Neuling gemeiniglich nicht blos die Sprache, sondern auch den Jargon der Kreise verstehen lernen, in denen er sich bewegt. Hiedurch wird er öfter veranlasst, dem modisch Verdorbenen, welches den Schein der Neuheit für sich hat, vor dem ältern Gediegenen seine Aufmerksamkeit zuzuwenden. Auch Angesichts der besten Instruction werden solche Abwege nicht ganz unbetreten bleiben, wenn auch freilich alsdann bei den bessern Naturen hinterher die Einsicht bestätigt werden wird, dass die Befassung mit den gemeinhin empfohlenen Lehrbüchern des Tages dem Greifen in einen Loostopf gleicht, der lauter Nieten enthält.

Hienach ist ein wirklich guter Cursus der gesammten Elemente

der Mathematik eine noch erst zu erfüllende Aufgabe. Mag dieser nun zu Stande kommen, wann er wolle, sei es im laufenden Menschenalter, sei es erst nach Jahrhunderten, — immer werden die Gesichtspunkte, die auf ihn abzielen und ihn möglicher machen, auch schon jetzt für Studium und Unterricht nützlich werden können. Wenn nämlich solchen leitenden Gesichtspunkten auch nur zum Theil und auch nur in Untermischung mit dem Ungehörigen entsprochen wird, so ist dies immerhin eine Annäherung an das Bessere und wird auch in der unvollkommenen Gestalt einige Erleichterung gewähren.

Vor allen Dingen hat man den Begriff der Elemente gegenwärtig in weiterem Umfang ins Auge zu fassen, als früher der Fall sein konnte. In allen ihren Gebieten hat die Mathematik Elemente, d. h. sie weist einen Inbegriff von einfacheren Lehren auf, die sich bis dahin erstrecken, wo der verhältnissmässig zusammengesetzte Charakter der Aufgaben unverkennbar ist und aus Zweckmässigkeitsgründen zu einer Abtrennung auffordert. So hat beispielsweise der moderne Hauptfactor der gesammten Mathematik, die Rechnung mit dem Veränderlichen und Stetigen, auch seine einfachen Elementarbegriffe und elementaren Hauptsätze, die sich sehr wohl von den üblichen Ausführungen eines eingehenden Cursus der Differential-, Integral- und Variationsrechnung abtrennen und mit den herkömmlichen Elementen der sogenannten niedern Mathematik vereinigen lassen. Nicht minder möglich, wenn auch weniger wichtig, ist die Entnahme einiger Grundlehren der Zahlentheorie im heutigen engern Sinne dieses Worts, um in den Elementen die einfachsten Eigenschaften der Zahlen doch nicht mehr zu vernachlässigen als die der Figuren. Neben der Elementargeometrie muss es auch eine abgesonderte Elementarzahlenlehre geben, die nicht mit der rechnenden Arithmetik oder Algebra zu verwechseln ist; ja bei Euklides selbst fand sich grade hievon, wenigstens im antiken Sinne, schon etwas, wozu namentlich der Begriff der geometrischen Incommensurabilität genöthigt hatte.

Die in den erwähnten Beispielen angedeuteten Ausdehnungen eines Cursus der Elemente werden sich je nach dem Stande und Umfang der verschiedenen mathematischen Disciplinen vervielfältigen. Gewinnt eine derselben, wie etwa die Geometrie in verschiedenartigen Projectionen, neue Mittel und Ansatzpunkte, so müssen auch die Anfänge der letzteren und zwar mit den am meisten charakteristischen Fundamentalwahrheiten in die Elemente

aufgenommen werden. Monges Gebrauch jener doppelten Projection, vermöge deren er die beschreibende oder, wie man auch sagt, darstellende Geometrie schuf, ist ein geometrisches Grundmittel von schon an sich elementarem Charakter und daher um so leichter in einen Elementarcursus aufzunehmen. Mehr Schwierigkeiten bietet schon die centrale Projection, wo sie als allgemeines Mittel der geometrischen Untersuchung aufgetreten ist. Diese sogenannte projectivische Geometrie, die man früher ziemlich unpassend die moderne synthetische nannte, und für die das repräsentirende Hauptwerk noch immer der Ponceletsche Tractat von den projectiven Eigenschaften der Figuren geblieben ist, leidet in ihrer bisherigen, namentlich aber ihrer späteren Gestaltung an dem Bestreben, ihrem äusserst beschränkten neuen Mittel allzuviel unterzuordnen oder vielmehr unterzuzwängen. Die Unnatur der Behandlungsart, die neuerdings aus jenem Fehler erwachsen ist, hat das Gebiet ziemlich verzwickt werden lassen. Es wird daher erst eine Kritik und eine Zurückführung der projectiven Methoden auf deren natürliches Gebiet erforderlich sein, ehe dieser neue Ausläufer der Geometrie diejenige Gestalt annehmen und in demjenigen Licht erscheinen kann, in welchem er für die Gesammtelemente der Mathematik etwas zugleich Einfaches, Klares und Nützliches unmittelbar sichtbar macht. Wir werden auf diese Arten Geometrie in einem besondern Capitel zurückkommen, um dort, ganz abgesehen von den Elementen, den verhältnissmässigen Nutzen, aber auch die Nachtheile kenntlich zu machen, welche jene neuen geometrischen Methoden für die Mathematik gehabt haben. Hier sei nur vorweggenommen, dass diese Methoden in Vergleichung mit den mächtigen Mitteln der älteren, noch gesunden und naturgemäss gehandhabten Analysis nur als subalterne Erscheinungen angesehen werden können, wenn sie auch immerhin eine Gegengabe gegen das Gift bildeten, welches in dem gedankenlosen und seine realen Ansatzpunkte vernachlässigenden Gebrauch der Analysis lag. Wo also centrale Projectionen und sogenannte Strahlenbüschel in die Elemente als verhältnissmässig einfache Mittel zu gewissen geometrischen Untersuchungen aufgenommen werden sollen, da hat man besonders darauf zu achten, dass der enge Bezirk natürlicher Anwendungen solcher Mittel in seiner nicht blos thatsächlichen, sondern auch nothwendigen Beschränktheit sichtbar werde. Die projectiven Mittel bilden einen Bestandtheil, ja eigentlich nur ein paar ein-

zelne Wendungen in dem Gesammtsystem von Operationen, durch deren Hülfe geometrische Wahrheiten zu Tage gefördert und bewiesen werden. Hieraus folgt nun auch eine entsprechende Stellung ihrer Ausgangspunkte in den Elementen der Mathematik.

7. Ein solcher Mustercursus der mathematischen Elemente, wie wir ihn im Sinne haben, kann an verhältnissmässiger Kürze und Bündigkeit auch die besten früheren, mehr oder minder partiell eingeschränkten Darstellungen übertreffen. Euklids wesentlich auf Geometrie und Lagranges wesentlich auf Algebra gerichtete Elemente erschöpften zusammen noch keineswegs das seit der neusten Zeit herkömmliche Elementargebiet; denn die ebene und die sphärische Trigonometrie und die Anfänge der analytischen Geometrie, die man allenfalls schon am Kreise und an der Kugel lehren kann, wollen auch berücksichtigt sein. Substituirt man, was sich freilich in der Vergleichung der Namen komisch ausnimmt, aber des Stoffes wegen unvermeidlich ist, den Elementen Euklids in manchen Beziehungen die Elemente der Geometrie von Legendre, so hat man einige moderne Lehren mehr, aber auch noch nicht Alles. Namentlich fehlen alsdann noch jene eingeschränkten Elemente der analytischen Geometrie, die man übrigens mindestens auf alle Kegelschnitte, ja am besten gleich auf die Haupttypen der Flächen zweiten Grades anwenden muss, wenn sie praktisch etwas bedeuten und nicht eine hohle Zurüstung bleiben sollen. Ist aber einmal das Gebiet der räumlichen Gebilde zweiten Grades betreten, so sieht man nicht ein, warum blos in der Algebra die allgemeine Behandlung des zweiten Grades etwas ganz Elementares sein, in der Geometrie aber als höherbelegen und als zusammengesetzter gelten soll.

Offenbar ist nur die Unbestimmtheit oder, was dasselbe heisst, die Veränderlichkeit der Grössen, die sowohl in der Algebra als in der Geometrie elementar in Anschlag kommen muss, daran schuld, wenn man die entsprechende Consequenz nicht zieht. Die einfachern Diophantischen Gleichungen gehören in die Elementaralgebra, und zu ihr muss sich eine Elementaranalysis gesellen, welche die Gebilde zweiten Grades mit Differentialen, Integralen und Variationen behandeln lehrt. Hiedurch wird auch die Halbwüchsigkeit der üblichen Behandlung der analytischen Geometrie vermieden, deren Abgrenzung als besondere Disciplin auch heute noch vorherrschend darauf beruht, dass sie sich einseitig als blosse gemeine Algebra der Geomentrie be-

nimmt und demgemäss alle Aufgaben ausschliesst, für welche die Rechnung mit den Veränderlichen, namentlich aber das Integriren, erforderlich ist. Es ist dies eine bizarre Trennung, die daher auch nirgend verfehlt hat, zu gelegentlichen Inconsequenzen, d. h. zur Einmischung vereinzelter Abweichungen zu führen. Wie komisch wäre es beispielsweise, sich eine analytische Mechanik in jener Beschränkung der analytischen Geometrie auf rein algebraisch behandelbare Beziehungen denken zu wollen! Entschliesst man sich, das nicht zu trennen, was natürlich zusammengehört, so wird man die analytische Behandlung des Geometrischen sofort in den Elementen so verstehen, dass man dabei alle einfachen analytischen Grundmittel insgesammt zur Anwendung bringt.

Jedenfalls stimmt es auch schon zur heutigen Bemessung der Elemente, die Kreisfunctionen, die man nur trigonometrisch einführt, in erweiterten Elementen auch analytisch zu behandeln und aus der Umkehrung von Kreisintegralen hervorgehen zu lassen. Man hat hiebei beispielsweise auch noch den Vortheil, die moderne Ableitung des Verhältnisses von Kreisdurchmesser und Kreisumfang in gehöriger Weise geben und die unnützen Umständlichkeiten vermeiden zu können, welche nach Archimedischer Art die Berechnung der die Kreislinie einschliessenden und sich ihr unbeschränkt nähernden Polygone mitsichbringt. Ueberhaupt wird viel directe Geometrie, die trotzdem mit Berechnungen gemischt ist, in Wegfall kommen, so dass dem rechnenden Factor sein voller Antheil wird und der ausschliesslich geometrische Bestandtheil auf die nothwendigen Ansatzpunkte angewiesen bleibt. Denkt man sich überdies die ersten Principien und Fälle der Analysis des Veränderlichen überall in die allgemeinen Elemente der Mathematik hineingearbeitet, so werden beispielsweise auch die in der heutigen Stereometrie vorkommenden Berechnungen zugleich abstracter, einfacher und übersichtlicher vollzogen werden können, und es wird überhaupt in allen Zweigen, namentlich aber auch in der Trigonometrie, durch die Beihülfe der Analysis an geometrischen Zurüstungen gespart werden. Diese geometrischen Zurüstungen auf ein geringstes Maass zurückzuführen, diesem nothwendigen Maass aber dann auch sein volles Recht widerfahren und hier die Anschaulichkeit gehörig walten zu lassen, ist Angesichts des modernen Zustandes der Mathematik ein Erforderniss strenger Wissenschaftlichkeit.

Die praktische Frucht davon kann, wie schon oben bemerkt, eine Kürze und Bündigkeit sein, vermöge deren zu universell gehaltenen und die Ansatzpunkte aller Gebiete einschliessenden Elementen der Gesammtmathematik kein grösserer Raum erfordert wird, als er früher für die beschränkter gefassten Elemente gebraucht wurde.

Diese Art von Concentrirung wird im Interesse des Unterrichts und der Bildung immer dringender; denn in dem Maasse, in welchem die modernen Stoffe sich extensiv gehäuft haben, müssen auch die formellen Kräfte und Mittel gesteigert werden, sie intensiv zu bewältigen. Gleichgültige Ausspinnungen und gemeine Breitspurigkeiten sind hier nicht am Platze. Im Gegentheil muss ganz besonders darauf Bedacht genommen werden, immer nur die charakteristischen Wahrheiten von bestimmter individueller Physionomie vorzutragen, die gleichgültigen und secundären Beziehungen aber wegzulassen. Mit letzteren drischt man doch nur leeres Stroh, während die ersteren zur Frucht und zur Herrschaft über alles Uebrige verhelfen, was auch an Wahrheiten einer niedern Ordnung unter Umständen in Frage kommen mag. Für die Auswahl der charakteristischen Sätze ist meist deren natürliche Markirtheit in der Geschichte der Wissenschaft ein erster und äusserlicher Wegweiser; jedoch können diese Fingerzeige nicht die letzte Instanz bilden, und namentlich wird sich für die Beweise der Wahrheiten der Typus vielfach in der Richtung auf das Abstractere ändern. Hieher gehört beispielsweise die von uns schon mehrfach hervorgehobene Nothwendigkeit, das unmittelbar Geometrische in grösserem Maasse durch den rechnenden Factor zu ersetzen. Dieses Ersatzprincip muss auch zur Abänderung mancher geschichtlich herkömmlicher Beweise führen. Kürze und Einfachheit der Beweise bemessen sich aber nach der Anzahl und nach der natürlichen Beschaffenheit der Mittelglieder. Stets muss es in jeglichem Fall für eine Wahrheit einen Beweis geben, der unter allen möglichen der kürzeste und natürlichste ist. Die Einschaltung von Mittelbegriffen ist ja überhaupt nur dazu erforderlich, um zu den unmittelbaren Einsichten, d. h. zu den Axiomen oder im Zusammenhange des Systems zu bereits bewiesenen Sätzen zu gelangen.

Grade im System der Elemente muss Alles, was nicht unmittelbare Einsicht, also nicht Axiom ist, auch wirklich bewiesen werden. Sonst ist keine Zurückführung auf das Einfachste und

mithin keine volle Strenge vorhanden. So versteht sich der Satz, dass sich in einem Product die Factoren vertauschen lassen, ohne das Ergebniss an Einheiten zu ändern, keineswegs von selbst. Jedoch beweist man ihn heute nur bei dem Eingang in eines der jetzt für hoch geltenden Gebiete, nämlich unter den ersten Fundamentalsätzen der Zahlentheorie. Auch geräth der übliche Beweis, sobald mit den Raumdimensionen die gewöhnlichen veranschaulichenden Wendungen als erschöpft gelten und eine grössere Factorenzahl in Frage kommt, allerdings zu complicirt und unnatürlich, um sich für echte Elemente zu empfehlen. In solchen Fällen nun muss man Rath schaffen und die Sachlage dadurch verbessern, dass man echt elementare Beweise aufsucht.

Was jenes Beispiel von der Vertauschbarkeit der Factoren anbetrifft, so haben wir gefunden, dass eine einzige lineare Dimension oder vielmehr eine einzige Reihe genügt, um die Verschiedenheit des Operirens bei der Vertauschung noch so vieler Factoren als für das Ergebniss gleichgültig zu erweisen. Es ist nämlich nichts Anderes darzuthun, als dass die Gesammtzahl aller Einheiten immer dieselbe bleibt, gleichviel in welchen Abschnitten und Gruppen und nach welcher Reihenfolge man die einzelnen zusammenfasst. Zunächst stellt man die Einheitsgruppe des Multiplicandus als Reihe hin und wiederholt diese Gruppe bei Fortsetzung der Reihe so oft, als der Multiplicator Einheiten enthält; dann verfährt man mit der combinatorischen Gesammtgruppe auf dieselbe Weise, indem man sie so oft wiederholt, als der dritte Factor Einheiten enthält u. s. f. ohne irgend welche Beschränkung. Schliesslich zeigt man, und dies ist der Nerv des Beweises, dass sich die Gesammtmenge der Einheiten in den verschiedensten Weisen abzählen lässt. Man kann beispielsweise aus der einen Gruppe, statt alle Einheiten hintereinander zusammenzufassen, nur die erste nehmen, dann in den Wiederholungen der Gruppe auch jedesmal die erste Einheit hinzufügen, bis man mit allen Wiederholungen der Gruppe fertig ist, dann mit den zweiten Einheiten ebenso verfahren u. s. w., wodurch man bereits eine Abänderung der Operation im Sinne der Vertauschung von zwei Factoren erreicht. Vornehm ausgedrückt, heisst dies, die Art der Synthese der Einheiten hat sich geändert, aber die Anzahl bleibt dabei identisch. Allerdings erfordert es einige Abstraction, den verschiedenen Gang, den man in der Reihe nimmt, im Falle der Häufung der Factoren sich regelrecht vorstellig zu machen;

aber eigentliche Schwierigkeiten und Ungleichartigkeiten in der Beweisart treten nicht ein. Auch versteht sich, dass die hier gegebene Skizze nicht den vollen elementaren Beweis vertritt, der weitläufiger ausfallen muss, dafür aber auch die Hülfe bestimmter Schemata und Zahlen nicht entbehrt.

8. Gestaltet man in der angedeuteten Art die Beweise um und erfindet man, wo es die veränderte Gangart erfordert, entsprechende neue, so wird ein solcher moderner Grundbau der Mathematik weit mehr naturgemäss ausfallen und bei verhältnissmässiger Kürze mehr Einfachheit, Strenge, ja Schönheit der Form zeigen können, als bei Euklides. Wir dürfen nämlich nie vergessen, dass die Euklidischen Elemente im Bereich des Alexandrinischen Gelehrtenstalles entstanden sind, und dass auch hierauf die Züge der Unnatur zu verrechnen sind, durch welche sie sich nicht minder auszeichnen, als durch die Schärfe, die der Ueberlieferung von einem bessern Ursprung her und aus freieren Kreisen zu verdanken war. Voraussichtlich hat die moderne Welt kein ähnliches Schicksal wie die antike zu gewärtigen, sondern im Gegentheil Chancen gesteigerter Emancipation. Es wird daher auch schwerlich unser installirtes Gelehrtenthum sein, welches auf Grund seiner universitären Bestallungen dazu gelangen dürfte, den fraglichen Grundbau in Entreprise zu erhalten. Das verlehrte Pfuschwerk, welches gemeiniglich bei so etwas herauskommt, würde sich auf die Dauer nicht behaupten können, und da an eine gänzliche Unterdrückung der freieren Naturen und Kreise in der modernen Welt nicht zu denken ist, so dürfte auch kein Stallgelehrter einst gleich den Würmern der Erbe früheren bessern Lebens werden und etwa die Hinterlassenschaften edlerer Geister in seiner Weise zu verzehren bekommen. Der Stil, in welchem der Bau der modernen Mathematik allein auszuführen ist, kann ohnehin nur ein freier, natürlicher und edler sein; denn anders sind die umfassenden Materialien zu keiner ebenmässigen Gestalt zu vereinigen. Die Aufgabe muss daher gut gelöst werden oder aber kläglich scheitern, und dieser Sachverhalt mag eine Beruhigung für diejenigen werden, welche in den Fall kommen, auf das Ziel mit Vorbereitungen hinzuarbeiten.

Ehe die Elemente der gesammten Mathematik jenes Ideal von Vollständigkeit und allseitiger Durchsichtigkeit erreichen, welches wir durch einige Züge gekennzeichnet haben, müssen

erst die Grundlagen der specifisch modernen Mathematik völlig in Ordnung gebracht sein. Nun bedenke man den dürftigen Zustand, in welchem sich bisher die Rechenschaften vom Negativen, vom Imaginären, vom Unendlichen und von dem befunden haben, was wir Zeichenwerthigkeit nennen, so wird man ermessen, dass schon um dieser fundamentalen Mängel und Lücken Willen klare und strenge Elemente der modernen Mathematik bis jetzt eine Unmöglichkeit bleiben mussten. Mindestens das, was in unsern ersten drei Capiteln an Grundlehren auseinandergesetzt ist, kann nicht umgangen werden, wenn ein besserer Elementarcursus zu Stande kommen soll. Aber auch die allgemeinen Bestandtheile unserer weiteren Ausführungen werden erforderlich, sobald man die Elemente so einrichten will, dass sich an sie das Gesammtsystem der höhern Mathematik gleichartig anschliessen und einfach eine Fortsetzung derselben bilden kann.

Bezüglich der Behandlung der Algebra liefert unsere Werthigkeitsrechnung ein Mittel, grade im Bereich der Elemente, d. h. bis zu den Gleichungen vierten Grades, oder mit andern Worten, für die algebraisch allgemein auflösbaren Gleichungen eine geregelte Methode an Stelle der bisherigen Zufälligkeiten und Kunstgriffe einzuführen. Der Elementarunterricht, wie er jetzt noch beschaffen ist, könnte höchstens wegen der Schlüsse auf die Wurzelform in Verlegenheit gerathen. Aber auch im Hinblick hierauf und bis sich der Elementarcursus auch in dieser Hinsicht vervollkommnet hat, wäre es immer noch besser, die unmittelbare Aufstellung der Wurzelform als einen einzigen unmotivirten Kunstgriff zu benützen, statt, wie bisher, vielerlei Kunstgriffe im Gange des Verfahrens zu häufen. Unsere neue Methode will nicht blos an sich selbst, sondern auch in Beziehung auf die Verbesserung des Unterrichts gewürdigt sein. Es gehört zu ihren Vorzügen, dass sie zwei Stufen einer solchen Verbesserung mitsichbringt, erstens provisorisch die Ersetzung von allerlei zufälligen Kunstgriffen durch das Ausgehen von der Wurzelform, und zweitens definitiv die Einführung solcher Betrachtungen und Schlussweisen, sowie einer solchen Gangart in die allgemeinen Elemente der Mathematik, dass hiedurch auch dem Anfänger eine strenge Ableitung der jedesmal erforderlichen Wurzelform zu etwas Geläufigem werden kann. Bei einer zweckmässigen Gangart und wirklichen Synthese darf es, wie wir schon früher bemerkt haben, freilich nicht scholastisch rubrikenhaft

hergehen. Man wird selbstverständlich die Gleichungen zweiten Grades auch nach unserer Methode eher behandeln, als man sich auf Sätze der allgemeinen Gleichungstheorie einlässt. Wohl aber werden letztere zweckmässigerweise den algebraischen Lösungen der Gleichungen dritten und vierten Grades vorangehen.

Hiemit ist ersichtlich, dass man auch von der allgemeinen Gleichungstheorie eigentliche Elemente abzusondern und in einen Elementarcursus aufzunehmen hat. Das höhere Gebiet grenzt sich alsdann methodisch auf eine natürliche Weise ab, indem es da beginnt, wo die Einfügung der Lagrangeschen Permutationsalgebra in den Rahmen der früheren, im höheren Sinne des Worts mehr elementaren Verfahrungsarten nothwendig wird. Demgemäss ist grade die Skizze in unserem sechsten Capitel auch heute schon geeignet, die Grundlage für elementare Ausführungen zu bilden, durch welche die Gleichungen bis zum vierten Grade nach einer einfachen, gleichmässigen und rein algebraischen Methode in strengster Weise und mit genauester Berücksichtigung der Werthigkeiten erledigt werden. Auch versteht sich, dass es leicht ist, dieselbe Methode unmittelbar auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten anzuwenden, soweit der durch die Combination resultirende Grad den vierten, d. h. die Grenzen der allgemeinen algebraischen Lösbarkeit, nicht überschreitet. Eine Verbindung von zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten wäre hier der entscheidende Typus, und man hätte in diesem Fall von vornherein die Wurzelform vierten Grades einzusetzen. Jedoch würde eine solche Ausdehnung nur dazu dienen, die Allgemeinheit der Methode zu zeigen. In den meisten Fällen aber wird man die Gleichungen mit mehreren Unbekannten erst durch die gewöhnliche Elimination auf eine mit einer Unbekannten zurückführen.

Wollten wir hier auf alle Theile der mathematischen Elemente in dem gekennzeichneten umfassenderen Sinne des Worts eingehen, so müssten wir allerlei vorwegnehmen, was dem Herkommen entsprechend vom Leser eher im nächsten Capitel bei der Erörterung eines Cursus der höhern Mathematik gewärtigt wird. Obwohl es daher beispielsweise zweckmässig ist, den Begriff eines unbeschränktkleinen Zuwachses und das einfachste Rechnen mit einem solchen schon in die herkömmlichen Elemente aufzunehmen und namentlich bei den stereometrischen Berechnungen bewussterweise zu verwenden, so werden wir doch die

Behandlungsart des Infinitesimalen erst im Hinblick auf das Studium des entsprechenden höhern Gesammtgebiets in Frage bringen. Indem wir also hier diejenigen Verzweigungen der Elemente auf sich beruhen lassen, die thatsächlich noch immer nur in den höhern Disciplinen eingeschlossen behandelt werden, wenden wir uns zu einer allgemeinen Erinnerung an das Erforderniss einer wirklich praktischen Haltung jeglichen Cursus.

Für den Unterricht wie für das Selbststudium ist es ein grosser Fehler, von Anwendungen absehen zu wollen und die Kahlheit und Dürre blosser Abstraction zur Richtschnur zu nehmen oder gar als Muster hinzustellen. Am meisten rächt sich aber dieser Fehler im Bereich der Elemente; denn hier hat die willkürlich hingestellte Abstraction noch weniger Berechtigung und schadet mehr, als irgendwo sonst. Vor den Anwendungen oder Anknüpfungspunkten, die ausserhalb der reinen Mathematik liegen, ist aber bereits auf diejenige Gestaltung der Theorie zu halten, vermöge deren sie sich an Typen, ja sozusagen an individuellen Gebilden in bestimmt umgrenzter Weise darstellt. Das Kreis- und Hyperbelschema in unserer Imaginärtheorie ist ein Beispiel für solche völlige Bestimmtheit und Umgrenzung. Ebenso sind rein analytisch betrachtet die zugehörigen Gleichungen nicht etwa beliebige Anwendungsbeispiele, sondern selbst die einfachsten analytischen Typen, von denen in der Darlegung der allgemeinen Theorie auszugehen ist.

Von dem Stoff, der ausserhalb der Mathematik liegt, aber deren Sinn und Fruchtbarkeit erläutert, ja meist die Veranlassung zur Stellung der Aufgaben und Auffindung der Sätze gewesen ist, — von diesem Gebiet vermeintlich blosser Anwendungen, in welchem aber wirklich die belebende Quelle liegt, wollen wir hier im blossen Hinblick auf die Elemente nicht reden. Das Verhalten zu dieser Quelle ist eine Lebensfrage der gesammten mathematischen Forschung und daher später noch besonders zu erörtern. Hier, bezüglich der Elemente, mag nur noch die Bemerkung platzfinden, dass es sich eigentlich von selbst verstehen sollte, wie in einem Studien- oder Unterrichtscursus die praktische Bethätigung des rein mathematischen Könnens erst volleres Interesse zu erregen und Leben in die Sache zu bringen vermöge. Auch meine man nicht, dass diese unmittelbare praktische Bethätigung durch nebenhergehende Curse besonderer sachlicher Disciplinen, in denen die Mathematik zur Anwendung gelangt,

genugsam ersetzt werden könne. Die zur Erläuterung und Belebung dienlichsten Fälle praktischer Mathematik wollen sofort als Beispiele eingefügt sein, und übrigens ist es auch da, wo eine abstractere Darstellungsart platzgreifen kann, ein Bedürfniss, dass die am meisten charakteristischen Anwendungen, wo sie sich nicht von selbst verstehen, wenigstens signalisirt werden. Letzteres mag in mehr oder minder allgemeiner oder specieller Weise geschehen; jedenfalls kommt ein lebendiges System der Wissenschaft nur zu Stande, wo auch Angesichts der höchsten Allgemeinheiten und entferntesten Abstractionen das Bewusstsein des Zusammenhangs mit dem voll Wirklichen rege gehalten wird.

Siebzehntes Capitel.

Der Cursus der höhern Mathematik.

1. Fragt man nach der bisher verhältnissmässig besten Lehrform für das theoretisch und praktisch Wichtigste aus dem Bereich der modernen höhern Mathematik, so ist jene auf französischem Boden, wenn auch deswegen nicht grade ausschliesslich durch Personen rein französischer Abstammung, ausgebildet worden. Drei Umstände haben am Ausgange des 18. Jahrhunderts zusammengewirkt, auch für spätere, weniger begünstigte Zeiten in Paris eine elegante oder, um deutsch zu reden, eine gewählte Schulung in der modernen Mathematik möglich zu machen, und alle Reaction und Mattigkeit des 19. Jahrhunderts hat den Fortbestand jenes Aufschwungs nicht gänzlich beeinträchtigen können. Jene drei Umstände waren die schriftstellerische und lehrende Thätigkeit Lagranges, daneben das Aufrüttelnde der Revolution mit ihren auch im Lehrfach neuen Wegen und Schöpfungen und hiemit alsdann die Energie, mit welcher Gewandtheit, Geschmack und gewissermaassen auch Dinge, wie militärische Regelung, in die modernsten Zweige des höheren Unterrichts, namentlich in die allgemeine polytechnische Vorbereitung für die verschiedenen technischen Fächer, getragen wurden. Isolirt hätten die drei Ursachen nicht das Gleiche hervorbringen können. Wäre Lagrange nicht durch die Macht der

äussern Thatsachen, also in Folge der Revolution, dazu gelangt, in seinem Innern auch eine Art Revolution durchzumachen, so würde er seine sanften Neigungen wohl nicht dazu gesteigert haben, gegen die mathematische Metaphysik entschieden mit einem besondern Werk, mit der Theorie der analytischen Functionen, aufzutreten und so für das nächste Jahrhundert den Epigonenmathematikern ein Stein des Anstosses zu werden.

Hätte aber die Revolution nicht Lehranstalten neuer Art geschaffen und die Universitäten und Akademien, die sie zu beseitigen unternahm, wenigstens in eine Nebenstellung gedrängt, so hätten eine einigermaassen bessere Lehrart und bessere Lehrbücher sich in der Breite der lernenden Schichten nicht einbürgern, ja nicht einmal entstehen können. Die innere Möglichkeit eines guten Lehrbuchs, d. h. der Umstand, dass Jemand da ist, der es verfassen könnte, genügt nicht, um einem solchen Werk zum Dasein zu verhelfen. Es müssen auch die äussern Chancen hinzutreten, damit es werden könne; denn Niemand, der Erfahrung und Urtheil über den thatsächlichen und nothwendigen Gang solcher Dinge hat, wird seine Mühe verschwenden, damit die passive, beschränkte, im Banne der gemeinen Schulautorität sich bewegende und dort auch noch durch Interessen festgehaltene Masse dem elendesten Unterricht und den albernsten Universitätscompendien nachzulaufen fortfahre. Für eine äusserst geringe und bevorzugte Minderheit, die nichts nach den Scholarchen, nichts nach Rücksichten auf deren corrupte Examina und nichts nach scholastischer Protection, nichts nach den gelehrten Zünften, nichts nach gemeiner bürgerlicher Beförderung und deren Preis, der gehorsamsten Devotion gegen die wurmstichigen Autoritätchen, zu fragen braucht oder fragen will, — für eine solche Minderheit von stets sehr geringer Zahl mögen bahnbrechende Werke, aber nicht durchschnittliche Lehrbücher zur Welt kommen. Hier wissen die Verfasser, welche Opfer sie bezüglich der Breite des Erfolges bringen, und wenn nebenbei ihre Werke auch einmal glücklicherweise die Eigenschaft hätten, zugleich eigentliche und elementar detaillirte Lehrbücher zu sein, so würde selbst dieser Vorzug nur wenig fruchten und nicht gegen die verderbten selbstsüchtigen Interessen der verkommenen, von Zunft- und Amtswegen lehrenden Schulfiguranten bei der nicht blos unmündigen, sondern auch unfreien Masse Sonderliches ausrichten. Wo aber von eigentlichen Lehrbüchern die

Rede sein soll, da kommt die Masse der Lernenden als Masse und nicht blos in ihren ausgezeichneteren Köpfen und Charakteren in Frage. Oekonomisch kann ohne einen ansehnlichen Absatz im Buchhandel kein Lehrbuch existenzfähig werden, und über den Markt verfügt, um volkswirthschaftlich zu reden, entweder das noch echt mittelalterliche Bann- und Zwangsrecht universitärer Art oder überhaupt der Einfluss, den auch in den modernen Formen die Belehnung und Privilegirung mit den Stücken des Unterrichtsmonopols von Staatswegen mitsichbringt.

Ohne das Maass von Spielraum und Freiheit zu verkennen, welches innerhalb der modernen Gesellschaft thatsächlich existirt, lässt sich doch nicht bestreiten, dass diese den schlechten Autoritäten zum Trotz vorhandenen Bewegungskanäle nicht ausreichen, um zur Menge zu dringen, und noch weniger, um diese Menge auch wirklich bei ihrem Geiste zu ergreifen und ihren Sinn nach besseren Mustern zu regeln. Wie der Gesellschaftsstoff nun einmal noch immer beschaffen und amtlich eingezwängt oder eingewöhnt ist, muss auch das Bessere einigermaassen von Amtswegen kommen, wenn es sich in einer gewissen Breite geltend machen soll. Freilich geschieht dies nur in Abschwächungen und zum Theil auch sonstigen Verderbungen des Besseren; aber das unverfälschte Gute ist nun einmal auf diesem Wege bei der gegenwärtigen Beschaffenheit von Gesellschaft und Staat nicht zu haben. So konnte es denn immerhin als ein Fortschritt gelten, dass sich an die Aufraffungen der Revolution, wenn auch in sehr reducirter Weise, die Gründungen von Lehranstalten schlossen, die dem modernen Geiste wenigstens mehr huldigten, als die altfränkischen, nicht blos corrupten, sondern die Corruption noch mit Impotenz und Altersschwäche verbindenden Institute des früheren Regime.

Die fraglichen Einrichtungen waren nicht reine Schöpfungen der Revolution, sondern der durch die Reaction zum Theil erstickten Revolution. Etwas Stickluft darf daher von vornherein nicht Wunder nehmen; aber etwas mehr moderner Geist war ohne Frage zum Durchbruch gelangt. Unter den letzten Ausläufern jener Lehranstalten ist die Pariser polytechnische Schule am berühmtesten; sie hat mit einzelnen technischen Fächern nichts zu schaffen, sondern befasst sich mit den allgemeinen Wissenschaften, die für alle Zweige vorbildend sind. Sie ist also wesentlich eine Hochschule für Mathematik und Naturwissen-

schaft, und schon durch diesen Gegenstand muss sie unwillkürlich dem modernen Geist näher stehen, als die Institute für die überlebte Gelehrsamkeit des alten Regime, die noch nie eigentliche Wissenschaft gewesen ist, ja es auf den verfallenden und corrupten Instituten auch nie werden kann. An Corruption hat es freilich selbstverständlich auch der Pariser polytechnischen Schule nicht gefehlt; denn sie war in den Rahmen der übrigen Institute hineingegründet, und überhaupt liess sich eine Jahrhunderte alte Ueberlieferung des Gelehrtenbereichs nicht mit einigen halben Zugeständnissen an den modernen Geist abthun. Noch weniger liessen sich aus Nichts die Charaktere schaffen, die wesentlich besser gewesen wären, als das Gezücht des alten Regime. Die auf die Revolution folgende Napoleonische Aera war wahrlich nicht danach geartet, wirklich Grosses in dieser Richtung zu Tage zu fördern. Wenn sie etwas Besseres duldete und damit eitel that, wie mit einem Lagrange, so war dies eine zufällige Erbschaft, von der weder sie noch das alte Regime noch die Revolution, ja nicht einmal die Nation als Ursache gelten konnte. Lagrange war zum Theil italienischer Abstammung; er war auch staatlich Ausländer; man hatte ihn während der Revolution als Ausländer sogar verjagen wollen, und in der That nimmt er sich noch heute inmitten der französisch geschriebenen wissenschaftlichen Literatur bezüglich des Genies als Einer aus, der in das specifische Bereich des eigentlichen Franzosenthums nicht gehört, sondern über der nationalen Eigenart in einer höhern Region seinen Platz hat. Sogar in formeller Beziehung steht der von ihm in seinen Schriften bekundete Schönheitsinn noch über dem Geschmack der Franzosen, und doch ist schon letzterer, verglichen mit den Plumpheiten mancher andern Völker, etwas werth und hat nicht zum geringsten Theil dazu beigetragen, jener polytechnischen Schulung und der zugehörigen Lehrbuchliteratur eine sozusagen angenehme Façon zu geben.

Man braucht daher noch gar nicht Schönheitsanforderungen zu stellen, sondern nur am Geschmack etwas Geschmack zu finden, d. h. gegen das Geschmacklose und Plumpe nur ein wenig empfindlich zu sein, um selbst im Falle sonstiger nationalitärer Gegenneigungen die in der Pariser polytechnischen Schule üblich gebliebenen Lehrformen der mathematischen und physikalischen Stoffe für eleganter und verständlicher zu halten, als was bisher anderwärts zu Markte gekommen ist.

2. Cursfähige Lehrbücher mussten bisher stets tief unter den Originalwerken lebendiger Geister stehen und hinter den Anforderungen an ursprüngliche Natürlichkeit, entschiedene Klarheit und volle Ebenmässigkeit zurückbleiben. Dies hat seine Ursache in der Macht des schlechten Unterrichtssystems, welches sich seit dem Mittelalter und dessen Ausgang herschreibt und auch die modernsten Zweige des Wissens von vornherein zu sich herabgezogen und in seinem Rahmen verunstaltet hat. Dieses System ist daran schuld, wenn Vieles von dem Bessern in trüben Mischungen und in verkehrter Gestalt zur Welt kam, sich aber auch da, wo es ursprünglich reiner zu Tage getreten war, nur in Degradationen und Fälschungen weiter verbreitet finden konnte. Jenes religiös abergläubische und politisch sklavische System, dem die neuern Völker durch die Ueberlieferungen des Asiatismus und des verderbten römischen Reichs anheimgefallen sind, d. h. die Herrschaft der innern und der äussern Lüge und Feigheit, hat alle Lehreinrichtungen ebenfalls zu einem entscheidenden Theil von vornherein in Schulen der Lüge und Unterthänigkeit verwandelt. Hieraus erklärt sich nicht blos die methodische Zuchtwahl der jedesmal elendesten Gelehrtencharaktere, sondern auch die Thatsache, dass ein so entstandenes und durch Jahrhunderte der Gemeinheit geformtes Gelehrtengezücht unter sich Maximen und Sitten gezeitigt hat, die in Rücksicht auf Unselbständigkeit, Unfreiheit, gemeine Unterordnung unter gelehrte und andere Autorität, sowie überhaupt in Erstickung besserer und natürlicherer menschlicher Regungen alles nur irgend Mögliche geleistet hat. So ist es schliesslich dahin gekommen, dass eine Mischung von Cretinismus, Albernheit, bewusstem Schwindel, ja bisweilen gradezu Gaunerthum das hervorstechende Gepräge der Gelehrtenschaft geworden ist und dass sich das Lumpige und Feige der Geistessignatur gebührend mit gelegentlicher gelehrter Strolchhaftigkeit gegattet findet. Grade im Hinblick auf die der grössten Klarheit und der sichersten Wahrheitscontrole fähige Wissenschaft ist diese Kennzeichnung am Platze; denn in der Mathematik wähnt das unerfahrene Publicum ein Gebiet vor sich zu haben, welches von jenen äussern Dingen unberührt bleibe. Jedoch ist in Wahrheit eben dieses Gebiet der Ort, wo sich der Contrast zwischen richtiger und gefälschter Wissenschaft sowie zwischen einer anständigen und einer elenden Behandlung und Lehre des Gegenstandes am schroffsten zeigt. Wenn Politik

und Philosophie oder ähnliche Sächelchen von den gelehrten Creaturen gefälscht werden, so scheint das Vielen im Publicum nicht weiter verwundersam und fast in der Ordnung. Jedenfalls begreift man diese Folge der Creatürlichkeit; aber bei einer reinen und hohen Wissenschaft, die an sich nichts mit dem gemeinen Wollen und den gemeinen Interessen zu thun zu haben scheint, da begreift man nicht etwa blos den fraglichen Zusammenhang nicht, sondern man denkt gar nicht an ihn.

Man wird nun aber immer mehr genöthigt werden, bei jeglicher wissenschaftlicher Angelegenheit an ihn zu denken, und die Lehrbuchfrage ist nicht die geringste unter solchen Angelegenheiten. Wie gesagt, ist die Pariser polytechnische Schule bei ihrer Gründung noch verhältnissmässig am lebensvollsten, nimmt aber weiterhin, je länger desto mehr, an dem erschlafften Typus der sonstigen Zustände des Geweinwesens Theil. Ihr Professorenthum unterscheidet sich, was den moralischen Charakter und die Begabung anbetrifft, bald nicht mehr sonderlich von den Figuren anderartiger Anstalten; nur der moderne Gegenstand und die Schultradition vom Ursprung her wirken dahin, dass trotzdem noch einiges Gute über Wasser bleibt und in den verworrenen Verschrobenheiten, die sich mit den spätern Jahrzehnten besonders häufen, nicht gänzlich verkommt. Von den zwei hauptsächlichen auf dieser Schule entstandenen Lehrbüchern der höhern Mathematik kann man, sowie überhaupt von den dort maassgebenden Vorträgen, sagen, dass sie eigentlich nur ein einziges Gesammtwerk der Schule sind. Die Stoffauswahl und Lehrart wurde theils durch die ursprüngliche Anregung bestimmt, theils in den einzelnen Gegenständen gradezu amtlich vorgeschrieben, so dass die Professoren, sobald einmal die Sache in Gang gebracht war, nicht viel Anderes zu thun hatten, als einfach die Erbschaft ihres jedesmaligen Vorgängers anzutreten und den stereotypen Vortrag wieder vorzutragen.

Kam nun einmal ein solider Lehrer, der seinen Beruf einigermaassen ernstnahm, so war es auch möglich, dass alsdann auf die Redaction eines zweckmässigen Heftes besondere Sorgfalt verwendet wurde. Ein solcher Mann war Navier, der etwa gegen die dreissiger Jahre hin seinen Cursus ausarbeitete und ihn seinen Schülern in lithographirten Bogen in die Hände gab. So entstand dann das durch den Druck verbreitete Naviersche Lehrbuch, die Résumés des leçons d'analyse. Sie enthalten in zwei Bänden die

zwei stereotypen Jahrescurse der polytechnischen Schule. Was die letzten Ausläufer des achtzehnten Jahrhunderts und die ersten Jahrzehnte des neunzehnten an guten Anregungen gebracht und bewahrt hatten, das wirkte hier in der Lehre eines Professors fort, der mit dem Maass seiner Fähigkeiten sichtlich ehrlich darauf bedacht war, etwas Verständliches in gediegener Weise zu stilisiren und als Anhaltspunkt für das Studium vorzulegen. Zu den zwei Bänden, in denen auf diese Weise der Cursus der Analysis verkörpert wurde, erscheint für denkende Studirende der mündliche Vortrag derselben Sache als eine pure Ueberflüssigkeit. Indessen an solchen luxuriösen Concurrenzen des Drucks und des mündlichen Worts, der Lesung aus dem Buch und der Vorlesung durch den Professor, ist die Universitätstradition vom 12. Jahrhundert her schuld, nicht aber dafür grade ein solcher Mann verantwortlich zu machen, der sich die Mühe gegeben und das Verdienst erworben, brauchbare Lehrvorträge als Buch von sich zu geben. Navier war Techniker im weitern Sinne des Worts und hat sich namentlich auch bezüglich der Lehrmittel für Baumechanik Verdienste erworben. Gerieth auch seine Auffassung der französischen Ueberlieferungen der Analysis verhältnissmässig ein wenig hölzern, wie dies übrigens bei den Lehrbüchern die Regel ist, so war das Holz doch wenigstens gediegen und fest, nicht aber faul und morsch, wie gemeiniglich sonst in dem von den Lehrbuchzimmerern gelieferten Fachwerk. Es ist daher auch ganz nützlich gewesen, dass ein Professor einer deutschen technischen Provincialhochschule, nämlich der sogenannten polytechnischen Schule zu Hannover, die Naviersche Arbeit ins Deutsche übersetzt hat und dass diese Uebersetzung durch die Anlehnung an den dortigen Gebrauch buchhändlerisch existenzfähig geworden und im Lauf von ungefähr drei Jahrzehnten durch vier Auflagen gegangen ist.

Die Naviersche Professur gerieth nach dem Tode ihres Inhabers an einen von Genf gekommenen, aus dem Elsass abstammenden Streber, Karl Sturm, der zu einer mässigen Mitgift von Fähigkeiten auch die entscheidende Fähigkeit gesellte, sich ganz ergebenst an einflussreiche Gelehrte des Augenblicks anzuhäkeln. Namentlich war es seine Unterthänigkeit gegen den halb gelehrten und halb politischen Faiseur und wissenschaftlichen Schauspieler Arago, die ihm zu der fraglichen Professur verhalf, nicht aber etwa jene Kleinigkeit für die Algebra der Zahlen-

gleichungen, an deren dann nachträglich möglich gewordener Erhebung zu einem besondern Sturmschen Sätzchen man die Eitelkeit des Anspruchs und den Einfluss der Gegenseitigkeitsversicherung der kleinen Grössen der Akademien studiren kann. Bis dahin Schweizer, hatte sich nun also besagter Sturm unter den Pariser Gelehrten in Condition begeben und endgültig placirt, wie es ja auch das Ideal aller sonstigen Arten von Vermiethungsschweizern ist. Hiemit war er zugleich der Erbe des Navierschen Cursus geworden, an den er sich mit seinen Vorlesungen anlehnte. Die Einstreuung von einigen kleinen modischen Neuigkeiten ergab im Wesentlichen keinen sonderlichen Unterschied. Der Naviersche Cursus wurde eben im Lauf der Lehre und Angesichts der Generationen der Schule unter den Händen Sturms ungefähr ein Dutzend Jahre älter, und als nun der letztere seine Modificationen nicht mehr weiter als Lehrmonopol verwerthen konnte, weil er aus Gesundheitsgründen zum Lehren unfähig geworden war, so wünschte er, nicht lange vor seinem Tode, dass nun etwas von ihm als sein Cursus der Analysis gedruckt erschiene. Ein Repetent besorgte dies auch dann.

Diese neue Redaction des analytischen Cursus der polytechnischen Schule ist formell und stilistisch weniger sorgfältig und weniger gediegen als die Arbeit Naviers, der einen solideren Charakter gehabt hatte und als Techniker auch weniger verlehrt, von praktisch gesunderem Urtheil und von besserer Lehrbegabung gewesen war. Natürlich hat aber der neuere Cursus den älteren so ziemlich abgelöst und von den fünfziger bis zu den achtziger Jahren ein halbes Dutzend Auflagen durchgemacht. Man muss sich bei ihm eben erinnern, dass er in seiner wesentlichen Form und nach seinem wesentlichen Inhalt nicht das Werk eines Einzelnen, sondern die Schöpfung der Schule und des zugehörigen Herkommens ist. Er wird gleich seiner früheren Navierschen Gestalt in Deutschland viel benützt und zwar auch noch jetzt in den achtziger Jahren, obwohl er seit seiner Redigirung in den fünfziger Jahren schon wieder ein Menschenalter hinter sich hat und durch die inzwischen angebrachten Anhängsel auch in Einzelheiten nirgend über den Standpunkt erhoben worden ist, den er ursprünglich einnahm. Dieser Standpunkt würde schon damals als rückständig haben gelten müssen, wenn man auf solche Umstände, wie das Fehlen der nach Fourier benannten Reihe, Gewicht legen wollte, — ein Mangel, der auch bisher nicht ergänzt worden ist. Es lohnt sich

indessen nicht, um solcher Sächelchen willen zu mäkeln; im Gegentheil könnte es in manchen Fällen ein Vorzug sein, wenn allerlei Velleitäten und unreife Ausgeburten vom 19. Jahrhundert, wie beispielsweise die müssige Cauchysche, auf einen neuen Restausdruck der Taylorschen Reihe gerichtete Spielerei, zur Seite blieben oder doch wenigstens nur als etwas Unerhebliches berührt würden.

Wie verschroben angebliche Lehrbücher ausfallen, wenn sie ohne die geringste Kritik sich damit abgeben, unklare und unreife Theoretisirereien neuern Schlages, die sich selbst nicht verstehen, aufnehmen zu wollen, hat erst neuerlich wieder ein deutsches sogenanntes Handbuch der Mathematik gezeigt, welches auf Buchhändlerbestellung unter dem Namen eines Professors Schlömilch gefertigt worden ist. Der Umstand, dass es riemännisch vergausst ist und beispielsweise die imaginäre Gespenstergraphik sammt Metaphysik und mittlerer Proportionale, über die Gauss selbst in seinen letzten betreffenden Schriften kleinlaut, ja gradezu stumm geworden war, in der schulbornirtesten Weise dogmatisch als Wahrheit vorträgt und die riemännischen unbehülflichen Geschraubtheiten so colportirt, als wenn diese Manierchen nicht nur berechtigte Wahrheiten, sondern auch in der Welt die einzigen Auskunftsmittel für den Gegenstand wären, — diese zu jeglicher Sichtung für gesunde Lehrzwecke unfähige Verfahrungsart ist eben nur als hervorstechendes Symptom der auf deutschem Boden bisher möglichen Zustände von einigem Interesse. Andernfalls würde die in der Auffassung und Darstellung der höhern wie der niedern Mathematik platte, schiefe, unbehülfliche und deutsch particularistische Zusammentragung, die weder ein eigentliches Handbuch noch ein eigentliches Lehrbuch ist, mit ihrem bornirten Horizont gar nicht zu erwähnen gewesen sein. Leider dienen solche Erscheinungen jenen französischen Lehrcursen nur als Relief, und wir werden auf unserm Boden noch erst bedeutende Reformen, ja Umschaffungen durchzusetzen haben, um der Mathematik und ihrer Lehre eine Gestalt geben zu können, die der Nachkommen der Copernicus und Kepler, nach Abthuung aller Einmischung von Nebelhaftigkeiten, würdig werden und noch das Beste des Auslandes, also Gestaltungen von den edlen und scharfen Zügen, wie bei Lagrange, als übertroffen hinter sich lassen könnte.

3. Bedient man sich solcher Hülfsmittel wie des Sturmschen

Cursus, so muss man sich bewusst werden, was man daran hat und nicht hat. Man hat daran ein ziemlich erprobtes Schulherkommen, welches weit über den zufälligen Verfasser des Lehrbuchs zurückreicht. Man hat also wirklich Unterrichtetes vor sich, wie es dem Durchschnitt des Geisteszustandes der Lehrenden entspricht. Man hat aber in einem solchen Lehrbuch so gut wie nichts, was zu ernsthafterem Denken, geschweige zu tieferen Nachforschungen oder auch nur schärferen Unterscheidungen anregen könnte. Im Gegentheil setzt sich darin die durchschnittliche traditionelle Gleichgültigkeit, um nicht zu sagen Stumpfheit der passiven Aufnahme todter Ergebnisse, träge fort. Die fast regungslosen Niederschläge, zu denen die Errungenschaften lebendiger Geister in den Köpfen niederer Ordnung und unter den Händen der professoralen Lehrhandwerker regelmässig werden, sind es, wovon sich die Lehrbücher nähren. Eine solche Nahrung ist es auch, womit derjenige sich für immer begnügen muss, der an den Lehrbüchern haften und in dem Aberglauben an diese befangen bleibt.

Ein Vortheil ist es aber wiederum, wenn solchen Lehrbüchern repetitorische Hülfsmittel beigefügt sind, und hieran hat man es in den neuern Auflagen des Sturmschen Cursus nicht fehlen lassen. Freilich ist das Repetentenarbeit, ja blosse Drillhülfe; aber Angesichts des compilatorischen und überladenen Zustandes der jetzigen Lehre der Wissenschaft ist Derartiges für den im Detail erstickenden Studirenden unentbehrlich; denn es wird zu einer Art von Surrogat derjenigen kritischen Sichtung, die bei einem bessern Zustande in der Sache und im Vortrag selbst verkörpert sein müsste, an der es aber thatsächlich in den Lehrbüchern fehlt. Mit dem Verfall der Universitäten wird irgend eine Art von Repetentenwesen die Hauptsache, und ähnlich geht es auf Anstalten modernerer Gattung, weil und insoweit die dortige Lehrart ebenfalls von vornherein so angelegt ist, dass sie mit der Erfindung des Buchdrucks in Widerspruch steht. In der That könnte es sich die Gesellschaft endlich ersparen, eine professorale Verrichtung zu besolden und zu honoriren, die nur ein schlechtes Surrogat für ein Buch ist. Solche Surrogate sind aber alle Vorlesungen, und solange die öffentliche brutal monopolisirende Gewalt noch überhaupt mit der Lehre der Wissenschaft und deren Regelung befasst bleiben soll, wäre es das kleinere Uebel, wenn sie ihre officiellen Gelehrten damit beauftragte und

dazu anhielte, statt Vorlesungen gedruckte Lehrcurse zu produciren. Auf diese Weise könnte sie gewaltig an Professoren sparen und mit einem Personal an Drillmeistern auskommen. Wären nämlich die Bücher nur halbwegs gerathen, so würden sie besser als durchschnittlich die Vorlesungen verstanden werden, die es in der Regel sehr wenig werden. Für eigentliche Exercitien und für die unfähigeren Studirenden würden dann die Drillmeister sorgen, — eine Kategorie, wovon etwas in Gestalt amtlich angestellter Repetenten bei der Pariser polytechnischen Schule bereits besteht. In England ist der Verfall der hohen Schulen am frühesten eingetreten und daher auch am entwickeltsten; die Professur ist dort längst eine Pfründe und Sinecure, und ähnlich wie eine Pfaffenpfründe nicht von ihrem Nutzniesser, sondern von einem Vicar verwaltet wird, so concentrirt sich dort Alles immer mehr in einem halb zünftlerisch officiellen, halb gewerblich freien Repetentenwesen. Ein ähnlicher Gang der Dinge wird auch mit dem steigenden Verfall der deutschen Universitäten nicht ausbleiben und in einem gewissen Maass auch die technischen Hochschulen mitafficiren; denn ein klein wenig modernere Luft und Umgebung genügt allein noch nicht, um einen Grundfehler der Einrichtung, nämlich die Sanction der Vorlesungsmanier, unschädlich zu machen. Vorträge, selbst wenn sie gut wären, sind nun einmal kein geeignetes Mittel, ganze Wissenschaften zu überliefern, sondern haben eine Berechtigung nur in sparsamer Anzahl als gelegentlich anregende Reden von Seiten bedeutenderer Capacitäten. Ausser der Vorlesungsmanier überhaupt wird es aber für die hohen technischen Schulen, und zwar speciell in Deutschland, eine gefährliche Wendung, wenn sie sich für die rein theoretischen Curse der Mathematik und höhern Naturwissenschaft allzusehr aus dem Docenten- und Professorenpersonal der Universitäten recrutiren, anstatt auf ihrem eignen Boden um eine Pflanzschule für den Lehrernachwuchs Sorge zu tragen. Sie importiren sich auf diese Weise ein Stück Verfall, gegen das sie durch gehörige Emancipation von den Akademien und Universitäten eine Schranke ziehen könnten.

Nicht aber blos vor dem Personal des alten Regime, sondern auch vor den unpraktischen Stoffen haben sich die im echt modernen Sinne des Worts auf polytechnische Bildung angelegten Anstalten zu hüten. Ein Beispiel von einer derartigen unpraktischen Einrichtung ist die Seitens verlehrter Elemente durch-

gesetzte amtliche Vorschrift, der zufolge die elliptischen Functionen auf der Pariser polytechnischen Schule nunmehr zum obligaten Cursus gehören. Mit dem Sturmschen Lehrbuch erhält man demgemäss in den neuern Auflagen als Anhang auch ein kleines Lehrbuch der elliptischen Functionen in den Kauf, was, nebenbei bemerkt, das billige Buch auch für die Deutschen noch billiger macht, die zwar nicht direct von Staatswegen, aber doch indirect durch die vom Staate hingestellten Universitätsprofessoren und Examinatoren genöthigt werden, ihre Zeit mit dem bezeichnend sogenannten „Büffeln" eines Lehrbuchs der elliptischen Functionen zu verlieren. Mindestens so gut, wie diese Art dürftiger Lehrbücher, ist jenes Angehängte nun auch, und es enthält noch obenein einleitungsweise eine kleine Theorie von so etwas, was man in besonderer Abstraction von den specialistischen Functionsuntersuchungen als Theorie der Eigenschaften aller Functionen bisher zu formuliren versucht hat. Freilich ist dies Alles, und in einem gewissen Sinne auch die Theorie der Specialfunctionen, wo nicht, wie meistens, gradezu in das Verkehrte, Spielerische und Unfruchtbare ausgesponnen, da doch noch in der Form unreif und jedenfalls noch nicht derartig gestaltet, um in seiner bisherigen Verfassung den integrirenden Bestandtheil eines praktisch nützlichen Cursus der höhern Analysis ausmachen zu können.

Es ist daher auch kein Wunder, wenn die Lehrbuchcompilatoren nicht sonderliches Glück haben, wo es ihre Aufgabe ist, aus dem abgesehen von Abel und nach Abel von untergeordneten Leuten verwalteten oder vielmehr verwüsteten Gebiet etwas zusammenzupicken, was dem Comment der Akademiker entspricht, d. h. worin sich alle eitlen Geckenstreiche akademischer und universitärer Mode- und Tagesautoritätchen venerirt finden. Das unverdauliche Ding, welches auf diese Weise entsteht, kann man beispielsweise in den weitschichtigen Zusammentragungen von Briot über elliptische und über Abelsche Functionen sozusagen an der Quelle der Compilationen kennen lernen; denn zu solchen Büchern, die allenfalls für das Nachschlagen von Einzelheiten eine Art lexikalischen Nutzen haben mögen, verhalten sich die Lehrbüchelchen wie Excerpte aus demselben akademiegemäss zugerichteten Stoff. Eigentliche und leidliche Wörterbücher, in kleinem wie in grossem Maassstabe, würden aber jedenfalls mehr nützen; denn zum ernsthaften, sorgfältig eingehenden und denkenden Studiren

ist diese ganze Gattung von Erzeugnissen mathematischer Literaten doch nicht zu gebrauchen. Zusammenstellungen sind freilich an sich nicht überflüssig und daher auch nicht grundsätzlich ganz zu verwerfen; aber sie müssen alsdann auch wirklich bequeme Schubfächerarbeit sein, und hiezu wird die Form des Wörterbuchs sich auch in der Mathematik am besten eignen. Hiemit soll selbstverständlich nicht gesagt sein, dass es nicht auch alphabetisch geordnete Werke geben könnte, deren Artikel über den compilatorischen Charakter hinauskämen. Es ist hier eben nur von dem die Rede, was gewöhnlichermaassen auf den Markt gebracht wird und werden kann, nicht aber von dem, was sich einmal ausnahmsweise als besonders idealer Fall verwirklicht finden möchte. Von der Art, wie der Gegenstand, der uns zu dieser Bemerkung veranlasst hat, d. h. die Theorie der elliptischen Functionen und überhaupt der Specialfunctionen eigentlich zu studiren sei, haben wir weiter unten zu reden; denn wie schon gesagt, gehört diese Specialangelegenheit, ihrer Beschaffenheit wegen, nur erst in sehr geringem Maasse in eine mit gesundem Sinne und mit Gefühl für Ebenmaass und Harmonie ausgeführte Gesammttheorie der höhern Mathematik.

4. Der beste Cursus der höhern Mathematik, im Sinne eines denkenden Eingehens auf die Gegenstände, ist noch immer ausschliesslich in den betreffenden Hauptwerken Lagranges gegeben. Namentlich ist es seine Theorie der analytischen Functionen, sowie das von ihm selbst herausgegebene Vortragswerk über die Functionenrechnung, worauf sich das gründliche Studium noch heut zu concentriren hat. Obwohl diese Werke an einer, wenn auch grossartigen Einseitigkeit leiden, so ist doch vor ihnen und nach ihnen bisher nichts geschrieben worden, was in gleichem Maasse der Wahrheit der Sache entsprochen und was soviel Schärfe und Eleganz aufzuweisen hätte. Die erste Auflage der Theorie der analytischen Functionen erschien an der Schwelle des Jahrhunderts (1797), und es folgten ihr 1806 als besonderes Buch die erwähnten „Leçons sur le calcul des fonctions“, welche letzteren zuerst in dem Sammeljournal der Vorlesungen der Normalschule gedruckt worden waren. Auch kam Lagrange schliesslich noch vor seinem Tode dazu, eine neue Auflage der Functionentheorie (1813) herauszugeben. Sie ist in nicht unwesentlichen Einzelheiten reichhaltiger als die erste, aber schon, wie das Vortragswerk und wie es bei diesem auch begreiflich war, mit Hin-

weisungen auf die Vertauschbarkeit der abgeleiteten Functionen mit den gewöhnlichen Differentialquotienten versehen. Die gelegentlichen Bemerkungen von der Art, dass man für y' eben nur $\frac{dy}{dx}$ zu setzen habe, um die Differentialrechnung zu erhalten, fehlten in der ersten Auflage. Letztere, obwohl nach Maassgabe des fortschreitenden Drucks redigirt, also, wie man das nennt, in die Presse geschrieben, war von so strenger Abgeschlossenheit, dass in ihr Differentialzeichen auch nicht einmal wie in jenen sparsamen Erwähnungen vorkamen. Dieser anscheinend kleine Umstand barg aber eine bedeutende Sache in sich. Die Einseitigkeit war dadurch vollständig, bot aber hiedurch auch ein vollkommen strenges, in sich abgeschlossenes System dar, welches an die überlieferte Zweideutigkeit und Metaphysik des Differentialzeichens nicht einmal anstreifte. Der Standpunkt Lagranges hatte zu einem solchen strengen System befähigt; er war aber nicht zulänglich gewesen, direct das zu bemeistern, was ausserhalb sein Wesen trieb. Er konnte daher auch keine Brücke finden lehren, welche zu dem andern System, nämlich dem der differentiellen Elemente, in völlig sicherer Weise geführt hätte. Hiezu hätte das System der differentiellen Elemente unmittelbar und an sich selbst streng gemacht werden müssen, und so etwas ist durch Lagrange nie in Angriff genommen worden, wie auch noch schliesslich die zweite Auflage seiner Analytischen Mechanik am Ende seines Lebens bestätigt hat. In ihr wird noch die Hypothese des Unendlichkleinen geduldet und damit etwas unentschieden offengelassen, dessen unmittelbare Entscheidung nicht nur an sich ein Erforderniss völlig durchsichtiger Wahrheit, sondern auch ein Mittel ist, viele Schlussfolgerungen kürzer und bequemer zu gestalten. Lagrange war zufrieden, die Lehren der eigentlichen Differentialrechnung indirect durch seine Functionstheorie bewahrheitet zu haben. Unmittelbar mit der falschen Hypothese selbst konnte er in deren eignem Bereich nie fertig werden, oder hat dies vielmehr nie unternommen. Es ist daher ganz begreiflich, dass Angesichts nicht etwa blos der Bequemlichkeit, sondern auch der praktischen Nothwendigkeit der eigentlichen Differentialienrechnung auch die zweite Auflage der Analytischen Mechanik nicht nach dem System der abgeleiteten Functionen, sondern nach demjenigen unmittelbar bearbeiteter Differentialien ausgeführt worden ist.

Sicherlich ist es ein Uebelstand, dass man in jenen beiden fundamentalen Lehrwerken Lagranges, in der Functionentheorie und in der Functionenrechnung, nur das eine System vor sich hat, während das andere in der Mechanik und zwar wesentlich unrationalisirt vertreten ist. Dieselbe Bewandtniss, wie mit letzterer, hat es auch mit den Specialabhandlungen Lagranges. In diesem entscheidenden Punkte hat also der nicht blos grosse, sondern bisher grösste Analytiker nur Halbes und Einseitiges oder, um es in ein Wort zusammenzufassen, nur halbseitiges Werk gethan. Die höhere Analysis hat bei ihm eine Doppelform, um nicht zu sagen ein Doppelgesicht, und das zweite dieser Gesichter trägt noch den wesentlichen Grundzug einer unrichtigen Ueberlieferung an sich. Beispielsweise sind die Ausgangspunkte der Mechanik, die im dritten Theil der Functionentheorie behandelt werden und zusammen als ein selbständiges Lehrbuch der Grundlagen der Sache gelten können, hier streng nach dem System der abgeleiteten Functionen behandelt. Verglichen mit den entsprechenden Lehren des grossen Hauptwerks über analytische Mechanik stellen jene Ausführungen nun eine strenge Gestalt der Behandlung des Gegenstandes vor, während die andere Behandlungsart wie eine zweite Seite äusserlich daneben figurirt, anstatt mit in ein und dasselbe einheitliche System aufgenommen zu werden. Eine solche einheitliche Bearbeitung konnte nicht erfolgen, weil Lagrange eine Rationalisirung des eigentlichen Differentialsystems selbst nicht einmal als möglich abgesehen hatte. So musste die Kluft bestehen bleiben, durch welche Alles zweitheilig getrennt und die Bequemlichkeit mit der Strenge in Widerspruch erhalten wurde. Dennoch ist der Fortschritt, der in der Aufstellung eines strengen Systems lag, nicht hoch genug anzuschlagen, wenn auch daneben der Bequemlichkeit halber die alte Manier sammt der ihr anhaftenden unrichtigen Voraussetzung fortcultivirt wurde.

Die gekennzeichnete Kluft ist zwar nicht der einzige, aber der hauptsächlichste Uebelstand, Angesichts dessen das Lehrwerk Lagranges zwar immer noch das beste bleibt, aber doch nicht solchen Ansprüchen genügt, wie sie nach vollständiger Ueberwindung der ältern unrichtigen Ueberlieferung berechtigt sind und es vom Standpunkt einer durchgreifenden Rationalisirung auch schon im Zeitalter Lagranges gewesen sein würden. Zu jenem wesentlich sachlichen Mangel kommt noch eine zufällig

formelle Unzuträglichkeit, die zwar an sich nicht viel thut, aber doch die Lernbequemlichkeit beeinträchtigt und auch übrigens aus dem Gesichtspunkt einer schönen Einheitlichkeit der systematischen Form des gesammten Stoffes besser fehlte. Dies ist das thatsächliche Zerfallen des Lehrwerks in zwei. Enthielte die Functionentheorie auch den Mehrgehalt des Vortragswerks in sich verarbeitet, oder wäre umgekehrt das Vortragswerk in Rücksicht auf Geometrie und Mechanik, ja auch schon in Beziehung auf seinen Hauptgegenstand, die abstracte Analysis, so eingerichtet, dass es alles Werthvolle der Functionentheorie mitenthielte, so hätte man nur ein einziges Werk nöthig und jede Wiederholung bliebe ausgeschlossen. Die Schuld an dieser theilweisen Doppelgestalt trägt nicht der Urheber selbst, sondern die oben gekennzeichnete Hauptwurzel des Lehrübels, die in den Schulen traditionelle Forderung von Vorlesungen. Lagrange wurde in die Lage gebracht, neben seiner Functionentheorie auch noch Vorlesungen über denselben Gegenstand zu halten und dabei nicht einmal voraussetzen zu dürfen, dass die Zuhörer das Buch vorher studirten. Die Vorlesungen mussten daher etwas Selbständiges werden, und dabei war noch einer zwar übel angebrachten, aber doch billigen Nachrede vorzubeugen, dass der Vortragende nur sein Buch wiederhole. Männer von Genie und Gewandtheit kommen durch eine solche Lage allerdings nicht in Verlegenheit. Sie erschöpfen sich nicht sobald und wissen einem Gegenstande neue Seiten abzugewinnen. So wurden auch die Vorträge über die Functionenrechnung ein neues selbständiges und in sich genugsames Werk, welches vornehmlich dem ersten Theil der Functionentheorie entspricht, dabei aber die geometrischen und mechanischen Anwendungen, wenn auch nur sparsam in ihren Ausgangspunkten, einflicht. Sie sind ein Cursus der höhern Analysis oder, wenn man will, der Differential-, Integral- und Variationsrechnung nach dem System der abgeleiteten Functionen, aber wohl zu beachten, in der abstractesten, gleichsam von den Anwendungen emancipirtesten Gestalt. Der Grad von Abstraction und Freiheit, der in ihnen herrscht, ist in der Geschichte der Sache weder vorher noch nachher anzutreffen gewesen. Sie enthalten überdies tiefe Blicke in die Entstehungsgeschichte der analytischen Wahrheiten, — Blicke, wie sie nur einem Manne eigen sein können, der einen überlegenen Grad von schöpferischer Anlage mit genauer und eindringender Kennt-

niss der Thatsachen vereinigt. Man findet in der Gesammtheit der dort eingeflochtenen Bemerkungen eine Detailgeschichte des Gegenstandes, wie sie sonst nirgend, am wenigsten aber in weitschichtigen Werken über Geschichte der Mathematik, zu haben ist. Der Studirende lernt also hier nicht blos denken, sondern erfährt auch, wie thatsächlich gedacht worden ist, und welche Wege der menschliche Trieb und Verstand in den verschiedenen Individuen eingeschlagen hat, die an der Hervorbringung der Wissenschaft betheiligt gewesen sind.

Um praktisch die angegebene Unzuträglichkeit einigermaassen zu heben, entscheide man sich für eines der beiden Werke. Die Vorträge sind nun am geeignetsten, für sich allein etwas praktisch Zulängliches zu leisten. Hat man die Zeit, sie hinterher durch ein Studium der Functionentheorie in einigen Richtungen, namentlich bezüglich der geometrischen und mechanischen Anwendungen, zu ergänzen, so ist dies nützlich. Es ist aber für die Hauptsache nicht durchaus nothwendig und bleibt namentlich für alle diejenigen entbehrlich, welche die Höhen der Mathematik zwar betreten und deren weiteste Ausblicke verwerthen, sich aber dort nicht ansiedeln wollen. Wer nicht zum blossen Fachmathematiker werden und nicht den Schädlichkeiten einer zu weit getriebenen Sonderung der Beschäftigungen anheimfallen will, kann nicht gleichgültig dagegen bleiben, ob ihm seine maassvolle Geistesdiät gestört und er in irgend einer Richtung mit zuviel Lectüre und Studium belastet werde. Auch wird er mit dem blos aufnehmenden Verhalten nach Möglichkeit sparen; denn die Hingebung des Verstandes an fertig vorgeführte Gedankengänge darf nicht zur vorherrschenden Thätigkeit werden, wenn nicht alle Fähigkeit zu eigentlicher und durchgreifender Activität verloren gehen und die Federkraft zu spontanen Regungen erschlaffen soll.

Sind nun schon in Beziehung auf die allerbesten Erzeugnisse der Literatur solche diätetische Vorkehrungen nothwendig, so versteht es sich von selbst, dass die in einem edlen Sinne des Worts vornehm angelegten Naturen die Literatur zweiter Ordnung der Regel nach verschmähen und von diesem Grundsatz nur insoweit eine verständige Ausnahme machen werden, als es sich um besonders motivirte Notiznahmen bezüglich einzelner Partien und Specialitäten handelt. Kann doch in dieser Beziehung bisweilen die elendeste Compilation in ihrer Eigenschaft als Nachrichtensammlung und gleichsam als Zeitung in Buchform bei

irgend welchen Pünktchen Wegweiser enthalten, infolge deren die Aufmerksamkeit des Einsichtigen sich von der Compilation weg und zu irgend einer bessern Quelle hin wendet! Um wieviel mehr können nun Arbeiten, die nicht blosse Compilationen sind, wenn sie auch immerhin nicht der höchsten, ja nicht einmal der nächst höhern Ordnung angehören, bezüglich vereinzelter Aufgaben ein der Berücksichtigung werthes Körnchen enthalten! Letzteres ist aber auch der einzige Grund, sie überhaupt zu Rathe zu ziehen. Dies sollte aber auch nur gelegentlich und mit äusserster Beschränkung auf Theile und Stücke geschehen. Eines hingebenden Gesammtstudiums sind sie niemals werth. Wer aber dieses Urtheil in der ganzen Schärfe sich anzueignen noch nicht genügend durch Erfahrungen vorbereitet ist, wird doch im Voraus wenigstens begreifen, dass die wirkliche Concentrirung aller Gedankenkraft auf eine Arbeit ersten Ranges nicht mit einer gleichen Hingebung an tiefer stehende Productionen vereinbar ist. Die höhere Denkweise schliesst, wenn sie wirklich begriffen wird, das Geschmackfinden an den niederen aus. Es bleibe also das Haften an den niedern Sphären denen überlassen, welche aus Unkunde, aus Unfähigkeit zur Unterscheidung oder, was das Häufigste ist, vermöge der Bann- und Zwangsrechte der Schulen zu dem Hohen gar nicht gelangen. Auch wird es immer eine grosse Zahl solcher Naturen geben, denen das Platte, Verkehrte und Gemeine, ja gradezu das Unwahre wahlverwandter ist und daher besser zusagt, als das Wahrhafte und Edelgestaltete. Man sieht dies in allen Richtungen und Angelegenheiten des Lebens. Bezüglich der Nahrung des Geistes giebt es verhältnissmässig noch mehr Pöbel, als in Rücksicht auf die Unterscheidung der materiellen Nahrungsmittel des Leibes. Man hüte sich also, falls man etwas auf sich hält, sich hier gemein zu machen. Auch diejenige Liebe, die im Bereich der Wissenschaft am Orte ist, verträgt keine Prostitution.

5. Ein charakteristisches Beispiel von Literatur zweiter Ordnung sind die Cauchyschen Ansätze und Bruchstücke zu Lehrbüchern, einschliesslich derjenigen, bei denen noch Andere ihre Hände im Spiele gehabt und den akademisch aufgeschwellten Namen Cauchys zur Deckung ihrer Elaborate benützt haben. Von letztern ist hier nicht weiter zu reden. Cauchys eigne Versuche zu Lehrbüchern sind aber nicht blos unpraktisch und weitschweifig, sondern auch recht unharmonisches Stückwerk. Was

aber, abgesehen von den als Lehrbüchern misslungenen Unternehmungen, die sonstigen, breit ausgelegten Arbeiten und „Uebungen“ dieses Analytikers betrifft, so kann die übel angebrachte Zweiflerei ebensowenig wie das Vorgeben von nunmehr erst erreichter Strenge den erfahrenen Kenner solcher Personentypen täuschen. In Wahrheit steckt hinter Alledem nur Opposition gegen den natürlichen, klaren und durchgreifenden Verstand und sozusagen ein mathematischer Jesuitismus. Cauchy war nicht blos äusserlich der ergebene Mathematiker der politischen und kirchlichen Restauration, sondern spielte auch nach der Revolution durch Lagrange ein Stück mathematische Restauration. In neuen Namenerfindungen, durch welche die ältere einfache Wissenschaft verdunkelt wird, war er fruchtbar; an eignen Sachen fehlte es ihm aber, und einige untergeordnete Dingelchen, die ihm gehören oder die ihm von mitinteressirter Seite zugeschrieben werden, können nichts verlieren, wenn die Notiz davon aus zweiter oder weiterer Hand oder gar aus den Compilationen kommt. Im Gegentheil, sie müssen noch Einiges gewinnen, wenn sie, aus dem ursprünglichen Zusammenhang gelöst, besichtigt werden können. Ein solcher Gewinn tritt überhaupt auch sonst, also ganz abgesehen von dem eitel weitschweifigen Cauchy, überall da ein, wo es an systematischer Gestaltungskunst, an Vorzügen der Form und des Gedankenganges sowie überhaupt an echter und natürlicher Darstellungskraft fehlt. Selten werden wirklich bedeutende Ergebnisse jedes dieser Vorzüge baar sein; mindestens wird doch ein natürlicher Gedankengang den wirklichen Erfinder einer erheblichen Sache kennzeichnen.

Handelt es sich um die Darstellung einer ganzen Wissenschaft, also auch um echte und umfassende Lehrwerke, so sind Charakterkraft und Einheit des geistigen Typus von noch höherer Bedeutung, als wenn nur vereinzelte Aufsätze und Abhandlungen in Frage kommen oder ein kleinerer Zweig des betreffenden Wissensgebiets bearbeitet wird. Allerdings wird auch in letzterem zu merken sein, wie weit die Urheber an ernstlich systematischem Geist theilhaben. Indessen kann die systematisch durchdringende Kraft mit ihrer allesbeherrschenden Einheitlichkeit sich in vollem Maasse nur da zeigen, wo ein ganzes Lehrsystem zu entwickeln ist. Zu umspannenden Lehrwerken von höchster Art und edelster Form ist mehr Fähigkeit und sogar eine ungleich höhere Geistesanlage erforderlich, als sie zu vereinzelten Auffindungen und sogar

zu Schöpfungen eines Specialgebiets ausreicht. So ist Abel derjenige Analytiker, der bisher seit Lagrange auf nächster Stufe nach diesem zu nennen ist und dem auf dieser Stufe nur noch Galois nebengeordnet werden kann. Obwohl nun Abel jung starb, so hat er doch bezüglich seiner Specialgebiete, also namentlich der elliptischen Functionen und der Gleichungsfrage, umfassend genug gearbeitet, um den Formtypus seines Geistes genugsam zu erkennen zu geben. Hier kann es nun dem tieferen Kenner der Unterschiede im geistig Schöpferischen nicht zweifelhaft bleiben, dass in Abel die Anlage zur universellen Systematik, wie sie Lagrange in so hohem Grade besass, nur wenig vertreten war, und dass da, wo eine Umschau über einen Specialkreis von Begriffen gelegentlich etwas Analoges zeigen konnte, dies sich bei Weitem nicht mit derselben Schärfe zu äussern vermochte. Hätte daher auch Abel länger gelebt, so würde er schwerlich gleich Lagrange in späteren Jahren zu eigentlichen Systemwerken gelangt sein, und hätte er wirklich etwas Derartiges unternommen, so würde es in Rücksicht auf concentrirte Schärfe nicht wenig unter dem Niveau Lagranges verblieben sein. Hatte auch Abel wohl etwas mehr Präcision und durchgreifende Schlusskraft als der etwas metaphysicirende Euler, der Vorgänger Lagranges im Reich der Analysis, so war er dafür wieder weniger umfassend, weil von vornherein in den Bann eines zu engen Gegenstandes gerathen. In diesem Bann wäre er aber überhaupt nicht auf die Dauer verblieben, wenn seine innere Natur energisch auf Umspannendes und Universelles angelegt gewesen wäre. Es ist nicht grade in jeder Beziehung zu bedauern, dass es Geistestypen giebt, denen die specialistische Eingeschränktheit angeboren ist, d. h. denen die Widerstandskraft gegen das allzuweite Sichverlieren in das Einzelne abgeht. Um den Preis solcher Vereinzelung und Einseitigkeit wird manches Gute erkauft, was bisweilen herauskommt, wenn die einmal eingeschlagene Richtung gleichsam nach einem geistigen Analogon des mechanischen Trägheitsgesetzes bestehen bleibt. Allein eine zu weit getriebene Beschränkung würde stets ein unbedingtes Uebel sein, wenn sie nicht dadurch einigermaassen aufgewogen und in ihren ungehörigen Folgen corrigirt würde, dass andere Personen die Träger um so universeller bethätigter Kräfte sind. Die Fähigkeit zum Festhalten des Gesammtüberblicks ist auch dann ein Vorzug, wenn vornehmlich ein specielles Gebiet gepflegt werden soll; denn auch im Speciell-

sten ist es nicht selten von Wichtigkeit, alle Uebergänge, Verzweigungen und Verwandtschaften nach andern Gebieten hin vor Augen zu haben.

Lagrange selbst war sogar eine Natur, die über blosse Mathematik hinausstrebte, und hieraus erklärt sich auch seine universelle Haltung in der Mathematik. Freilich hat es Lagrange erst in seinen fünfziger Jahren am lebhaftesten empfunden, dass er bis dahin im Rahmen der Mathematik und Mechanik verblieben war. Gegen das ganze Gebiet bemächtigte sich seiner eine Zeitlang ein Widerwille. Er nahm lange nichts darin vor, und erst nachdem er allerlei andere Studien durchgemacht, kehrte er wieder zum ehemaligen Aufgabenkreis zurück. Offenbar war es zu einer schöpferischen Thätigkeit in einem andern Bereich für ihn zu spät. Doch beweist das fragliche Vorkommniss, dass nicht seine Naturanlage, sondern der Schematismus der gelehrten Uebertheilung der Beschäftigungen die Schuld trägt, wenn er in das Reich seines Genies nicht von vornherein Anderes hineingezogen hat. Schon früher in seinen vierziger Jahren hatte er sich in einem Briefe an d'Alembert (1781) über den Erschöpfungszustand geäussert, den er an der Mathematik bemerke. Seine Worte enthielten zum Theil eine eingetroffene Voraussagung und müssen übrigens als ein Zeichen angesehen werden, wie er sich durch das rein mathematische Treiben bedrückt und gehemmt fühlte, ja gradezu mit der Gebanntheit in derartige Aufgaben unzufrieden war. Er stehe nicht dafür ein, meint er, dass er noch nach 10 Jahren etwas in der Mathematik in Angriff nehme. Wörtlich heisst es dann: „Auch scheint es mir, es sei das Bergwerk fast schon zu tief, und man werde es, falls man nicht etwa neue Gänge entdeckt, früher oder später verlassen müssen. Die Physik und die Chemie bieten jetzt Reichthümer dar, die glänzender sind und eine leichtere Ausbeutung zulassen; auch scheint der Geschmack des Jahrhunderts sich ganz nach dieser Seite gewendet zu haben, und es ist nicht unmöglich, dass die Plätze für Mathematik in den Akademien eines Tages das werden, was gegenwärtig auf den Universitäten die Lehrstühle für das Arabische sind." Der Brief mit diesen Worten ist nunmehr fast genau ein Jahrhundert später im 13. Bande der Lagrangeschen Werke gedruckt worden und grade zur Zeit gekommen, um an die inzwischen thatsächlich gewordenen Schicksale der Mathematik zu erinnern. In der That hat es Mathematiker von gleich hohem

Range wie Lagrange und mathematische Erfolge von gleicher Bedeutung wie Lagranges Variationsrechnung, nicht wieder gegeben, und wenn Akademieplätze nur für das Schaffen oder gar nur für erhebliches Schaffen da wären und fortbestehen dürften, so wären sie schon längst eingegangen. Lagranges Meinung war, wie man auch aus andern Stellen seiner Briefe sieht, einfach die, grosse Mathematiker werde es in der nächsten Zeit schwerlich geben; denn Alles im erschöpften Stande der Mathematik und in der Beschaffenheit der Personen, beispielsweise auch in dem späteren Verhalten Eulers, deute auf das Gegentheil. Lagrange nahm sich von den übeln Chancen offenbar selbst nicht ganz aus; denn er erinnerte sich, dass er seinen Hauptschritt, die Erfindung der Variationsrechnung, mit 19 Jahren gethan, und schätzte das, was ihm seitdem gelungen, einschliesslich der Permutationsalgebra, nicht allzu hoch, weil es ihm nicht genügte. Was aber vollends die nachlagrangesche Aera betrifft, so ist jenes Vorgefühl mehr als blos bestätigt worden. Grosse Mathematiker in der Art, wie sie Lagrange meinte, und wirklich neue Fundstätten von Belang sind nicht in Sicht gekommen. Wohl aber ist die Mathematik durch Einmischung des ärgsten Aberglaubens und wüster Hohlheiten entstellt worden und also in dieser Beziehung noch gesunken. Die Hinwendung zur Physik und namentlich zur Chemie ist noch entschiedener geworden. Für die Mathematik selbst aber sind nunmehr neue Wendungen nur zu haben, indem man die Wissenschaft strenger macht und ihre Fundamente tiefer legt, als selbst bei Lagrange geschehen ist. Wieder nach aussen fruchtbar kann aber die Mathematik nur werden, indem die Fachbeschränkung fortfällt, die schon von Lagrange als ein Drehen in zu engem Kreise empfunden wurde.

Mathematiker und Physiker zusammen, wenigstens denkender und rechnender Physiker, ist schon eher eine Abgrenzung von natürlichem Abschluss; aber hiezu gesellen sich in einer universell angelegten Natur auch unwillkürlich die höheren Wahrheiten von allgemeiner Welttragweite. Letzteres muss besonders in einer Zeit der Fall sein, in welcher Mathematik, Mechanik und Physik soviele künstliche Verdunkelungen mitschleppen, die nur vermittelst universeller und durchgreifender Gedanken wegzuschaffen sind. Lagrange ist der einzige Mathematiker, der gegen solche Verdunkelungen etwas geleistet hat. Er hat aber nicht wenig übriggelassen und auch da, wo seine Natur in dieser Richtung

am entschiedensten arbeitete, ist dies nur dadurch möglich geworden, dass sie sich wenigstens theilweise gegen die herkömmliche Schlaffheit der Akademiesphären, wenn nicht eigentlich auflehnte, so doch regte. Lagrange war nur ein stiller Revolutionär in der Wissenschaft oder, vielleicht besser gesagt, der ruhige Anfänger und Einleiter einer Umschaffung, die sich erst in späteren Zeiten vollständig zeigen kann. Was er that, leistete er, wenigstens im spätern Theil seines Lebens, im Rahmen der unfreien und stets mit Stickdunst geschwängerten Akademiesphäre. Schon überhaupt die Zugehörigkeit zur Gelehrtenschaft und die Rücksicht auf diese sind geeignet, von der besten Natur ein gutes Theil zu unterdrücken. Lagrange isolirte sich allerdings in wohlthätigem Maasse; aber sein Charakter war nicht danach eingerichtet, das Verkehrte an den Manieren des Gelehrtenstandes nach Form und Inhalt durchgreifend abzuthun und gradezu wegzuschleudern. Aus dieser mit seinem Genie verbundenen verhältnissmässigen Passivität erklärt sich auch, dass er auf halbem Wege stehen blieb und nach den Aufrüttelungen der Revolution nur einmal einen entscheidenden Schritt und dann keinen mehr that. Er sollte im eigentlichen Sinne des Worts lehren und war eine zu wahre Natur, um die alten Dunkelheiten aufzutischen. Er schuf sich also ein System, in welchem diese Dunkelheiten nicht in Frage kamen. Dieser Act war seine entschiedenste Aufraffung und der Höhepunkt in der Bahn seines Geistes.

Was Lagrange für die Rationalisirung der höhern Analysis gethan, war Angesichts der kommenden Epigonen einerseits zu viel und andererseits zu wenig. Es war zu viel; denn die Nachsetzlinge konnten sich zu dieser Höhe nicht einmal aufranken. Es war zu wenig; denn es liess eine grosse Lücke und brachte daher nicht den unbedingten Zwang, ja nicht einmal überall die Möglichkeit mit sich, in der höhern Analysis in richtigen Begriffen zu denken. Wie gesagt, fehlte das grössere und entscheidende Stück der Arbeit, die unmittelbare Ueberwindung der zweideutigen und falschen Differentialbegriffe. Der feste Sitz der Unklarheit und Lüge wollte geschleift und nicht blos umgangen sein. Hienach ist es auch erklärlich, wie die späteren Mathematiker, die namhafteren ebenso wie der gemeinere Chorus, im entscheidenden Hauptpunkt nichts gelernt haben. Ueberhaupt ist Lagrange grade in seinen besten Werken am wenigsten studirt worden; das von uns als Grundlage des Studiums empfohlene Vortragswerk

hat sogar lange im Buchhandel fehlen können und auch in der Gesammtausgabe auf den Abdruck lange zu warten gehabt. Auch ist es bezeichnend, dass diese Gesammtausgabe auf Staatskosten veranstaltet worden ist, und dass auch der bisherige Druck einzelner Hauptschriften Lagranges als private Verlagsunternehmung thatsächlich auf lange Zeiträume hat ausblicken müssen, wie die Spärlichkeit der französischen Auflagen beweist, deren zwei oder drei mit einer ursprünglich wohl nicht allzu grossen Zahl von Exemplaren für den Zeitraum von ungefähr drei Generationen genügt haben. Die deutsche Uebersetzung von den drei rein mathematischen Hauptwerken, Functionentheorie, Functionenrechnung und Zahlengleichungen, ist trotz billigen Preises in sechzig Jahren nicht vergriffen, kann aber allerdings nur eine verhältnissmässig geringe Instanz zur Charakteristik des Absatzes Lagrangescher Schriften bilden. Sie ist nämlich nicht blos eine leidliche Uebersetzung der Worte in das Deutsche, sondern auch eine unleidliche Uebersetzung der Formeln aus dem Lagrangeschen in das Leibnizische und hiemit eine arge Albernheit geworden, die dem Sinne der Sache überall ins Gesicht schlägt und in Folge deren der Anfänger daraus grade die Hauptsache nicht lernen kann. Dieser Zwiespalt zwischen Inhalt und Form berührt aber auch übrigens recht widerwärtig, nicht davon zu reden, dass der Simpel von Uebersetzer, der jene Verwüstung des Sinnes der Formeln angerichtet, der nachmalige äusserliche Begründer des nach ihm benannten und besonders durch die Beiträge Abels eine kurze Zeit florirenden Crelleschen Journals der Mathematik, auch noch gar die seiner Simpelhaftigkeit proportionale Anmaassung gehabt hat, den Lagrangeschen Text durch eigne, mitten hineingesetzte Kritzeleien zu unterbrechen und anzuschwellen. Sind sich nun die deutschen Käufer dieser Bücher auch wohl nicht deutlich bewusst geworden, was man ihnen da im Namen Lagranges aufgetischt hat, so müssen sie doch gefühlt haben, dass ihnen dieser Unterricht nicht viel helfen konnte. Die reinen, der gewöhnlichen Analysis angehörigen Begriffe Lagranges gehen durch das Verlassen seiner eignen Notation verloren, und es sei hier noch einmal daran erinnert, dass $\frac{dy}{dx}$ nur eine unbeschränkte Annäherung an y', nie aber y' selbst genau vorstellt. Auch ein selbständiges französisches Lehrbuch von einem gewissen Cournot, welches schon durch seine Titelbezeichnung als Elementare Theorie

der Functionen eine Art Anschluss an Lagrange affichirt hat, brachte es zu keinem Begriff von dem Wesen der Lagrangeschen Strenge, sondern tischte in obenein verphilosophasterten Ausführungen mit der alten Notation im Grunde auch nur die alten Zweideutigkeiten und Nebel auf. Sein Verfasser litt übrigens an überflüssiger und versetzter mathematischer Bildung, die ihn quälte und die er, da er damit nichts anzufangen wusste, gelegentlich auch in andere Gebiete abführte, die, wie die Volkswirthschaftslehre, oft von mathematisch Verbildeten nur zu häufig mit übel angebrachter Mathematik heimgesucht werden. Der ganze Fall ist hier nur als Belag dazu berührt, wie Lagrange durchgängig nicht verstanden wurde; denn das erwähnte Lehrbuch ist in den vierziger Jahren in das Deutsche übersetzt und nicht ohne Empfehlung von Seiten geblieben, wo man noch am ehesten die Formvorzüge an Lagrange ein klein wenig zu fühlen und zu schätzen wusste.

6. Eine von der Differentialnotation abweichende Bezeichnungsart ist unentbehrlich, um statt unbeschränkter Annäherungen die genauen Werthe selbst und zwar im Unterschiede von diesen Annäherungen auszudrücken. Aus diesem Grunde wird Lagranges System der abgeleiteten Functionen mit der zugehörigen Notation bestehen bleiben und durchdringen. Ebenso ist aber auch ein unmittelbares Operiren mit den kleinen Grössen und zwar nicht blos erst für die Anwendungen, sondern schon für die reine Mathematik nothwendig. Dieses zweite System ist nicht ungefähr gleichwerthig mit dem ersten, wie es sich Lagrange selbst noch irrthümlich dachte, sondern gleichsam die andere Hälfte dazu. Beide zusammen, wie sie in den von uns skizzirten Grundlagen auftreten, bilden ein neues, einheitliches System und geben die Gestaltung der Sache gleichsam aus einem Gusse. Wie wir gehörigen Orts gezeigt haben, traten in Lagranges einseitigem System die kleinen Grössen oder Hülfsgrössen unter den Bezeichnungen i, o u. dgl. nur in den Hintergrund und bildeten den unerkannten, gänzlich unentbehrlichen Rest der eigentlichen Differentialrechnung. Indem wir diese Erklärung von ihnen gaben, lieferten wir hiemit auch zugleich den Beweis, dass die Rechnung mit den unbeschränktkleinen Stückgrössen zu jeglichem vollständigen Gedankengange gehöre und daher auch grundsätzlich mit der ihr eignen bequemen Notation in ein vollbewusstes neues System der ganzen fraglichen Rechnungsart aufzunehmen sei.

Diese Rechnungsart wird erst dadurch vollkommen, dass sie mit beiderlei Begriffen, und zwar in strengster Unterscheidung derselben, derartig operirt, dass man jederzeit weiss, ob eine Annäherungsgrösse oder ein genauer Werth gemeint sei, und ebenso jederzeit beurtheilen könne, ob das Raisonnement am zweckmässigsten unmittelbar auf die kleinen Stückgrössen zu beziehen sei oder sich am Leitfaden bereits gewonnener, hülfsgrössenfreier Functionen zu bewegen habe.

Augenblicklich ist es noch unvermeidlich, dass der Lernende in einige Unbequemlichkeit komme. Er muss Lagranges Buch über die Functionenrechnung zu Grunde legen und dabei gleichzeitig zusehen, dass er sich die unmittelbar differentiellen Begriffe aus den Cursen von Navier oder von Sturm zu eigen mache. Zu dieser Doppelaufgabe kommt aber noch als drittes Erforderniss, sich das System Lagranges nach Maassgabe der von uns gegebenen neuen Grundlagen in selbstthätiger Weise umzugestalten und zu ergänzen. Erst auf diese Weise entsteht ein Inbegriff von zugleich strengen und allseitigen Lehren, durch die eine ebenso bequeme als sichere Handhabung aller höhern Rechnung ermöglicht wird. Angenehmer wäre es freilich für den Studirenden, sofort ein einziges Buch vor sich zu haben, in welchem alle angegebenen Haupterfordernisse unmittelbar erfüllt wären und sich zugleich ebenso gewählte, schöne und zuverlässige Specialausführungen fänden, wie bei Lagrange. Ein solcher Buchcursus könnte noch überdies den Vortheil haben, neben seinem hochtheoretischen Gehalt auch unmittelbar praktischen Stoff darzubieten, also etwas zu enthalten, was man praktische höhere Mathematik nennen kann. Auf diese Weise würden auch der Techniker, der Architekt, der Militair und überhaupt Alle, welche nach der Mathematik in erster Linie um der Anwendungen Willen zu fragen haben, eine ihnen zusagende Gestalt der abstractesten Lehren zur Verfügung erhalten. Der Geschmack an Echtem und Gutdargestelltem würde hiedurch ebenfalls weiter verbreitet, und die Freude, die ein wohlgestaltetes, durchsichtiges und einfaches Wissen schon an sich mitsichbringt, noch durch den Hinblick auf dessen praktische Kraft und Tragweite gesteigert. Ein derartiges Werk wird aber, aller Voraussicht nach, erst dann zu schreiben oder doch wenigstens erst dann zur Geltung zu bringen sein, wenn sich seine Chancen durch durchgreifende neue Wendungen zugleich im Theoretischen und in den äussern Verhältnissen verbessert finden. Wäre Lagrange

nicht der Erfinder der Variationsrechnung gewesen und wäre ihm nicht auch eine äussere Umwälzung zustattengekommen, so hätte auch seinerseits ein Lehrwerk neuer Gattung mit einigem Erfolg nicht ausgehen können und wäre auf noch mehr Schwierigkeiten gestossen, als ihm schon ohnedies nun bald das ganze 19. Jahrhundert hindurch entgegengesetzt worden sind.

Nebenbei bemerkt, würde ein solches einheitliches Lehrwerk, wie wir es meinen, nicht den Umfang eines mittleren Bandes übersteigen dürfen; denn Thorheit wäre es, die Ausdehnung der Darstellungen für unwichtig zu halten. Werke von Genie und Kritik sind stets verhältnissmässig concentrirt. Allzu voluminöse Arbeiten haben immer etwas vom Charakter des Sammlerthums, der Compilatorenmanier, der hohlen Ausspinnung oder im günstigsten Fall der lexikalischen Detailkunde an sich. Für Unterricht, Bildung und praktische Anwendung taugt aber nur die völlig systematisirte und kritische Vereinigung des Besten und am meisten Charakteristischen, was geliefert werden und woraus derjenige, der es sich zu eigen macht, leicht alles Uebrige selbständig gewinnen kann. Vom wirklich guten und der festen Aneignung werthen Wissen ist aber in jeder Gattung nicht allzuviel vorhanden. Wodurch gemeiniglich die Lehrbücher angeschwellt werden, das ist die Kritiklosigkeit und die registrirende Stumpfheit, durch welche schliesslich ein Sammelsurium von todten Niederschlägen zusammenkommt, worin nur Weniges ist, wovon sich wirklich ein lebendiger Gebrauch machen lässt. Das heutige Anschwellen der Compendien, deren Umfang zum Hohn auf ihren Namen wird, ist für den Kenner des Laufes dieser Dinge wahrlich kein Zeichen der Vermehrung sondern im Gegentheil des Verfalls der Wissenschaft und des Unterrichts. Je vollkommener Wissenschaft und Unterricht nach Inhalt und Form würden, um so einfacher und übersichtlicher müsste der Lehrstoff ausfallen, möchte es sich nun direct um Lehrbücher der Schulen oder zunächst um Lehrwerke für die Welt handeln. Am besten ist es freilich, wenn beiderlei Gattungen in einer vereinigt werden und ein Lehrwerk für die Welt zugleich Lehrcursus für die Schule oder für den ersten Selbstunterricht in diesem Gegenstande zu sein vermag. Einem solchen Muster der Darstellung eines Wissensgebiets lässt sich aber nur entsprechen, wenn alle diejenigen Mittel der Auswahl und Sichtung angewendet werden, die zugleich mit der Kürze zur selbständigen Herrschaft über den Stoff führen.

Monographische Ausführungen von Sonderverzweigungen des betreffenden Gebiets gehören nicht in die Gesammtdarstellung, in welcher es auf gleichmässige Berücksichtigung aller Lehren ankommt. Auch giebt es in den Theilungen und Untertheilungen der Wissenschaft immer eine Grenze, bei welcher diejenigen Ausläufer beginnen, für welche das Interesse nicht mehr mit demjenigen der allgemeinen Bildung und Sachkunde in einem Fache zusammenfällt. Gegen wichtige Ergebnisse, die in solchen Specialgebieten gewonnen werden, soll freilich auch derjenige nicht gleichgültig sein, der für den fraglichen Ausläufer von Untersuchungen keine selbständig-eingehende Theilnahme hegen kann. Solche Ergebnisse gehören aber alsdann auch in die Gesammtwissenschaft, vorausgesetzt dass bereits der Weg gefunden sei, sie in genügend einfacher und kurzer Weise zu begründen. Der Mathematiker wird vor jedem speciellen Ausläufer, dem er nebenbei nachgehen mag, unter allen Umständen die allgemeine Mathematik als ein Ganzes gründlich kennen müssen. Was hier je nach dem Stande der Wissenschaft zu fordern sei, lässt sich sehr wohl bestimmen. Bereits eine concentrirtere Uebersicht aller mathematischen Hauptmittel genügt, wo nicht ein seine Wissenschaft beherrschender Fachmathematiker, sondern etwa ein Physiker in Frage ist, der ausschliesslich nach den Nutzanwendungen der mathematischen Lehren fragt. In dieser Hinsicht kann es mannigfaltige Gestaltungen und Abgrenzungen der Theilnahme geben; immer aber bleibt die mathematische Bildung als ein einheitliches Ganze die Hauptsache, möge es sich nun um das Geschöpf der einseitigen Berufsverzweigung, den sogenannten Fachmann, oder um solche Personen handeln, die sich nicht im Rahmen des Berufs bewegen. Zu letztern gehören nicht blos diejenigen, welche die Mathematik blos für andere Zwecke brauchen oder sich aus Liebhaberei mit ihr beschäftigen, sondern auch jene vereinzelten Erscheinungen, welche die mathematische Wissenschaft erweitern, aber zu universellen Geistes sind, um sich auf Mathematik beschränken zu können.

7. Welcher Kreis von Einsichten in der Mathematik zusammengefasst werden müsse, um jenes durchaus nothwendige Ganze zu ergeben, bestimmt sich am deutlichsten durch das, was bei dem jedesmaligen Stande des mathematischen Wissens als leitende mathematische Hauptwissenschaft anzusehen sei. Im Zeitalter Lagranges war die Mathematik bereits derartig entwickelt, dass

sich die von den Neuern erfundenen Rechnungsarten, namentlich die Differential- und Integralrechnung, als die leitenden Mächte deutlich genug markirten. Die Zusammenfassung des leitenden Gehalts der Mathematik in der Functionenrechnung durch Lagrange machte dies noch deutlicher. Heute aber zeigt sich aus dem von uns gewonnenen Standpunkte, dass Functionenlehre und Functionenrechnung, auch in einem über Lagrange hinaus erweiterten Sinne dieser Bezeichnungen, die oberste mathematische Wissenschaft sein müssen, welcher alle andern Theile der Mathematik unterzuordnen sind.

Zunächst ist die Lehre von den elliptischen Functionen nur eine und zwar noch immer ziemlich unfruchtbare Specialabzweigung jenes leitenden Gebiets. Sie führt zuweit abseits in allerlei Untersuchungen und Beziehungen, die zu mindestens neun Zehnteln in einem doppelten Sinne werthlos, nämlich weder praktisch verwendbar noch an sich für den Verstand eine Freude sind. Für Letzteres fehlt es dabei zu sehr an Einfachheit, Harmonie und speculativ interessanten Fragen. Abel, der in diesem Gebiet so gut wie Alles gethan hat, was von Geist zeugt, war durch zufällige Umstände irregeleitet worden. Grade als er in die Jahre und in den Fall kam, zu Veröffentlichungen in einem Journal Gelegenheit zu haben, lieferten ihm die von Legendre über die elliptischen Integrale zusammengestellten Materialien willkommenen Stoff, um seine der Sache überlegenen Fähigkeiten daran zu bethätigen. Einiger Blick für die Analogien mit den trigonometrischen Functionen genügte, um den Begriff der elliptischen Functionen als Integralumkehrungen und die erheblichsten Sätze des ganzen Gebiets festzustellen. Etwas besonders Hohes ist der Gegenstand nicht, ebensowenig als jene Verallgemeinerungen der elliptischen Functionen, zu denen Abel gelangt ist und die man als Abelsche Functionen bezeichnet. Im Gegentheil lag er unter dem Niveau des Abelschen Geistes, der sich glücklicherweise auch in höheren und werthvolleren Aufgaben, wie an der von Lagrange überlieferten algebraischen Frage, bethätigt hat. Wie nun gar nach der That Abels das Hantiren mit den elliptischen Functionen keine besondern Fähigkeiten mehr erfordert hat, zeigt die Beschaffenheit der Leute, die sich durch collegialische Gegenseitigkeit in den Ruf gebracht haben, elliptische Functionäre par excellence zu sein. Es sind dies vornehmlich die wirrsten Pinsel, und die Sächelchen, auf die sie sich etwas zu Gute thun, gradezu

kinderhafte Gebahrungen, aber freilich von nicht ganz unschuldigen Bübchen, da sie mit ihren kleinen Streichen die Mathematik mindestens verunsaubern.

Wer von dem Ausläufer der Analysis, der elliptische Functionen heisst, um der Sache willen eingehender Notiz nehmen will, der wende sich, sobald er die allgemeine Analysis durch Lagrange kennen gelernt hat, ohne Weiteres zu Abels Recherches sur les fonctions elliptiques, die sehr wohl als ein einleitendes Lehrbuch der Hauptsache dienen können. Die abgeschmackten Compendien des Tages und der Schulen kann er dann auf sich beruhen lassen; höchstens mag er noch so etwas wie den Anhang zu Sturm vergleichen, um beispielsweise die Thetafunctionen hervorgehoben zu sehen, zu denen auch Abel, aber in andern Untersuchungen, die Grundlage geliefert hatte, die aber dann Jacobi, seinen hebräischen Anlagen gemäss, unter seiner Marke als die seinigen in den Handel brachte. Zu bedauern ist, dass jene Recherches, die unter den vielen und umfassenden Arbeiten Abels als Hauptgrundlage und ihrer Einfachheit wegen auszuzeichnen sind, noch nicht im besondern Abdruck zur Verfügung stehen, sondern nur in den Gesammtwerken zu kaufen sind. Sogar letztere selbst haben lange genug im Buchhandel gefehlt und sind erst 1882 durch einen neuen auf norwegische Staatskosten veranstalteten Abdruck wieder zugänglich geworden.

Noch weit unfruchtbarer, als die Pflege der elliptischen Functionen, ist diejenige der sogenannten Zahlentheorie geblieben, und nur die Eitelkeit jenes Gauss, verbunden mit dessen professoralem Einfluss auf die Stellenbesetzung, hat es in Deutschland dahin gebracht, dass jene kleinliche Verästelung des mathematischen Wissens, die vorherrschend kein ernstes Wissen, sondern eine blosse Wissensspielerei ist, thatsächlich der Hauptartikel der universitären Vorleserei werden konnte. In Folge dieser Gestaltung sind denn auch die künftigen Lehrer der Mathematik oft genug genöthigt, im Hinblick auf die Prüfungswillkür sich auf Zahlentheorie über jedes vernünftige Maass hinaus einzudrillen. Dabei dienen die dem verstorbenen Professor Lejeune-Dirichlet untergelegten Vorlesungen, d. h. fremde in ihrem ersten Theil an seine Vorlesungen anknüpfende Ausarbeitungen mit diesem ersten Theil als Hülfsmittel.

Von einiger Erheblichkeit sind in der ganzen Zahlentheorie eigentlich nur die Beziehungen ersten Grades. In Rücksicht auf fast Alles, was darüber hinausgeht, ist die bisherige Behandlung

im 19. Jahrhundert, einschliesslich derjenigen seitens Gauss, so ziemlich ein leeres Strohdreschen gewesen. Aber auch bezüglich des ersten Grades hat Gauss nichts Erhebliches als Eignes aufzuweisen; denn die Fermatschen Sätze waren schon von Euler bewiesen. Auch ist überhaupt die Zahlentheorie grade mit den Gaussischen Arbeiten so recht ein Feld für mathematische Geistesdürftigkeit geworden. In den Theorien und der Literatur des Schachspiels ist ungleich mehr Geist niedergelegt worden, als in dieser komischerweise als höchste mathematische Wissenschaft ausgegebenen Zahlentheorie. Legendre hatte auch hier zuerst, wie für die elliptischen Integrale, das Material zusammengestellt und den Namen in Umlauf gebracht. Genau genommen, ist aber die Zahlentheorie nicht einmal eine selbständige Wissenschaft für sich; denn es handelt sich bei ihr nur um nebensächliche Hülfsmittel, die gelegentlich erfordert werden, sobald allgemeinere mathematische Aufgaben zu Fragen über Beziehungen ganzer Zahlen führen. Nun liesse sich allerdings grundsätzlich von dem Gedanken ausgehen, alle functionellen Grössenbeziehungen darauf anzusehen und zu behandeln, wie sie sich gestalten, wenn in ihnen alle Grössen oder einzelne davon ganze Zahlen sein sollen. Hiedurch erhielte man im weitesten Sinne auch das, was man Formeigenschaften der Zahlen nennen könnte und was bis zu einem gewissen Punkte auch allenfalls für sich einen abtrennbaren Inbegriff von Lehren constituiren möchte. Eine Verkehrtheit bliebe es jedoch, wenn man die secundäre Natur aller solcher Fragen, die nur als Zubehör zu andern einen Werth haben, verkennen wollte. Die ganze Zahl ist allerdings etwas sehr Abstractes, aber zugleich etwas Specielles; denn der Begriff einer abstracten Grösse ist allgemeiner. Hienach können zahlentheoretische Lehren nur Specialfälle von allgemeineren sein, die sich auf functionelle Beziehungen überhaupt richten. Die Functionenlehre, im weitern Sinne des Wortes Function verstanden, bleibt also die oberste und leitende mathematische Wissenschaft.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass ein Cursus der höhern Analysis, wenn er in einzelnen Specialtheilen etwas weiter verzweigt werden soll, eine besondere Aufmerksamkeit auf das Thema der bestimmten Integrale und auf das der partiellen Differentialgleichungen erfordere. Hieraus folgt aber nicht, dass man gut daran thue, seine Zeit mit den entsprechenden modischen Universitätsvorlesungen zu verlieren, auch wenn unter dieser Rubrik

etwas Gedrucktes vorliegt. Sie bedeuten, wie fast die ganze universitäre Vorleserei in der Mathematik, nur dürftige Zusammenstellungen, die aber in ein Specialgebiet lang ausgezogen werden, um ein Semester zu füllen oder überhaupt der Sache den Anstrich von etwas Besonderem zu geben. In der That enthalten leidliche Specialcapitel eines Gesammtcursus die wesentlichen Ergebnisse auch. Was man dagegen beispielsweise auf den Namen des früher erwähnten Riemann hin als dessen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen hat drucken lassen, ist noch mehr als riemännisch kraus gerathen, und wird auf einen natürlichen Sinn, sobald er orientirt ist, seine abschreckende Wirkung nicht verfehlen. Auch noch von andern Specialartikeln, die unter der Fahne anderer verstorbener Professoren, mit noch weniger Recht und in gradezu hebräisch schmieriger Gestalt, auf den Markt gebracht worden sind, im Einzelnen überhaupt zu reden, wäre unter der Würde unserer Darstellung.

8. Vergisst man über den Ausläufern, auch wo diese besser geartet sind, nicht die Grundgestalt des leitenden Gebiets von Einsichten, so kann es nach allem Bisherigen keine Frage sein, dass überall die vollste analytische Abstraction obzuwalten habe. Nur hiedurch gelangen Wissenschaft und Studium zu ihrer vollendeten Kraft und unverkürzten Tragweite. Dabei sollte sich von selbst verstehen, dass man die Erhebung zur grösstmöglichen Abstraction und alsdann die Fortbewegung im Felde dieser Abstraction nicht mit einem Schaffen aus Abstractionen zu verwechseln habe. So etwas würde den Charakter der durch blossen analytischen Algorithmus möglichen Leistungen verkennen und in einem gewissen Sinne auch überschätzen heissen. Da aber andererseits die Gefahr der Unterschätzung grade für den roheren Naturstandpunkt der Geister und nicht blos für beschränktere oder doch weniger abstracte Anlagen sehr nahe liegt, so ist es erspriesslich, sich von der Nothwendigkeit der Erhebung zur analytischen Abstraction einfürallemal eine deutliche Einsicht zu verschaffen. Es giebt kein Gebiet, in welchem diese Erhebung und zugehörige Absonderung des reinen Rechnungsgehalts nicht stattzufinden hätte. Nur denke man beispielsweise bei analytischen Abstractionen von der Geometrie nicht immer gleich an Coordinaten, da die Anwendung der Coordinaten, wenn sie zweckmässig sein soll, nicht das ganze Gebiet der Geometrie und ihrer Aufgaben umfasst. So kann die Formel des erweiterten oder auch

schon des eigentlichen Pythagoreischen Satzes als rein analytische Abstraction genommen und behandelt werden. Was man auf letztere Weise daraus gewinnt, bewegt sich nicht mehr am Leitfaden der unmittelbaren Geometrie, sondern ist ein Ergebniss der Algebra oder der Analysis des Veränderlichen.

Bisher ist nicht einmal innerhalb der eigentlichen Analysis selbst das Gesetz der vollen analytischen Abstraction überall gehörig befolgt worden. Sogar bei Lagrange, welcher im Allgemeinen den bisher erreichten höchsten Grad zweckmässiger Abstraction vertritt, fehlen manche Uebergänge. So figuriren bei ihm die trigonometrischen Functionen zwar als analytische, insofern für sie die Reihen als vorhanden vorausgesetzt werden. Allein bei ihrer unmittelbaren Einführung dienen die aus der Geometrie vorausgesetzten Additionssätze, um jedesmal die ersten Coefficienten der Reihen, d. h. die abgeleiteten Functionen und hiemit die Reihen selbst zu gewinnen. Freilich ist das Stück Geometrie, dessen sich Lagrange auf diese Weise bedient, selbst nicht mehr in der Sprache der Geometrie, d. h. in dem, was er todte Sprache nannte, ausgedrückt. Wohl aber bleibt es trotzdem sachlich ein Satz, der als durch die specifische Geometrie bewiesen vorausgesetzt wird.

So etwas ist nun nicht reine Rechnungsconsequenz unter Zugrundelegung der auf ein geringstes Maass zurückgeführten geometrischen Anknüpfungspunkte. Nur der Begriff einer trigonometrischen Function, also etwa des Sinus, ist als aus der Trigonometrie stammend aufzunehmen, nicht aber etwa eine zusammengesetzte Wahrheit wie der Summensatz, der die Function des Ganzen durch entsprechende Functionen der Summanden ausdrückt. Letzterer Satz ist, da wo die Theorie des Sinus als einer analytischen Function entwickelt und der Sinus selbst stets zunächst als analytische Function gehandhabt wird, eben auch erst auf dem analytischen Rechnungswege zu beweisen, ehe man sich seiner bedienen darf. Eine rein geometrische Ableitung wird hiedurch nicht blos eine überflüssige Belästigung, sondern auch ein Verstoss gegen die höhere Wissenschaftlichkeit des modernen Systems, welches sich nicht im specifisch Geometrischen umtreiben darf, sobald man die abstractere Vermittlung finden und absondern gelernt hat. Es ist nämlich gradezu ein logischer Fehler, wenn man ein Raisonnement, welches nur von abstracteren Begriffen abhängt, dessenungeachtet durch concretere hindurchführt. Man

umkleidet auf diese Weise die Glieder, durch welche man den Durchgang nimmt, mit nebensächlichen Eigenschaften, auf die es für die Erzielung des Ergebnisses nicht ankommt. So etwas geschieht nun aber allemal, wo man unnütz unmittelbare Geometrie, Mechanik oder Physik treibt, anstatt zunächst blosse Rechnungsoperationen einzuschieben. Etwas Anderes ist es freilich, wenn man einen Veranschaulichungszweck verfolgt, sei es um auf die Fehlerfreiheit des abstracten Ganges eine controlirende Probe zu machen, sei es um denjenigen Naturen oder Bildungsstandpunkten nachzuhelfen, denen die höhere Schlussweise thatsächlich unfassbar oder ungewohnt ist. Eine derartige Herablassung von der höhern wissenschaftlichen Form zu niedern Stufen beweist aber nichts gegen den im Allgemeinen maassgebenden Sachverhalt selbst. Uebrigens aber sind concrete Methoden allemal eine wissenschaftliche Rückständigkeit, sobald die abstracteren zur Verfügung stehen.

Demgemäss ist es, um wieder an das Beispiel anzuknüpfen, durchaus nothwendig, die Sinusfunction in der Analysis von vornherein als die Umkehrung des Bogenintegrals zu bestimmen. Der Bogen selbst wird hiebei durch eine unbeschränkte Zahl von Summationen unbeschränktkleiner Elemente, also durch einen Inbegriff direct vollziehbarer Operationen mit unbeschränkter Annäherung dargestellt. Die Umkehrung dieses Integrals ist aber ebenfalls ein reiner Rechnungsbegriff, grade so wie derjenige jeder andern Wurzel einer Gleichung. Eine geometrische Anknüpfung hat daher nur insofern stattzufinden, als dem Begriff des Sinus nicht fälschlich der Anschein gegeben werden darf, als wäre oder würde er durch die Analysis selbst, d. h. durch blosse Rechnungscombinationen, geschaffen. Es darf die rein analytische Schöpfung nicht mit der nachträglichen rein analytischen Bestimmung verwechselt werden. Die blosse Analysis hätte lange tasten können, ehe sie von ungefähr oder durch irgend welchen, in blossen Rechnungsbedürfnissen liegenden Antrieb zu einer Function, wie dem Sinus, gelangt wäre. Die einzige Art, wie sie allerdings hiezu hätte kommen können, wäre eine imaginäre Zerlegung der Exponentialreihe gewesen. Man wäre zu $e^{x\sqrt{-1}} = \varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x)$ gelangt, indem man in der Reihe r die beiden Reihen r_1 und r_2 als besondere Functionen hervorgehoben hätte. Ein analytischer Gebrauch und eine analytische Theorie dieser Func-

tionen würden sich hieran haben knüpfen können, ohne dass auch nur die Namen Cosinus und Sinus oder gar eine geometrische Bedeutung für die neuen Functionen in der reinen, d. h. hier unangewendeten und nur in sich selbst verkehrenden Analysis in Frage gekommen zu sein brauchte. Wer also hier den letzten Rest geometrischer Anknüpfung verbannen will, der muss auf die angegebene Weise verfahren. Natürlich und geschichtlich sind solche Wendungen jedoch nicht; denn wo die analytischen Functionen thatsächlich durch Abstraction von Sachfunctionen gewonnen sind, muss man diesen Ursprung nicht hinterher verleugnen wollen. Es ist nämlich der regelmässige Fall, dass die analytischen Functionen von einem bestimmten zusammengesetzten Gepräge, welches zugleich einen für die Anwendungen wichtigen Formtypus abstract ausdrückt, von den Sachfunctionen her veranlasst und thatsächlich nur Zurückführungen dieser auf deren blossen Gehalt an Rechnungsoperationen sind. So ist die Reduction von Sachfunctionen auf das Analytische die Hauptquelle wirklich brauchbarer analytischer Functionen. Andere, blos analytisch combinatorische Wege liefern zwar auch Wichtiges und Entscheidendes, würden aber, wenn man auf sie allein angewiesen bliebe, schliesslich selbst in das Weglose und Unbestimmte auslaufen und haben thatsächlich nur zu oft in zerfahrene Spielereien gerathen lassen.

Aus einer blossen Rechnungsformel können auf dem blossen Rechnungswege eben auch nur Formeln und zwar sogar nur diejenigen gewonnen werden, die sich durch blosse Bethätigung von umwandelnden Rechnungsoperationen ergeben. Aus dem Analytischen spinnt man daher wiederum nur Analytisches, und erst die schliessliche Uebersetzung in das Sachliche lässt wieder zu dem Gebiet gelangen, von welchem her die analytische Abstraction ursprünglich stattgefunden hatte. Die Rechnungsoperationen entbehren aber an sich jedes sachlichen Leitfadens, und es ist daher nöthig, die Antriebe zur Direction der Analysis, sobald diese nicht blos einem in ihr selbst belegenen Zweck nachgeht, anderwärtsher zu entnehmen. Gesetzt, man hat die Mittelpunktsgleichung des Kreises, so lässt sich aus ihr allein, d. h. ohne die Dazwischenkunft eines neuen geometrischen Grundes, nicht einmal zum Bogenintegral gelangen; denn es wäre doch ein sonderbarer Zufall, grade ein Element wie $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ zu bilden und in Beziehung auf dieses das Integral zu nehmen.

Jegliche Rectification der Curven geschieht nicht rein aus deren Gleichungen, sondern bedarf, wie schon im vierzehnten Capitel Nummer 6 ausgeführt wurde, noch der Gleichung des charakteristischen Dreiecks oder eines Surrogats dieser charakteristischen geometrischen Beziehung. Bei Lagrange ist dies Surrogat der von Archimedes als Axiom gebrauchte Satz, dass die Grösse eines Curvenstücks zwischen der Sehne und den zwei Abschnitten der Endpunkttangenten eingeschlossen sei; denn diese Linienstücke können ebenfalls nicht rein aus der Gleichung, sondern nur, wie im Fall des gleich unbeschränktklein genommenen Dreiecks ds, dx, dy, auf Grund einer Specialanwendung des Pythagoreischen Satzes bestimmt werden. Man hat also in jedem Falle zu der Curvengleichung, die aus dem Geometrischen abstrahirt ist, noch einmal aus dem Geometrischen eine zweite Gleichung hinzuabstrahiren müssen, um weiter zu kommen.

Die Nichterkennung derartiger Unterschiede hat jenem Aberglauben Vorschub geleistet, der blosse Calcül als solcher könne alles Mögliche begründen und hervorbringen, und selbst den besten Autoren, wie Lagrange, hätte es nützen können, wenn sie ein klares kritisches Bewusstsein von diesem Quellenunterschiede der Einsichten gehabt hätten, anstatt blos auf ihren natürlichen Tact angewiesen zu bleiben. Es hätten alsdann nicht untergeordnete Virtuosen, wie Laplace, solchen Einbildungen anheimfallen können, wie diejenige, das Grundgesetz der Kräftezusammensetzung, welches man das Parallelogramm der Kräfte nennt, aus purer puter Analysis herausalgorithmiren zu wollen. Andererseits wäre aber bei einem Verfahren, welches jene kritischen Unterscheidungen grundsätzlich erfasst und hervorgehoben hätte, die Nothwendigkeit der vollen analytischen Abstraction eher zur Anerkennung gelangt. Man hätte ihr alsdann nicht so leicht die Reactionen entgegensetzen können, die im 19. Jahrhundert in Geometrie und Mechanik platzgegriffen haben. Die vollste analytische Abstraction und Strenge führt also, um auf unser Beispiel zurückzukommen, offenbar dazu, eine thatsächlich von der Geometrie entlehnte Function dadurch völlig analytisch zu machen, dass man sie auf ihren Gehalt an Rechnungsoperationen reducirt. Die Verwandlung des Sinus in die fragliche Integralumkehrung ist eine solche Reducirung, und das Zeichen *sin* bedeutet alsdann nicht mehr eine geometrische Regel, sondern einen Inbegriff von Rechnungsoperationen. In diesem Sinne wird der Begriff für die

reine Analysis erst voll zurechnungsfähig, und ausschliesslich aus diesem Rechnungsbegriff hat man alle weitern Eigenschaften der Function, also beispielsweise deren Differential sowie den Summensatz, abzuleiten.

Eine Darstellung, in welcher auf die gekennzeichnete Weise verfahren wird, bleibt unmöglich, solange man nicht den Integralbegriff den Entwicklungen des Sinusdifferentials vorausschickt. Es ist aber auch thörichte Scholastik, die Differentialrechnung für sich abzuhandeln und dann erst auf Integrale zu kommen. Ein wahrhaft synthetischer Gang in dem Sinne, wie wir ihn im vorigen Capitel gekennzeichnet haben, führt dazu, in der Analysis die Sätze so aneinander zu reihen, wie sie für den Fortschritt der Sache vom Einfachen zum Zusammengesetzten erforderlich werden. Will man den Sinus in analytischer Abstraction einführen, so sind die Begriffe des Integrals und der Functionsumkehrung unentbehrlich. Jene andere, oben berührte Weise, die wir als nicht natürlich bezeichnet haben, führt durch das Imaginäre, d. h. sie ist eine indirecte Definition, nämlich indirect in demjenigen Sinne des Worts, in welchem man von indirecten Beweisen spricht. Die Vermittlung einer Begriffsbestimmung durch das Unmögliche ist, obwohl nach unsern Aufschlüssen vollkommen sicher, doch nicht direct genug und in dieser Beziehung, auch abgesehen von dem oben erwähnten Mangel an Natürlichkeit, wiederum nicht die natürlichste. Von der Exponentialfunction kommt man in nicht imaginärer Weise nur zum hyperbolischen Sinus, indem man die Exponentialreihe für ein zweiwerthiges reelles Argument nach Maassgabe unseres Werthigkeitsprincips spaltet. Allein auch einer solchen analytischen Ableitung der hyperbolischen Functionen ist die Abstraction von der Geometrie als natürlicher vorzuziehen, weil thatsächlich auch die Function e^x ursprünglich an der Hyperbel gewonnen worden. Nachträglich kann allerdings die Analysis kommen und durch unmotivirte Uebergänge aus eignen Mitteln zu jeder Function gelangen, die man zuerst auf andere Veranlassungen hin durch Abstraction vom Sachlichen aufgestellt hatte. So nützlich nun aber auch die Nachweisung einer solchen rein analytischen Verkettungsmöglichkeit im Allgemeinen sein möge, so wird doch im Besondern der Wahrheit und Natürlichkeit der Verhältnisse nur dadurch entsprochen, dass man keine Wege geht, zu denen die natürliche Motivirung fehlt, und die daher

ohnedies wie launenhafte Willkürwendungen aussehen. Sogar der Ausgang von der Integralumkehrung hat keine Berechtigung, sich einzuführen, wenn nicht hinzugefügt wird, wie man geschichtlich zu der betreffenden Function gelangt sei. Indem die Analysis ihre Abstractionen von den sachlichen Grundlagen befreit, macht sie nur ihre Beweise homogen, darf aber nicht vergessen, dass unterhalb des Gebiets ihrer Abstractionen die Antriebe gelegen haben und immer liegen werden, von denen die Richtung und Gestaltung der Rechnung bestimmt wird.

Aus dem Vorangehenden folgt nun auch, dass ein System in voller analytischer Abstraction nicht hergestellt werden kann, solange man nicht dem von uns früher gekennzeichneten Begriff der Synthese auch in der Analysis folgt, nämlich von einfachen, ja individuellen Typen zu zusammengesetzten fortschreitet. Hiebei werden die verschiedensten Ausgangsbegriffe schon bald im Anfange auftreten müssen, und nur die reichhaltigeren Combinationen, gleichviel welche Rechnungsart und welche Rechnungsbegriffe sie betreffen, werden die späteren Stellen einnehmen. Bei diesem Gange ergeben sich zugleich höhere Elemente, bei denen sich der Cursus abbrechen lässt, ohne dass man auf etwas Anderes verzichtet, als auf mannigfältigere Combinationen. Der Lernende wird sich so mit leichterer Mühe das Wesentliche aneignen können, ohne genöthigt zu sein, das sehr Complicirte mit durchzumachen. Letzteres wird ihn nur in dem Falle angehen, dass er sich für bestimmtere Zwecke auch bestimmter ausrüsten muss. Höhere mathematische Elemente, deren Kern die höhern analytischen Elemente bilden müssen, sind eine bisher unerfüllte Nothwendigkeit. Die Haupthindernisse, die ihrer Entstehung im Wege lagen, waren die von uns beseitigten Begriffsunklarheiten über das Negative, das Imaginäre und das Unbeschränktkleine, sowie überhaupt über Alles, was mit den Unendlichkeitsvorstellungen zusammenhängt. Die Operationen auf diesem Boden sind nunmehr nicht blos sicher, sondern auch durchsichtig. Ein weiteres Hinderniss ist der Mangel an Bewusstsein über die verschiedenen mathematischen Einsichtsquellen und über die Grundmittel des mathematischen Schaffens gewesen. Wir haben nun nicht nur in diesem Punkte die erforderlichen kritischen Principien angegeben, sondern auch überhaupt neue Mittel und Operationsweisen mit zugehörigen neuen Ergebnissen und Beweisen geliefert, die als Beispiele für die Vertiefung und

Verbesserung der Untersuchungen und für die strengere sowie einfachere Verkettung der Wahrheiten dienen können. Auch giebt es keinen andern Weg, um zu höheren mathematischen Elementen von voller Strenge und hiemit auch zu einem ebenfalls strengen in das Ausführlichere fortgesetzten Gesammtcursus der höhern Mathematik zu gelangen.

Aber nicht blos empor zu den obern Stockwerken, sondern auch nach unten in das Fundament, d. h. in die gewöhnliche Elementarmathematik, reichen die neuen Verbesserungen. So ist es beispielsweise eine Thorheit, den geklärten Begriff des bestimmten Integrals nicht schon in der gemeinen Stereometrie zu verwenden und diese so auf eine Stufe höherer Abstraction zu erheben. Nur auf diese Weise kann der nothwendige, rein geometrische Gehalt auf ein geringstes Maass zurückgeführt und die analytische Verkettung so vollständig gemacht werden, als es die Natur der Sache erlaubt. Auch für blosse Studienzwecke sind derartige Gesichtspunkte, wie wir sie eben in Beispielen berührt haben, ein Erleichterungsmittel; denn wenn auch ein entsprechendes System nicht ausgeführt zur Verfügung steht, so können Lernende und Lehrende doch das Ihrige thun, um schon jetzt soviel als möglich von dem vorhandenen Stoff in die besseren und hiemit auch zugleich bequemeren Formen zu bringen. Die folgenden Aufschlüsse über die natürliche Gliederung mathematischer Gesammtmethoden werden zu jenem Zweck noch entschiedener mithelfen können und zugleich noch bestimmter den Standpunkt kennzeichnen, der den zerfahrenen Richtungen und haltungslosen Zuständen gegenüber einzunehmen ist.

Achtzehntes Capitel.

Die Abstufungen in der mathematischen Methode und die selbständige Forschung.

1. Nach der Befassung mit dem elementaren Grundbau und mit einem Gesammtcursus der höhern Mathematik stellt sich für die weiterfördernde Thätigkeit noch eine Aufgabe von grösserer Bedeutung. Nicht einfach um Lernen und Lehren des Vorhandenen und des aus dem Vorhandenen unmittelbar Gestaltbaren,

sondern um grundsätzliches Gestalten und Forschen handelt es sich, wenn die Wissenschaft in der vollkommensten Weise zur Mittheilung und Aufnahme geeignet gemacht werden soll. Letzteres ist sie wohl in keinem Jahrhundert weniger gewesen, als mit ihrer äusserlichen, oberflächlichen und zerfahrenen Daseinsart im neunzehnten. Ausser mannigfaltigen Zerklüftungen anderer Art ist eine schädigende Hauptspaltung die zwischen den abstract analytischen und den concret geometrischen Methoden. Der seit dem 17. Jahrhundert angebahnten und im 18. durch Lagrange vollendeten Suprematie der reinen Analysis, d. h. des rechnenden Elements, ist der Versuch einer Reaction gefolgt, die im Altgeometrischen ihre Wurzeln hatte, sich schon von vornherein neben den neuen fortgeschrittenen Methoden und gegen dieselben regte, die Gelegenheit zu einer anscheinend modernen und gewissermaassen neuen Auslegung ihrer selbst aber in den sinnlosen Ausschweifungen fand, mit denen untergeordnete Analytiker ihr eignes Werkzeug schändeten. Der Missbrauch des analytischen Algorithmus zu hohlen und geistleeren Proceduren hatte die üble Kehrseite einer sonst vortrefflichen Sache gezeigt und hiemit das Vortreffliche selbst, in den Augen solcher, die es an sich nicht voll zu würdigen vermochten, noch mehr herabgesetzt.

Hierauf nun gründeten sich Bemühungen, die da, wo sie, wie zunächst bei Monge, noch verhältnissmässig am besten geriethen, auf dem Bestreben beruhten, in gleichsam naturwüchsiger Weise von technisch geometrischen Vorstellungen auszugehen, die der Projectionslehre entstammten, und aus derartigen räumlich anschaulichen Begriffen heraus die erforderlichen Einsichten zu gewinnen. Von dieser Art ist in der That die von Monge gestaltete beschreibende oder, wie man sie bei uns lieber nennt, darstellende Geometrie. Sie operirt hauptsächlich mit der rechtwinkligen Projection und ist in ihrer Art zunächst etwas durchaus Elementares, was schon ihr Urheber als für zwölfjährige Knaben fassbar ansah, was aber natürlich auch Anwendungen von einer grössern Tragweite mitenthält. Sie muss noch heute im originalen Grundwerk studirt werden, wenn sie für den Geist ernstlich etwas abwerfen soll; denn ihre Vorzüge beruhen mehr auf der ursprünglichen individuellen Handhabung der Methode, als auf einem besondern Inhalt, dessen Entnahme aus der dürren Wiedergabe gemeiner Lehrbücher sonderlich nützen könnte.

Bei Monge war noch kein vollbewusster Gegensatz, ja noch nicht einmal eine absichtliche Reaction gegen die Analysis zu finden, mit der er selbst, wenn auch matt und eintönig, operirt hat. Sein berühmtes Buch, welches die Anwendung der Analysis auf die Flächen zweiten Grades zum Gegenstande hat, ist zwar noch bis heute das beste Werk über die Sache geblieben. Dennoch ist es aber grade diese Arbeit, an welcher sich uns jene unlebendige Monotonie der Darstellung und des Fortschreitens fühlbar gemacht hat. Offenbar bewegte sich hier Monge nicht in seinem eigentlichen Element. Er übersetzte sich gleichsam selbst mit einigem Zwang in die analytische Sprache, während die Quelle in seinem Geist, aus der er schöpfte, von mehr unmittelbar geometrischer Art war.

War nun Monge, der sich als technischer Zeichner gebildet hatte, fast unwillkürlich durch seine Anlagen und Ausgangspunkte dazu gelangt, vorzugsweise andere Wege als die der abstracten Analysis einzuschlagen und in Anknüpfung an die Revolution auf eine geometrisch und technisch künstlerische Volksbildung hinzuarbeiten, so trat eine absichtliche und principielle Reaction erst mit den nächsten Entwicklungen hervor. Diese Reaction, deren Blüthe zugleich in das politische Restaurationszeitalter fiel, hantirte vornehmlich mit denjenigen geometrischen Begriffen, die sich an die centrale Projection anknüpfen liessen. Ihre Grundmittel waren nicht völlig neu; denn ausser den Spuren, welche sich schon im 17. Jahrhundert dazu vorfanden, müssen wir von unserm geschichtlich überschauenden Standpunkt aus in Anschlag bringen, dass die vom Alterthum her überlieferte Lehre von den Kegelschnitten sogar in ihren noch heute gebrauchten Kunstausdrücken bekundet, wie eng sie von vornherein mit optischen Gesichtspunkten zusammengehangen habe. Der Ausdruck Brennpunkt als rein geometrische Bezeichnung beweist, dass optische Betrachtungen wenigstens zum Theil zur Behandlung von Kegelschnitten Veranlassung gegeben haben, wie sehr auch später die rein mathematische Theorie ihren eignen Ursprung vergessen haben möge. Die leitende antike Vorstellung selbst, die sich in dem Worte Kegelschnitt verkörpert hat, enthält das Zeugniss dafür, wie das, was wir heut centrale Projection nennen, in einer bestimmten Gestalt die betreffenden Gebilde hergestellt habe; denn die centrale oder, was dasselbe heisst, optische Projection eines Kreises auf verschieden geneigte Ebenen ist, rein geo-

metrisch betrachtet, nichts Anderes als die Schneidung der projicirenden Strahlengruppe, d. h. eines Kreiskegels, durch jene Ebenen.

Die Hauptverkörperung in einem umfassenden Werk vollzog sich für die sich später neu oder modern nennende, in Wahrheit aber mehr einem Rückfall vergleichbare Geometrie durch den zuerst 1822 von Poncelet herausgegebenen Tractat über die projectiven Eigenschaften der Figuren. So verdienstvoll und geistreich auch in andern Beziehungen Poncelet sich erwiesen hat und so sehr man übrigens auch immer von einem günstigen Vorurtheil für die Zurückweisung übel gehandhabter Analysis bestimmt werden möge, so ist es uns doch jetzt, nachdem wir den geschichtlichen Gang der Angelegenheiten vollständig durchschaut haben, nicht möglich, in jener projectiven Geometrie sammt allen ihren bisherigen Modificationen etwas Anderes zu sehen, als eine beschränkende Einseitigkeit und einen, obenein nicht wenig verkünstelten, ja auch theilweise phantastisch umnebelten Abweg. Poncelets Buch ist noch bis heute das Grundwerk geblieben und durch das Steinersche Buchbruchstück, welches ein Jahrzehnt später erschien, nichts weniger als in den Schatten gestellt, sondern im Gegentheil jetzt erst recht ins Relief getreten. Es hat in seiner neuen zweibändigen Auflage von 1866 noch den Vortheil, die inzwischen vorgekommenen Modificationen der projectiven Geometrie, unter denen eine einzige Wendung Steiners allein von einiger, natürlich nur relativer, Erheblichkeit ist, mit zu berücksichtigen und nach allen Richtungen mathematische Kritik von einem ansehnlichen Grade der Offenheit zu üben, wie er den vorherrschend leisetreterischen und verheuchelten Manieren des Gelehrtenstandes, zumal in unserm Jahrhundert, nicht entspricht und daher auch fast nicht vorkommt. Freilich war auch Poncelet ursprünglich activer Offizier und hatte seinen wissenschaftlichen Plan nach dem Feldzuge von 1812 in der Musse eines russischen Gefängnisses gefasst. Er war daher im Anfang von der näheren Berührung mit den Standeseigenschaften der Gelehrten verschont geblieben, wenigstens insoweit, als nicht schon ein Zögling der polytechnischen Schule, wie er es gewesen, wenn auch nur passiv, etwas darein eingetaucht werden musste.

Wenn, abgesehen von Lagrange und den Arbeiten Abels und Galois', in den seitdem abgelaufenen Menschenaltern noch überhaupt irgend ein Werk der reinen Mathematik einige Aus-

zeichnung verdient, so ist es das erwähnte von Poncelet. Grade aber in diesem Umstande liegt auch das Urtheil über die abseits gerathene Haltung der Mathematik während der zwei Generationen, die seit dem Auftreten der erwähnten Nacharbeiter Lagranges dahingegangen sind oder noch dahinzugehen haben. Die Handhabung der reinen Analysis ist in dem fraglichen Zwischenraum bis heute so kläglich gerathen, dass hier nicht nur nichts Erhebliches zu erwähnen, sondern auch die verdorbene Signatur der ganzen Sache hervorzuheben ist. Angesichts des Treibens untergeordneter Analytiker, namentlich aber solcher analytisirender Figuren wie Cauchy, musste die sogenannte synthetische Geometrie, obwohl sie im Grunde eine Reaction war, verhältnissmässig noch als eine Erfrischung erscheinen. Auch hat es bisweilen mit den Reactionen, so unberechtigt sie aus dem Hauptgesichtspunkt auch sein mögen, in gewissen Nebenzügen eine andere Bewandtniss. Sie können, aber freilich nur nach einzelnen Seiten, Entwicklungen älterer Standpunkte sein, die zwar im Ganzen mit Recht verlassen worden sind, von denen aus sich aber in andern Richtungen doch auch noch andere Wege nehmen lassen. Auf diese Weise ist es sogar möglich, dass die in der Hauptsache zu verwerfenden Reactionen in Nebenbestandtheilen wirkliche Fortschritte vorstellen. Die Wiederaufnahme des geometrischen Fadens konnte insofern ein Stückchen Fortschritt werden, als sich das ausschliesslich analytische Verhalten mehrfach über die Natur seines eignen Spielraums getäuscht und unnatürliche Ansprüche erhoben hatte. Es hiess nur, an die frühere geometrische Ueberlieferung ausführend etwas Verwandtes knüpfen, dass man sich wieder, wenn auch grade nicht völlig in der antiken Art, mit unmittelbarer Geometrie befasste, die angeblich von den modernen analytischen Lehren unabhängig sein sollte. Letztere Bedingung kennzeichnete sich freilich von vornherein als eine überflüssige Künstelei; denn wozu hat man die mächtigeren Mittel, wenn man sie nicht insoweit brauchen soll, als sie wirklich die mächtigeren sind? Die Synthetiker oder Projectiviker haben aber im ersten Rausch ihrer Reaction gradezu vermeint, etwas Höheres als die Analysis zu besitzen und solche Mächte zu restauriren, unter deren Würde es wäre, sich einer Subalternität wie des Calcüls zu bedienen.

2. Ueber die Rechnung ganz erhaben sein wollen und in diesem Sinne reine oder, besser gesagt, concrete Geometrie

treiben, — diese Unwahrheit war noch nicht gleich das Theil der bessern Synthetiker oder Projectiviker. Wie schon gesagt, hatte Monge so etwas nicht prätendirt, und auch noch Poncelet, der schon einseitiger geworden war, sich aber auch mit Analysis beschäftigte, war nicht dazu gelangt, eine Stellung der Geometrie rein auf sich selbst zu behaupten. Er hatte es sich nur angelegen sein lassen, ausschliesslich eine einzige Methode zu verfolgen, nämlich zuzusehen, was sich an Eigenschaften der Gebilde aus der Betrachtung der centralen Projectionen ableiten lasse. Beispielsweise wird ein Kegelschnitt von einer graden Linie höchstens in zwei Punkten geschnitten. Hat man diese Thatsache für den Kreis vor sich, so weiss man den Sachverhalt durch projective Schlussart auch sofort für alle übrigen Kegelschnitte; denn man braucht letztere nur als centrale Projectionen des Kreises vorzustellen und die schneidende Linie mitzuprojiciren. Alsdann können die beiden, den Durchschnittspunkten entsprechenden Projectionsstrahlen offenbar auch in jeder der andern Ebenen nicht mehr als zwei Schnittpunkte ergeben. Derartige sogenannte nichtmetrische Eigenschaften waren es vorzugsweise, auf die der Hauptformulirer der projectiven Geometrie seinen Sinn gerichtet hatte. Wir sagen hier absichtlich, der Hauptformulirer und nicht ohne Weiteres der Begründer, weil Poncelets umfassendem Werk Einzelarbeiten und auch leitende Ideen Anderer unmittelbar voraufgegangen waren. Er selbst hob gleich bei dem ersten Erscheinen seines Buches hervor, wie er einer Abhandlung von Brianchon den ideellen Kern verdanke. Was sich nun damals anbahnte, war hienach noch nicht mit jener äussersten Verkehrtheit gepaart, die sich eigentlich erst mit der Steinerschen Wendung markirte; denn erst unter den Händen dieses, sich aller analytischer Bildung baar anstellenden Geometers steigerte sich mit der Beschränktheit auch die Anmaasslichkeit des projectiven Geometriemachens.

Wenn auch immerhin Steiner in Vergleichung mit den professoralen Mathematisten, die mit ihm oder nach ihm lebten, eine anständigere Figur vorstellte, so war er doch, an sich und mit ehrlichem Maass gemessen, nichts weniger als zulänglich. So hatte er, um einen kennzeichnenden Zug zu erwähnen, dem Redacteur des Journals für Mathematik Crelle damit in den Ohren gelegen, er sollte doch die Arbeiten Poncelets nicht aufnehmen. Die Witterung war allerdings nicht unrichtig; denn die

geistvolle Art und Weise des französischen Geometrikers konnte der Unbeholfenheit des Berliner Schweizers nicht erwünscht kommen, und ebenso unerwünscht musste es einer Steinerschen Natur sein, die Quellen allzuviel verbreitet zu sehen, aus denen sie selbst am meisten schöpfte. Die Berührung derartiger Stückchen, wie das eben erwähnte Steinersche, hat aber nicht blos für den äussern Gang, sondern auch für die innere Haltung der Wissenschaft eine nicht zu unterschätzende Bedeutung. Die intimste Charakteristik der Wissenschaft an sich selbst hängt oft genug von der Auffindung moralischer Fäden ab. Die Unwahrheit der Theorien ist häufig nichts Anderes als ein moralisches Vergehen. Die Eitelkeit bringt Behauptungen zu Wege und hindert Eingeständnisse; sie führt nicht etwa nur zu Einbildungen, sondern hegt und pflegt dieselben auch häufig genug gegen Regungen besseren Wissens. Nimmt man es streng, so sind grade unter den Gelehrten die Naturen, die auch nur gegen sich selbst, geschweige gegen Andere, völlig wahr zu sein vermöchten, von äusserster Seltenheit. Namentlich ist aber bei zerfahrenen Zuständen der ideelle Betrug die Regel und die Ehrlichkeit, wir sagen noch nicht einmal die volle Ehrlichkeit, eine vereinzelte und vereinsamte Ausnahme. So wird der Gehalt der Wissenschaft selbst zu einem ansehnlichen Theil nicht etwa nur etwas sachlich Unwahres, sondern etwas Verlogenes.

Letzteres Wort in vollem Ernste als Beiwort von Mathematik gebraucht zu finden, mag Manchen, der draussen steht, befremden. Ein solches Befremden wird aber aufhören, sobald unser System der Kennzeichnung der Zustände der Wissenschaften sich bis zu den äussersten Bildungsschichten hin verbreitet. Wenn wir hier grade eine nicht ganz bedeutungslose Gruppe des geometrischen Betriebs als Beispiel für die Beleuchtung der wissenschaftlichen Gewissen zu nehmen haben, so ist diese verhältnissmässige Bedeutung eben erwünscht; denn es kommt darauf an, jene Schädigungen da aufzufinden, wo sie sich in Besseres mischen und man ihrer am wenigsten gewärtig zu sein pflegt.

In Steiners Buchversuch fiel die projective Geometrie wie vom Himmel; die unschön sogenannten Strahlenbüschel führten sich unmotivirt und recht dogmatisch ein, wie von Jemand, der keine freie, wirklich begründende und schöpferische Darstellung kennt. Es war eben eine autoritär aufgenommene Ueberlieferung, allerdings versetzt mit einer eigenthümlichen Wendung, die aber

aus sehr rohen Fähigkeiten hervorgegangen und nicht im Mindesten künstlerisch, ja nicht einmal natürlich gerathen war. Bei Poncelet sieht man doch etwas von den Entstehungsgründen projectiver Aufgaben und Methoden; Steiner aber, der das Meiste bereits fertig entnommen hat, ist nicht einmal in die Gründe und Verhältnisse der Ueberlieferung eingedrungen und hat sich, was die Höhe und Weite der Auffassung anbetrifft, nicht im Entferntesten auf den Standpunkt seines französischen Vorbildes erhoben. Die Wendung aber, die ihn sachlich unterscheidet, ist mehr eine Abirrung als ein Fortschritt. Er benutzte nämlich zwei Strahlengruppen in der Ebene, um durch deren Combination eine eigentliche Construction zu vollziehen, indem die stetige Abfolge der Durchschnittspunkte je zweier Srtahlen eine Curve bestimmt, sobald die jedesmalige Zuordnung von Strahl zu Strahl durch ein Gesetz der Aufeinanderfolge geregelt ist. Beispielsweise wird der Kreis dadurch erzeugt, dass von zwei beliebigen Centralpunkten der Strahlung aus diejenigen Durchschnittspunkte genommen werden, die entstehen, wenn man, von irgend zwei beliebigen Strahlen anfangend, immer je zwei Strahlen mit gleichen Winkelabständen sich schneiden lässt. Eine derartige Erzeugung schreibt sich, wie man am Kreise recht einfach sieht, aus einer secundären Eigenschaft, nämlich bei dem Kreise aus dem Satze her, dass die Peripheriewinkel über demselben Bogen gleich sind. Nun lässt sich aber wohl kaum die Verkünstelung verkennen, die darin liegt, die Umkehrung eines solchen Satzes zur Definition des Kreises dienen zu lassen und von zwei Punkten aus gleichsam über der sie verbindenden Sehne durch Construction aller Dreiecke mit gleichen Winkeln an der Spitze die Punkte einer Kreislinie gewinnen zu wollen.

So etwas ist aber überall der Kern des Steinerschen Verfahrens, und schon der vorzugsweise vorgetragene Hauptgegenstand, die Behandlung der Kegelschnitte nach Maassgabe einer analogen Erzeugung durch sogenannte Strahlenbüschel, gerieth so unnatürlich und dürftig, dass der Weg zu dieser vorgeblichen schwer zugänglichseinsollenden Höhe noch erst durch sogenannte populäre Kegelschnitte, d. h. durch die gewöhnliche Geometrie, bei dem Unterricht von dem Meister selbst bepflastert zu werden pflegte. Durch jene Hocherklärung wurde die dünne Luftigkeit der Sache etwas aus dem Auge gerückt und ihr durch die gemeine Grundlage etwas Fond untergeschoben. Unsere Auffassung,

die sich nicht täuschen lässt, sieht in jener verkünstelten Erzeugungsmanier der Gebilde wesentlich nichts weiter als das unwillkürliche und übel angebrachte Hantiren mit einer Art bipolarer Coordinaten. Nur ist hier das Bestimmungsmittel nicht die Länge von Leitstrahlen, d. h. nicht die Entfernung von den beiden Polen, sondern ein Gesetz, welches vermöge der Winkelbeziehungen diejenigen Strahlen ergiebt, deren Durchschnittspunkte zu nehmen sind.

Wer seine Vorbilder verdeckt zu wünschen fähig war und in dieser Beziehung eine Unabhängigkeit zur Schau tragen wollte, die nicht vorhanden war, ist auch der Rechte, um grade ihm gegenüber die Frage zuzuspitzen, wie weit denn die angebliche Unabhängigkeit der neumodischen synthetischen Geometrie wirklich vorhanden sei oder nur auf Verhehlungen von Anleihen bei der Analysis beruhe. Im Hinblick auf diese Frage haben wir auch hauptsächlich den Ausblick nach der moralischen Seite und die Gesichtspunkte zu einer Messung mit ehrlichem Maass vorangehen lassen. Einem Poncelet hiesse es Unrecht thun, wenn man einiges unwillkürliche Hineinspielen der von der Analysis entlehnten Gesichtspunkte ihm persönlich besonders zurechnen wollte; denn bei ihm ist, wie schon gesagt, die falsche Prätension einer völligen Unabhängigkeit noch nicht vorhanden. Einen eigenthümlichen, wenn auch nur subalternen, in wesentlichen Zügen von der Analysis unterscheidbaren Charakter hat aber jegliche unmittelbar geometrische Methode wirklich, und so etwas ist daher auch mit jenen Verfahrungsarten der Fall, die ursprünglich von optischen Gesichtspunkten und insbesondere von der Perspective ausgegangen sind. Wo aber Beschränktheit und Thorheit im Verein mit Unredlichkeit im Cultus hohler Eitelkeit zu dem Aeussersten gelangt sind, der Welt einreden zu wollen, es sei eine neue, gänzlich auf sich beruhende Geometrie erfunden, die mit der Analysis nichts gemein und nichts zu thun habe und haben wolle, — da ist es am Orte, nicht blos unabsichtliche Irrthümer und Irrgänge, sondern auch die Bestandtheile am bewussten Truge und an absichtlichen Verleugnungen analytischer Leitfäden aufzudecken. Wie weit hiebei Schuld, üble Absicht oder blosser Unterscheidungsmangel obwalten, lässt sich begreiflicherweise nicht in jedem einzelnen Falle immer feststellen; es ist aber auch genug, dass man aus dem wissenschaftlichen Verhalten und Charakter ersehe, wie ein Theil der Täuschungen über Unab-

hängigkeit und Ursprung, anstatt auf Unkunde, wirklich auf eitle täuschende Absicht zurückzuführen sei.

3. Fortwährend von Curven oder Flächen eines bestimmten Grades reden und doch keinen geometrischen Ersatz des analytischen Gradbegriffs auftreiben können, verräth bereits bei dem ersten Eingange die Abhängigkeit von den leitenden analytischen Begriffen. Gradezu komisch nahm es sich aber aus, wenn man vermeinte, dem Gradcharakter einer ebenen Curve die Punktezahl gleichsetzen zu dürfen, in welcher sie von einer graden Linie geschnitten werden könne. Man nahm so zu einer secundären Eigenschaft, die nicht das Innerste der Sache bezeichnet, seine Zuflucht und bekundete hiemit zugleich, wie man in das geometrisch Aeusserliche gebannt blieb, sobald man den einfachen und directen Begriff des Grades in seiner nothwendig analytisch ausfallenden Abstraction zu verleugnen versuchte. Beispielsweise haben die Curven zweiten Grades gewiss etwas geometrisch Gemeinsames, was auch rein geometrisch ausdrückbar ist. Dies wurde aber schon von den Alten zu Grunde gelegt; es ist eben die Eigenschaft, aus der Durchschneidung eines Kegels mit verschieden liegenden Ebenen zu entstehen. Dieser gemeinsame Gesichtspunkt ist älter als der Gradbegriff; denn der letztere ist eine höhere Abstraction, die über dem Geometrischen steht und zu der man erst gelangen konnte, als man gelernt hatte, die allgemein quantitativen Beziehungen aus dem concreten räumlichen Schematismus der Gebilde durch Zerlegung und Absonderung klar für sich hervorzuheben. Nach der neumodischen Geometrie aber, die gegen die Analysis reagirt und doch in vielen Punkten nur ein Bastard derselben ist, soll um jeden Preis so etwas wie die Gradeigenschaft an der Spitze figuriren und auch gleichsam Elternstelle vertreten. Der völlig abgeleitete Umstand nun aber, dass die fragliche Gattung von Curve durch eine grade Linie gewöhnlichermaassen, d. h. abgesehen von vereinzelten Richtungen, in zwei Punkten geschnitten wird, ist eine Folge und kein Grund, ist ein Merkmal zweiter Ordnung und ein erzeugter, nebenbei mithervortretender, aber kein selbst constitutiver Charakterzug.

In der That hiess es, in das Wesen der Gebilde tiefer eindringen, als man dazu gelangte, gewisse Entfernungen in ihnen in Gleichung zu stellen und so gleichsam die functionelle Verfassung räumlicher Begrenzungen in reinen Grössenabhängig-

keiten zu erhalten. Die mit Hülfe der analytischen Grundmittel behandelte Geometrie steht auf einer höheren Stufe der Wissenschaftlichkeit und ist eine entwickeltere und vollkommenere Gestalt der Sache, als die unmittelbare, concrete Geometrie, die alle Gesichtspunkte der Rechnung, die sie etwa auch schon enthält, ungesondert lässt, in den Hauptpunkten aber gar nicht zum Rechnen, geschweige zum systematischen Rechnen, zu kommen weiss. Letztere Bemerkung gilt vorzugsweise von der antiken Geometrie; denn sie blos um der projectiven Künsteleien willen machen, hiesse denn doch der Nebensache wegen die Hauptsache, die echte Geometrie, zu sehr ausser Augen lassen. Die fragliche neuste Geometrie ist eben nur ein Nebenspiel und zwar eines von sehr zweideutig gemischtem Charakter, und unser Hinblick auf ein solches kann nur den Zweck haben, im Contrast dazu für das Bild einer echten und natürlichen Geometrie einige vorhandene Züge in Erinnerung zu bringen und auch einige neue Striche hinzuzeichnen.

Sind einmal die analytischen Methoden vorhanden, so ist es verhältnissmässig leicht, fertige unmittelbare Geometrie in analytisch gestaltete zu verwandeln. Letzteres ist alsdann nur eine Uebersetzerarbeit; denn der Hauptinhalt an Beziehungen ist nicht mehr zu finden, sondern nur in einer andern, aber bereits geformten Sprache auszudrücken. Es ist daher begreiflich, dass Leute, deren Bildung vorzugsweise in angelernter Fingerfertigkeit auf dem analytischen Instrument bestand, grade von den besten Synthetikern mit Recht als Personnagen gekennzeichnet werden konnten, die in Ermangelung eigner Erfindungsgabe auf der Lauer lägen, um die Originalien der Synthetiker in aller Stille in die geläufige Sprache zu übertragen und so der Welt als eigne Neuigkeiten vorzulegen. Das meiste Recht zu solchen Anklagen hatte jedoch ein Mathematiker, der nicht zu jenen neumodischen, d. h. projectiven Geometrikern zählte, sondern sich den Weg zu neuen synthetischen Elementen der Mechanik, wenn auch freilich ebenfalls im Sinne einer Art geometrischer Reaction, zu bahnen suchte und hier in einer natürlicheren Weise verfuhr, als die Projectiviker in ihrem ausschliesslich geometrischen Gebiet. Dies war Poinsot, ein Zeitgenosse der Projectiviker; aber so berechtigt auch seitens dieses in seiner beengten Art und Weise durch einen erheblichen Grad von Gediegenheit ausgezeichneten Mannes die Andeutungen waren, von Analytikern arg bestohlen zu sein,

so müssen wir doch, obwohl specifisch mechanische Gegenstände an sich selbst grundsätzlich von unserm Buch auszuschliessen sind, hier ausdrücklich darauf hinweisen, wie in der synthetischen Mechanik zwar nicht unehrenhafte Entlehnungen von Analytikern, wohl aber stillschweigende Herleitungen von der Analysis zu erkennen sind. Hieher gehört namentlich die Conception des Kräftepaars, in welcher fast die ganze Originalität Poinsots bestanden hat, und welche auch in die gemeine Schulüberlieferung übergegangen ist. Nun ist der Begriff des Kräftepaars nur eine Uebersetzung aus dem des Drehungsmoments, also die Uebertragung eines Rechnungsbegriffs in die Form eines Sachbegriffs und zwar, was wir hier jedoch nicht verfolgen können, eine nur unvollkommen gelungene Uebertragung.

Wir signalisirten das Vorangehende nur deswegen, weil überhaupt Vorwürfe von Synthetikern gegen Analytiker bezüglich verhehlter Entlehnungen etwas einigermaassen Bekanntes und auch eine Sache von naheliegender Begreiflichkeit sind, während ein umgekehrtes, wenn auch meist nur sachliches Abhängigkeitsverhältniss erst durch uns zur Klarstellung gelangt und durch eine gelegentliche Hinweisung auf das mechanische Gebiet noch sichtbarer wird. In der That hätte es, um den engern Gegenstand der Geometrie wieder ins Auge zu fassen, wohl die auf ihre Art von Originalität allzu eingebildete Projectivik kaum erwartet, dass sie nicht auf das zweite Menschenalter kommen würde, ohne mit ihrer angeblichen Souveränetät scharf aufs Korn genommen und in gewissen verhüllten Zügen ihres Charakters demaskirt zu werden. Es versteht sich, dass dies nicht zu persönlichen Gunsten der mit ihr zeitgenössischen Analytiker geschehen kann; denn die wirklich bessern unter ihnen, wie Abel und Galois, hätten vermöge der speciellen Natur ihrer Gegenstände das Gebiet nicht einmal berühren können, auch wenn sie länger gelebt hätten; die schlechtern Analytiker aber, für welche der bei allerlei herumschwirrende Cauchy und der mit mancherlei entlehnten Waaren handelnde Hebräer Jacobi namhafte Repräsentanten sind, waren ja grade auch diejenigen, unter denen das Zehren von stillschweigend angeeigneten fremden Verdiensten, sowie das zugehörige Verkleiden fremder Theorien zu den Hauptmitteln der wissenschaftlichen Existenz gehörte, gleichviel um welche Gebiete es sich handelte und ob dabei theilweise auch Synthetikern irgend welcher Art einige Körner weggepickt und analytisch verkaut wurden. Zur

grössern Ehre der Epigonenanalytiker wird daher die Kritik der allgemein synthetischen oder speciell projectiven Versuche nie ausschlagen können.

4. Es ist nur das Recht der echten und natürlich, nicht aber einseitig gehandhabten Analysis, mit welchem nicht einmal immer das Recht der grössten Analytiker gleichbedeutend war, — [es ist also nur der Anspruch der abstracteren Gedanken, welcher durch die Aufdeckung der hinter den synthetischen Coulissen leitend gebliebenen analytischen Begriffe gewahrt wird. Wie es in dieser Hinsicht mit der Vorstellung vom Grade geometrischer Gebilde stand, haben wir oben gezeigt. Hieran schliesst sich am nächsten das synthetisch nebelhafte Gegenstück zum analytischen Begriff des Imaginären an. Selbstverständlich liesse sich zuvor auch vom Negativen reden; aber dieses dürfte ohne besondere Auseinandersetzung leicht als specifisch analytischer Begriff verkannt und der verhältnissmässigen Einfachheit seiner Handhabung wegen in der Verschmelzung mit concreten, geometrischen oder mechanischen Vorstellungen fälschlich als synthetischer, d. h. unmittelbar zur Synthese gehöriger Begriff angesehen werden. Der imaginären Einheit oder noch besser dem abstracten $\sqrt{-}$ gegenüber war so etwas nicht möglich, und hiezu kam noch, dass es bis zu unserer Nachweisung an einer Brücke vom analytisch Imaginären zum geometrisch, mechanisch oder anderartig Sachlichen gefehlt hat, da die Gaussischen Ablenkungen vom Ziele doch nicht Wege zur Sache heissen können, sondern im Gegentheil nur Verschraubungen und Verdunkelungen der Aufgabe gewesen sind.

Die Projectiviker nun haben ihr Imaginäres dem Namen nach, eine ihnen selbst dunkle Zwittervorstellung, die ihrer Nebelhaftigkeit wegen eben auch nicht als etwas Scharfes, sondern nur als Nebel definirbar ist. Sie schielt mit dem êinen Auge nach dem analytischen Gebiet, von dem nicht blos das Wort, sondern auch die Thatsache gewisser Unmöglichkeiten geborgt ist, während das andere Auge in wolkige Phantasmen stiert, die vom Boden des Stetigkeitsprincips aufgestiegen sind und in unfassbar zerfliessender Gestaltlosigkeit vorschweben. Diese Region ist, wenn auch nicht gleich absurd, so doch ebenso unbestimmt, wie die räumlichseinsollende mehr als dreidimensionale der Gaussigkeiten. Die projectiven Verwandlungen der Gebilde in einander zeigten Lücken, und diese füllte man, ohne sich weiter

etwas dabei zu denken, mit dem Wort Imaginär aus, indem man einfach die Analysis nachahmte, die, wo die Uebergänge ihrer Functionen auf das Imaginäre treffen, simpel, und ohne dabei etwas Weiteres als die mit $\sqrt{-1}$ behaftete Formel vorzustellen, vom Imaginärwerden der Function redet. Davon, dass sich Derartiges in der Anschauung und sachlich verfolgen lassen könnte, hatten auch die Synthetiker bei ihren projectiven Verfahrungsarten keine Ahnung. Wohl aber bekundete der bessere unter den beiden namhaften Vertretern der Projectivik durch gewisse Umwege, dass sich ihm in Ermangelung eines deutlichen Begriffs vom geometrisch Imaginären gelegentlich in einzelnen Fällen partielle Hülfswendungen unterschoben, die in beschränkter Weise etwas von Surrogaten des Imaginären an sich hatten. Grade aber die Thatsache, dass solche vereinzelte und unvollkommene Surrogate entstehen konnten, ist ein handgreifliches Zeugniss für den Mangel eines unmittelbaren Begriffs. So hätte Poncelet seine „ideelle Sehne“ nie erdacht, wenn für sein Denken wirklich ein klarer Begriff vom geometrisch Imaginären in der Wissenschaft verfügbar gewesen wäre. Wir kommen auf diesen Umstand noch besonders zurück; hier haben wir nicht solche vereinzelte und zufällig bessere Wendungen im Auge, bei denen übrigens von dem Urheber trotz des Wortgebrauchs nicht einmal an das algebraisch Imaginäre gedacht wurde; sondern wir signalisiren das vorherrschende Unwesen, wie es sich besonders arg bei Steiner vertreten gefunden hat.

Der letztere überall ziemlich plump verfahrende Berliner Schweizer hat in noch handgreiflicherer Weise, als bezüglich des Imaginären, in Sachen der Unendlichkeitsbegriffe die schlechtesten Seiten der analytischen Vorstellungen nicht blos übernommen, sondern noch mehr verdorben. Seine unendlich entfernten Punkte sollen bei ihm keine blosse Redensart sein, deren Unwahrheit wir etwa durch eine rationelle Auslegung würden sachlich corrigiren können, sondern figuriren thatsächlich als geometrisirte Ungereimtheiten, die in der Stumpfheit ihrer nicht klar sondern nebelhaft sinnlichen Conception dem Gaussigen Sichschneiden der Parallellinien ebenbürtig, ja bisweilen gradezu congruent sind. Im Bereich der Analysis hatte man wohl die Asymptote als Tangente an einen unendlich entfernten Punkt der Hyperbel aufgefasst und bestimmt; aber diese Wendung kann ihr Zweideutiges und Falsches ablegen, sobald sie, anstatt mit der falschen Un-

endlichkeitsvorstellung, mit dem rationellen Begriff eines unbeschränkt entfernten, d. h. eines solchen Punktes ausgeführt wird, der auf dem Hyperbelarm in einer Weite von nicht beschränkter Grösse beliebig gewählt werden mag. Ein solcher Punkt, indem er individuellerweise irgendwo gesetzt wird, vertritt dann auch alle andern Punkte, die man statt seiner über ihn hinaus in noch weiterer Ferne von vornherein hätte setzen können oder noch annehmen möge. Freilich fällt er nie in die Asymptote oder, mit andern Worten, die Asymptote geht nie durch ihn, ja richtet sich nicht einmal auf ihn als auf ein Ziel; sie strebt vielmehr nur immer nach Punkten, die unbeschränkt wenig daneben liegen, und es ist eine arge Confusion, eine unbeschränkt geringfügige Abweichung mit einem genauen Zusammenfallen einerlei zu setzen.

Die Bestimmung und Berechnung der Asymptote als einer Tangente ist zunächst nichts weiter, als die Bestimmung einer wirklichen Tangente, deren Lauf unbeschränkt wenig von dem der Asymptote abweicht. Zwei verschiedene Linien bleiben es aber stets, und aus der Tangente an einen unbeschränkt entfernten Punkt muss man erst durch Weglassung des unterscheidenden Umstandes die genaue Asymptote gewinnen. Nur in der Ungenauigkeit eines sinnlichen Zusammenfliessens, welches nicht einmal in der allgemeinen Sinnesvorstellung, sondern nur in einer bemessenen Sinnesschärfe seinen Grund hat, kann sich die Meinung bergen, die Asymptote ziele nach einem in der Curve liegenden unendlich entfernten Punkte. Dieser Punkt ist eine pure Erdichtung, um nicht zu sagen, eine Lüge; zu letzterer wird er da, wo sich schon etwas von der bessern Einsicht regt, aber der Cultus des Widersinns gegen die Stimme des mathematischen Gewissens aus Eitelkeit, Eigensinn oder Trägheit oder aus eingewurzelter metaphysischer Verlogenheit bestehen bleibt.

Steiner nun trieb sich in vielen solchen mehr als blos falschen, nämlich theilweise auch schuldhaften Begriffen um. Während nirgend, weder bei Analytikern noch Synthetikern, weder bei Geometrikern noch Mechanikern, mochten jene nun Projectiviker sein oder nicht, richtige Begriffe vom Unendlichen vorkamen, brachte es Steiner im Verkehrten doch noch etwas weiter, indem er jene Unrichtigkeiten bis in das Allerplatteste auslegte. Da sollten sich Kegelschnitte dadurch unterscheiden, dass die eine krumme

Linie nur einen unendlich entfernten Punkt, die andere aber deren zwei hätte. Diese elenden Fictionen, die sich aber nicht selbst als Fictionen gaben, sondern als vollgültige Artikel mathematischer Rechtgläubigkeit aufdrängten, hatten ausser ihrem allgemeineren Ursprung von der Analysis her noch einen specielleren in der Handhabung des alten projectiven Hauptsatzes von den Abschnitten, die bei der Schneidung von vier Strahlen durch eine beliebige Transversale entstehen. Dieses sogenannte anharmonische Doppelverhältniss, welches im Grunde eine Gleichung und noch dazu in trigonometrischen Functionen, also wesentlich von analytischem Kerne ist, führt in seinen geometrischen Variationen natürlich auch auf den Fall, in welchem die beliebige schneidende Querlinie einem der Strahlen parallel wird. Alsdann sind nach gesunder Auffassung nur noch drei Durchschnittspunkte vorhanden; die absurde Fiction und der zugehörige Aberglaube halten aber trotzdem noch den vierten Durchschnittspunkt fest und verlegen ihn in das Zauberreich des Unendlichen. Man sieht, wie komisch gross das Bedürfniss nach sich schneidenden Parallellinien sein muss, da es sich überall einfindet, wo geistig ungefüge und wohl gar noch unskrupulöse Leute von den überlieferten falschen Unendlichkeitsbegriffen geäfft werden, weil es diesen Leuten nicht blos an intellectueller Gelenkigkeit zu einer zutreffenden, sondern auch an moralischer Kraft zu einer wahren Auffassung gebricht.

Nach unserm klaren Begriffs- und Sprachgebrauch schneiden sich unbeschränkt wenig vom Parallelismus abweichende Linien in entsprechend unbeschränkter Ferne; aber dieser gesunde Satz ist es nicht, was die Steiner und die Gauss bezüglich der Parallellinien auf die Beine gebracht haben. Letzteres ist vielmehr der Satz eines stumpfen und bornirten metaphysischen Aberglaubens, dass sich wirkliche Parallellinien im Unendlichen schneiden. Es ist also, wenn gehörig analysirt, der Satz, dass grade Linien, die einen Richtungsunterschied Null, d. h. keinen Richtungsunterschied haben, doch daneben, nämlich im Unendlichen, einen Richtungsunterschied haben sollen, der nicht Null ist.

Auf Grund unseres Systems ist es nunmehr eine Kleinigkeit, alle jene stetigen Uebergänge zum streng Unbegrenzten vermittelst des Unbeschränktgrossen völlig rationell zu bewerkstelligen und beispielsweise jenen vierten Punkt im Unbeschränkt-

grossen, d. h. auf jeder Stufe der Vergrösserung festzuhalten, wogegen von ihm bei der streng parallelen Lage nicht mehr die Rede sein darf. Weil man aber die streng parallele Lage mit einer an den Parallelismus unbeschränkt anzunähernden vertauschen kann, ohne in gewissen Beziehungen mehr als einen unbeschränkt kleinen Fehler zu machen, so ist ein Schluss von dem einen Fall auf den andern in den fraglichen Beziehungen möglich, indem man von jenem kleinen Fehler abstrahirt und das Ergebniss für beide Fälle als mit unendlicher Annäherung identisch setzt. Der vierte Durchschnittspunkt rückt in unbeschränkte Weite, während die Transversale sich dem Parallelismus nähert, ohne ihn zu erreichen. Hat sie ihn aber erreicht, so ist eben jeder Durchschnittspunkt verschwunden. An jene unbeschränkte Vergrösserung der Entfernung bis zum vierten Punkt schliesst sich nun aber der Gedanke an, dass in der genau parallelen Lage gar keine Begrenzung der Transversale mehr, sondern jene Unbegrenztheit statthabe, welche die Verneinung der bemessenen Grösse im Grossen, ebenso wie Null die Verneinung der Grössenexistenz überhaupt und hiemit zugleich der nach der Seite der Verkleinerung hin betrachteten Grössen, ist. Für den Fall des strengen Parallelismus und der zugehörigen Unbegrenztheit einen Durchschnittspunkt annehmen, heisst, um auch einmal den Jargon zu gebrauchen, einen unendlichen Fehler machen, — einen Fehler, der über jede Grösse hinaus, nämlich im Begriffe, also in der Qualität der Vorstellung liegt. Der Uebergang vom Unbeschränktgrossen zum Unbegrenzten, also im Sinne unseres Zeichengebrauchs von A zu Π, entspricht überall dem vom Unbeschränktkleinen zur Null, und man kann, wo man jenen Uebergang oder vielmehr Sprung vollzieht, ganz bestimmte Schlüsse über die Beschaffenheit derjenigen Grösse machen, mit der er geschieht. Ist diese Grösse, wie in unserm Fall, eine Linie, deren Erstreckung bis zu einem Durchschnittspunkt gemessen wird, so folgt, dass, sobald die Linie nicht mehr blos unbeschränkt gross, sondern bereits unbegrenzt gesetzt worden ist, hierin auch schon analytisch liege, dass kein Durchschnittspunkt statthabe. Es ist nämlich die unbegrenzte Erstreckung die Verneinung der Möglichkeit eines Durchschnittspunkts; denn der Durchschnittspunkt würde eine Grenze sein.

5. Eine wahre Erholung ist es, wenn man sich von jenen plumpesten Gestalten des geometrischen Unendlichkeitsaber-

glaubens, der aus seinen analytischen Keimen zu einem argen Gewächs ausgewuchert ist, wieder den verhältnissmässig bessern Regionen zuwenden kann. Dies geschieht, indem wir für die Frage der bisherigen Subalternität der unmittelbar geometrischen Methoden zu Poncelet zurückkehren und bei ihm zusehen, in welche Umwegsbegriffe er gerieth, weil er gewisse geometrische Verhältnisse, die sich ihm in weiterreichender Allgemeinheit aufdrängten, nicht abstract genug zu erfassen und mit keinem Begriff vom geometrisch Imaginären, geschweige mit einem richtigen Begriff davon in Verbindung zu bringen wusste. Dies ist mit einer seiner Hauptconceptionen der Fall, auf die er grossen Werth legt und die auch einige Originalität hat, — nämlich mit dem, was er ideelle Sehne nennt, und was von uns schon oben bei Gelegenheit des Imaginären berührt wurde.

Der Thatbestand kann hier nur allgemein skizzirt werden. Eine Kegelschnittsehne oder auch, wenn man die Gedanken auf etwas Bestimmteres richten will, eine Kreissehne ergiebt, wenn man in Beziehung auf sie gewisse Linien zieht, eine zu ihr gehörige Eigenschaft, die sich jedoch auch festhalten lässt, wenn man die schneidende Linie sich selbst parallel ganz ausserhalb der Curve verlegt. Hier ist sie keine wirkliche Sehne mehr; wegen jener fortbestehenden Eigenschaft aber will Poncelet sie doch noch Sehne, aber zum Unterschiede ideelle Sehne genannt wissen. Offenbar empfand der Geometriker, wenn auch nur dunkel, etwas davon, dass es sich bei dem fraglichen Fortbestande der Eigenschaft um einen einheitlich übergreifenden Sachverhalt handle, und die Aufmerksamkeit hierauf ist sein Verdienst. Der Mangel aber hat darin bestanden, dass weder er noch andere Mathematiker darauf gekommen sind, nach dem Grunde jener Einheitlichkeit zu suchen, geschweige dem Sachverhalt thatsächlich eine angemessene Gestalt zu geben. Zufolge unserer Aufschlüsse über das Imaginäre bleibt die Sehne wesentlich, was sie ist; nur wird sie ausserhalb der Curve zur Sehne der imaginären Ergänzungscurve, die freilich für Poncelet als solche nicht vorhanden war und erst durch unser System eingeführt worden ist. Jener Mangel war, genauer untersucht, ein Mangel an Abstractionskraft, der sogar unter dem Niveau der Analysis verblieb, während in deren eignem Bereich sogar noch eine Erhebung über dieses Niveau nöthig gewesen wäre.

Unsere Lehre vom Imaginären ist hienach ein Schlüssel zur

Eröffnung dessen, was für Poncelet völlig dunkel blieb. Verlegen wir eine Kreissehne, die in ihrer Mitte vom Durchmesser geschnitten werden mag, ausserhalb des Kreises, so kann beispielsweise hiezu die Eigenschaft den Leitfaden bilden, dass die Hälfte der Sehne mittlere Proportionale zwischen den beiden Entfernungen ihres auf dem Durchmesser liegenden Fusspunktes von der Peripherie ist. Entwirft man sich auf der Verlängerung des Durchmessers eine entsprechende Linie von derjenigen Länge, die der fraglichen maassgebenden Eigenschaft entspricht, so würde die Benennung Poncelets als ideelle Sehne zum Kreise darauf passen. Wir aber haben daran nichts als eine algebraisch imaginäre Sehne; denn innerhalb des Kreises sind $r - x$ und $r + x$ die beiden Stücke auf dem Durchmesser, wenn man x vom Mittelpunkt zählt. Macht man nun künstlich $x > r$, so wird $r - x$ negativ, und die mittlere Proportionale, d. h. die halbe Sehnenlänge, algebraisch imaginär. Die ideelle Sehne ist also die algebraisch imaginäre Sehne; sie ist die Sehne der zum Kreise gehörigen gleichseitigen Hyperbel. Davon, dass die sogenannte ideelle Sehne wirkliche Sehne einer Hyperbel sei, wusste Poncelet; aber er hatte keine Ahnung davon, wie das algebraisch Imaginäre einmal das Licht für seine dunkeln Wege werden könnte. Nach unserm alten Schema von Kreis und Hyperbel ist die sogenannte ideelle Sehne die imaginäre Ordinate y, und $(r + x)(r - x) = y^2$ ist nicht nur Ausdruck jener Sehneneigenschaft, sondern auch Gleichung des Kreises. Die ostensible Wegwerfung des Algebraischen, von welchem dennoch mancher Fingerzeig entlehnt wurde, hat sich, wie man sieht, bei den Geometrikern, auch bei dem verhältnissmässig besten, gründlich gerächt.

Erinnert man sich schliesslich noch überhaupt, welche fundamentale Rolle das sogenannte anharmonische Doppelverhältniss in der Projectivik, in der Ponceletschen wie in der nach ihm modificirten, zu spielen hat, so erscheint die Beiseiteschiebung der Analysis vollends als unwillkürliche Komik. Dieses Doppelverhältniss ist, wie schon vorher gesagt, eine Gleichung und zwar eine solche, deren Beweis auf den Pythagoreischen Satz zurückgeführt werden muss. Das Einfachere ist daher das Pythagoreische Verhältniss sowie die letzteres ausdrückende Quadratengleichung, die man auch kurzweg Gleichung des rechtwinkligen Dreiecks nennen könnte. Echt analytisch, d. h. nach den einfachsten Bestandtheilen, den letzten Abstractionen und den allgemeinen Grössen-

functionen betrachtet, ist jener für die Projectivik charakteristische Hauptsatz nicht blos etwas sachlich bereits sehr Zusammengesetztes, sondern auch der Ausdruck eines reinen Functionsverhältnisses, in welchem sich einfachere Functionen gehäuft bei einander finden. Wäre es nun auch nicht gegen alle Grundsätze des zerlegenden Denkens, eine solche Complication zum ersten Element und Vehikel einer Wissenschaft machen zu wollen, so würde doch jedenfalls schon darin ein Mangel liegen, den thatsächlich analytischen Ausdruck dieses relativen Elements nicht unumwunden als etwas analytisch zu Behandelndes zu handhaben.

Dem, was man herkömmlich analytische Geometrie nennt, liegt ebenso, wie der ursprünglichen unmittelbaren Geometrie, der Pythagoreische Satz oder, wenn man es abstracter ausgedrückt sehen will, jene Function zu Grunde, durch welche auf die einfachste Weise die Brücke zwischen den Liniengrössen und den Winkelgrössen geschlagen wird. Keine Methode kann den Begriff der Winkelfunction umgehen; dieser ist vielmehr ein wesentlicher Rechnungsbegriff, der offen oder versteckt in den Abhängigkeitsbestimmungen der Figuren und ihrer Theile mitenthalten sein muss. Auch lässt sich dieser Begriff formell noch abstracter gestalten, indem man die Form der reinen Grössenfunction an sich selbst, also überhaupt als quantitative Form, aus dem speciell geometrischen Sachverhalt heraushebt, und dieser Act der Abstraction ist sogar erforderlich, damit die höchste Stufe des wissenschaftlichen Verfahrens betreten werde. Was will nun dem gegenüber eine von vornherein mit verhältnissmässig complicirten Daten, wie jenes Doppelverhältniss ist, hantirende Geometrie? Will sie etwas sein, so muss sie sich analysiren, also — in ihre Bestandtheile auflösen. Fände sich bei dieser Auflösung noch wenigstens ein originaler Bestandtheil, den die sich für neu gebende Geometrie vor der früheren voraushätte, so könnte sicherlich hieraus etwas gemacht werden, wenn auch von einem Verzicht auf zugehörige analytische Abstraction keine Rede sein dürfte. Allein die Grundbestandtheile aller geometrischen Wahrheit sind schon durch die Geometrie der Alten aufgefunden und offenbar auch erschöpft. Was man an wirklich neuer Geometrie und zwar schon mit dem 17. Jahrhundert hinzugethan hat, beruht entweder nur auf Combinationen der alten Elemente oder rührt von Gesichtspunkten her, denen, wie dem der Krümmungsmessung, erst mit der modernen Analysis weitere Folge gegeben

werden konnte. Huyghens war der letzte bedeutende Geometer im Sinne einer auf natürliche Weise unmittelbaren Methode, in welcher die Rechnungsbegriffe nicht absichtlich eingeschränkt wurden, sondern nur unwillkürlich in sparsamer Anwendung verblieben. Aber grade das Bekannteste und Markirteste, was man bei diesem gediegenen Mathematiker als eigne Schöpfung vorfindet, nämlich die Evolutentheorie, hat in ihrer Allgemeinheit und heutigen Ausspinnung weder etwas sonderlich Praktisches, noch einen erheblichen theoretischen Reiz für sich. Bei dem niederländischen Forscher, der bei tieferer Würdigung in sovielen Beziehungen Newton vorgehen muss und diesen im Ganzen an echtem und natürlichem Geist überragt, war die Lehre von der Curvenabwicklung ein Nebenproduct der Versuche zur besten Einrichtung seines Uhrpendels. Das Cykloidenpendel hat sich technisch nicht bewährt, aber die daran angeknüpfte Evolutentheorie füllt noch heute die Lehrbücher, in denen die Analysis mit der zugehörigen Geometrie behandelt wird. Obwohl nun, von ganz vereinzelten Gesichtspunkten abgesehen, die heutige weitläufige Geometrie der Evoluten eine Ueberflüssigkeit und ein blosses, ja nicht einmal schönes Spiel vorstellt und der Kern desselben nur einer der Abfälle gleichsam von der Hobelbank eines an ernsthafteren Aufgaben arbeitenden Geistes gewesen ist, so hat doch die Projectivik auch nicht im Entferntesten etwas aufzuweisen, was auch nur diesem unwillkürlichen Huyghensschen Beitrage zur Geometrie zu vergleichen wäre. Es fehlt bei ihr an jeglichem erklecklichen Satze, der eine wesentliche geometrische Wahrheit hinzugefügt hätte. Alles, was sie aufweist, war in anderer Form schon vorher vorhanden, und es lässt sich nicht einmal behaupten, dass die veränderte Umhüllung eine Verbesserung sei. Im Gegentheil ist sie meist, anstatt ein besseres Kleid zu sein, eine erkünstelte Verkleidung und, wie so oft bei den Modestücken, häufig gradezu eine Verzerrung des Natürlichen.

6. Der Natur der Sache in der Geometrie entsprechen, diesem Wissenskreis eine völlig natürliche Gestalt geben oder, kurz gesagt, eine natürliche Geometrie schaffen, — das ist allerdings ein würdiger Zweck; aber grade von ihm ist in der beschreibenden Geometrie nur Wenig, in der sonstigen Projectivik aber vorherrschend das Gegentheil vertreten. Auch die gewöhnliche Coordinatengeometrie der Analytiker ist selbst unter den besten Händen, wie unter denen Lagranges, der Richtung auf

jenes Ziel fremd geblieben; denn es fehlte in dem Bereich, in welchem die blossen Rechnungsfunctionen ausschliesslich maassgebend sein sollten, an einem deutlich bewussten Verständniss für das erforderliche Maass von unmittelbarer Geometrie. Der überlegene Geist Lagranges ersetzte hier allerdings sehr viel durch Tact, indem er die geometrischen und die geometrisch mechanischen Hülfsmittel einschaltete und herbeizog, wie er deren grade benöthigt war, um den grundsätzlich in lauter Rechnungsfunctionen statthabenden Fortschritt der Entwicklungen sachlich zu vermitteln, also etwa zu einer Function oder Gleichung eine neue zu gewinnen oder, was wesentlich auch nichts Anderes ist, in eine Gleichung für einen alten Bestandtheil einen neugestalteten einzusetzen.

Die Nothwendigkeit der geometrischen oder sonst sachlichen Gesichtspunkte und Hülfsraisonnements wurde aber seitens der angeblich für Alles zureichenden reinen Analysis von vornherein wie nicht vorhanden behandelt. Grade Lagrange erklärte in der Vorrede zu seiner Mechanik ausdrücklich, keiner geometrischen Raisonnements zu bedürfen, und diese seine Vorstellung befand sich in thatsächlichem Widerspruch mit dem meist Tactvollen seines eignen Verfahrens, in welchem er oft genug aus einfachen geometrischen Verhältnissen die analytischen Hülfsbeziehungen abstrahiren musste, deren er zur Entwicklung und Ergänzung seiner allgemeineren Formeln, also beispielsweise der Grundformel der gesammten Mechanik, bedurfte. Ueberdies waren derartige allgemeine Grundformeln auch nur das Ergebniss von Abstractionen aus dem sachlichen Gebiet und hatten nur im Hinblick auf dieses Gebiet und auf die zu Grunde liegenden einfachen realen Arrangements einen realen Sinn. Kein Wunder daher, dass die Entwicklungen und Verwandlungen solcher Formeln, auch wo sie blos in algebraischen Operationen bestanden, nicht ohne einen Blick auf den sachlichen Compass dirigirt wurden. Der bestimmende Grund, warum grade die eine und nicht irgend eine andere der vielen möglichen analytischen Consequenzen gezogen und eben diese, anstatt einer andern Umwandlung vorgenommen wurde, war stets ein sachlicher oder, wenn man will, begrifflicher Leitfaden oder Gesichtspunkt, vermöge dessen nicht nur das sachliche Ziel, sondern auch die einzelnen Stationen des sachlichen Weges für den Fortschritt der analytischen Entwicklungen maassgebend wurden.

Unter so bewandten Umständen muss es natürlich, nachdem von uns eine klare Formulirung der nothwendigen Bestandtheile eines, sei es nun direct oder indirect auf sachliche Verhältnisse bezüglichen Raisonnements gegeben worden ist, gleichsam wie eine Offenbarung aus einer unlogischen Welt klingen, wenn man vernimmt, dass aus purer Analysis mehr Sachliches herausgeholt werden soll, als in sie zuvor hineingelegt worden ist. So etwas hiesse, um an unser früheres Beispiel zu erinnern, aus blosser analytischer Bearbeitung einer Curvengleichung auch die Rectification der Curve gewinnen wollen, ohne die Gleichung des rechtwinkligen charakteristischen Dreiecks zu Hülfe zu nehmen. Letztere schliesst aber ein geometrisches Raisonnement und eine geometrische Thatsache ein, die nicht aus der Curvengleichung selbst gezogen, sondern zu ihr als ein fremdes Mittel der weiteren Entwicklung hinzugesellt wird.

Die Vorstellung von einer natürlichen Geometrie erweitert sich zu derjenigen von einer natürlichen Sachmathematik. Für letztere würde ein erstes Beispiel die unter grösstmöglicher Ausnutzung der analytischen Hülfsmittel behandelte Mechanik sein. Wirklich natürlich würde aber eine solche Behandlung nur dann ausfallen, wenn in zweierlei Beziehung das rechte Maass in der Bestimmung der Mittel die leitende Regel bliebe. Erstens müsste die Menge des specifisch Geometrischen ein Minimum werden, und in dieser Richtung ist durch Lagrange thatsächlich am Meisten vorgearbeitet. Zweitens hätte sich aber auch die Rechnung auf ein Minimum zu beschränken und durch höherbelegene Begriffe zu ersetzen, die abstracter und mächtiger sind als die Rechnungsoperationen und letzteren daher leitend vorangehen müssen. Keine Reaction und kein Rückschritt hinter den durch Lagrange erreichten analytischen Standpunkt, sondern noch eine Erhebung über diesen, um den blossen Rechnungssymbolismus und das algorithmische Automatenthum in einer ähnlichen Weise, wie das specifisch Geometrische, einzuschränken!

Ein bedeutendes besonderes Werk über analytische Geometrie, wie das von Lagrange über analytische Mechanik, ist nicht vorhanden; denn Descartes' Geometrie entspricht diesem Begriffe nicht, und in der neuern Zeit ist es aus guten Gründen zu so etwas nicht gekommen, weil der Gegenstand nicht gross genug war, um höchststehende Geister um seiner selbst willen beschäftigen zu können. Nur als Nebensache und in zweiter Linie

wurde er von ihnen berührt. Der geometrische Theil von Lagranges Functionentheorie war so eine Nebenarbeit, steht aber auch in dieser Stellung als Beispiel einer analytisch behandelten höheren Geometrie hoch über den Büchern, die titelmässig von analytischer Geometrie oder von Anwendungen der Analysis auf Geometrie handeln. Was den bedeutendsten Geist, der das Werkzeug der Analysis beherrschte, wirklich reizen konnte, war nicht die verhältnissmässige Hohlheit blosser Geometrie, sondern musste ein bereits materielles Sachgebiet sein, und hier bot sich nach Lage des Wissensstandes zunächst die Mechanik dar. Was an Geometrie interessiren konnte, musste als Hülfsmittel für die Mechanik mit in Frage kommen. Demgemäss ist denn auch in Lagranges Analytischer Mechanik das Wesentlichste an analytisch behandelter Geometrie eingeschlossen und studirt sich in dieser überlegenen Darstellung und Verwendungsart unvergleichlich besser, als auf dem Stroh der Compilations- und Lehrbücher.

7. Auch in rein geometrischer Beziehung ist die Analytische Mechanik Lagranges den Reactionen sogenannter synthetischer Art überlegen. Die Projectiviker kommen hier freilich nicht in Frage; aber verhältnissmässig ernster und natürlicher als durch diese ist die geometrische Reaction durch Poinsot vertreten worden, der wesentlich blosser Statiker und zwar Statiker in der alten Sprache der geometrisch vorgestellten Kräftesubstitutionen war, — einer Sprache, die natürlich für Lagrange als eine völlig todte gelten musste. Nun hat sich aber eben dieser Poinsot, wie wir durch specielle Untersuchung gefunden haben, grade in Bezug auf erforderliche geometrische Vorstellungen als unzulänglich erwiesen, einen Hauptpunkt in Lagranges Analytischer Mechanik auch nur richtig zu verstehen. Grade ein Mangel an Blick für geometrische Möglichkeiten und Nothwendigkeiten ist es gewesen, durch den Poinsot sich hat verleiten lassen, eine ganze Abhandlung zu schreiben, um Lagrange einen Fundamentalfehler nachzuweisen, einen Stoss gegen dessen Analytische Mechanik zu führen und überhaupt die Vorzüge der eignen geometrischen Methode ins Licht zu setzen. Was er nun aber wirklich ins Licht gesetzt hat, ist die Fehlerhaftigkeit seines eignen Verhaltens.

Die betreffende Abhandlung Poinsots, die 1846 im 11. Bande von Liouvilles Journal erschien, ist, um die Komik vollzumachen, von dem Herausgeber einer dritten 1853 erschienenen Auflage der Lagrangeschen Mechanik, nämlich von einem Akademiker

Bertrand, auch noch beifällig als Buchergänzung nebst anderem fremden zum Theil noch schlechteren Stoff mitabgedruckt worden. Auch haben wir in der sonstigen Literatur keine Spuren davon gefunden, dass seitdem irgendwo die Unrichtigkeit des Poinsotschen Angriffs erkannt worden wäre. Im Gegentheil hat in jener unkritisch autoritären Weise die mathematische Welt sich an die letzte und die Lagrangesche überlebende Epigonenautorität Poinsots gehalten und einen nicht unerheblichen Fehler, der durch die ganze Analytische Mechanik hindurch Folgen haben soll, bis heute als nachgewiesen angesehen. Dreissig Jahre lang ist diese dritte Auflage die einzige gewesen, die im Buchhandel zu haben war, und die Leser derselben wurden noch ausdrücklich in Anmerkungen auf die abgedruckte Poinsotsche Berichtigung hingewiesen. Nicht Jeder hat ein Interesse daran, einen Fundamentalpunkt, selbst zu untersuchen, und wer es im Studium auch hätte, wird nicht zu jeder Zeit und unter allen Umständen aufgelegt sein, eine Anfechtung, von der sich für die materielle Hauptsache allenfalls absehen lässt, mit Unkosten eines bedeutenderen Mühaufwandes eingehend zu prüfen. Wenn aber unter den nicht wenigen Studirern und gelehrten Benützern der Mechanik Lagranges, die doch von sehr verschiedenen Gesichtspunkten und Interessen geleitet werden mussten, sich nicht einer gefunden hat, der den Skandal entdeckte, so ist das ein übles Zeugniss für die inzwischen florirende mathematische Modewelt des 19. Jahrhunderts, die im Dreschen von leerem Stroh und in der Befassung mit Unbedeutendheiten gross, ja lang und breit, aber im Erkennen des wirklich Guten sich nahezu als ein urtheilsloses Nichts blosgestellt hat. Diese auf ihre Handwerksanalysis eitle Welt hat nicht einmal eine Antwort auf die Poinsotsche Unterstellung gefunden, — eine Unterstellung, die, wenn sie begründet wäre, zwar nicht, wie sich der Untersteller dachte, die analytische Methode selbst fällen oder auch nur discreditiren oder compromittiren, wohl aber deren persönliche Handhabung durch Lagrange nicht unerheblich treffen würde. Was hatten sich aber auch diese kleinen Geister von Amtsgelehrten des 19. Jahrhunderts um die Ehre eines Lagrange zu bekümmern, der gar hoch über ihnen stand und auf dessen Höhe sie vornehmlich nur mit Neid hinblickten, und an dem sie auch thatsächlich fast überall nur gemäkelt haben!

Poinsots Abhandlung war, als sie erschien, allem Anschein

nach ein recht altes Manuscript und sozusagen ein Ladenhüter. Lagrange war seit einem Menschenalter todt, die zweite Auflage der Mechanik ungefähr ebensolange im Buchhandel, und doch nahm Poinsots Abhandlung nur die erste Auflage von 1788 in Bezug, während der vorgebliche Fehler sich doch auch in der späteren Umarbeitung und zwar schon an der Spitze des Buches, nämlich im ersten analytischen Abschnitt, als eine Hauptumwandlung der Fundamentalgleichung vorfand. Die Annahme ist daher nahegelegt, dass Poinsot schon zu Lebzeiten Lagranges, d. h. vor der zweiten Auflage, seine vermeintliche Fehlerentdeckung ausgearbeitet, aber nicht den Muth gefunden hatte, sie Lagrange selbst ins Angesicht oder auch nur während der Jahrzehnte frischerer Nachwirkungen der Lagrangeschen Thätigkeit zu veröffentlichen.

Der Kern der Sache besteht darin, dass seitens Poinsots Lagrange der Vorwurf gemacht wird, ausdrücklich für schiefe Axen eine Gleichung aufgestellt zu haben, die sich bei näherer Untersuchung als nur für rechtwinklige gültig erweise. Diesem Vorwurf folgt dann die Aufstellung einer andern Gleichung, die analytisch verwickelter ist als die Lagrangesche, und die nun wirklich auf schiefe Axen passen soll. Der allgemeine Gegenstand, um den es sich bei Lagrange handelt, ist die Verwandlung eines Kräftesystems in ein anderes äquivalentes, also in eines mit gleicher Resultante, mag diese nun eine Grösse haben oder Null sein. Der Fall der Kräftezusammensetzung um einen Punkt ist ein Specialfall hievon, und im Abschnitt über die Kräftezusammensetzung, in welchem auch das Potential, wenn auch nicht unter diesem neumodischen Namen, als Zubehör miterledigt wird, kehrt die angeblich fehlerhafte Gleichung in ausdrücklicher Beziehung auf schiefe Axen wieder. Nun hat bei der Entwicklung seiner Gleichung Lagrange echt analytisch aus dem abstracten Gedanken heraus geschlossen, dass die in zwei Gestalten der mechanischen Grundgleichung vorkommenden virtuellen Geschwindigkeiten Functionen von einander sind, demgemäss eine partielle Differentialgleichung gebildet und diese benützt, um zum Ausdruck einer Kraft des äquivalenten Systems in Elementen des gegebenen Systems zu gelangen. Die Kräfte des äquivalenten Systems denkt er sich, wie er im Allgemeinen muss, nach beliebigen Axen wirksam und führt daher auch schliesslich Alles auf drei schiefe Axen zurück. Auf den allereinfachsten Fall, in dem aber der vorgeworfene Fehler sich auch noch bekunden müsste, kann man sich

die Aufgabe und den Gedankengang Lagranges bringen, indem man in der Ebene eine einzige Kraft ins Auge fasst, die durch zwei äquivalente ersetzt werden soll, wobei also wesentlich die Verhältnisse des sogenannten Parallelogramms der Kräfte vorliegen. Nach der Bezeichnungsart Lagranges sind alsdann P, Ξ und Ψ die Kräfte, p, ξ und ψ beliebig lange Linien, in deren Richtung jede wirkt, und dp, $d\xi$ und $d\psi$ die virtuellen Geschwindigkeiten, d. h. rechtwinklige Projectionen einer punktuellen Verschiebung auf die Kräfterichtungen. Wenn nun ξ und ψ als gegebene schiefe Axen figuriren, so mag beispielsweise Ξ in P und den Functionen der virtuellen Geschwindigkeiten auszudrücken sein. Lagrange gelangt nun in zwei Schritten zur Gleichung $\Xi = P \frac{dp}{d\xi}$ und zum Analogon für Ψ.

Zufolge der Poinsotschen Behauptung soll nun die Gleichung $\Xi = P \frac{dp}{d\xi}$ nur dann zutreffen, wenn die Richtungen ξ und ψ zu einander rechtwinklig sind, also in diesem vereinfachten Specialfall sozusagen ein Rechteck der Kräfte vorliegt. Man kann sich nun aber auch durch geometrische Construction anschaulich davon überzeugen, dass die analytische Wahrheit, die unter Voraussetzung schiefer Richtungen gefunden ist, sich, wie es sein muss, auch dann nicht verleugne, wenn man an die Stelle der analytischen Zeichen die geometrischen Repräsentationen derselben setzt. Diese Bewahrheitung lässt sich dadurch vereinfachen, dass man in diesem Fall die virtuelle Verschiebung dp in die Richtung der actuellen Bewegung legt, da diese Lage ja auch ein Fall aller möglichen Verschiebungen des in der Ebene freien Punktes ist. Wir führen jedoch die erforderlichen geometrischen Constructionen, durch welche die partiellen Differentiale, in welche dp in Bezug auf $d\xi$ und $d\psi$ zerfällt, entworfen werden, nicht weiter aus. Wenigstens ist es genug, zu sagen, dass sie nicht durch die Fällung von Lothen, sondern durch die Ziehung von solchen Linien nach dp entstehen, die dp in einem Winkel schneiden, welcher dem von ξ und ψ gebildeten gleich ist. Für den Begriff dieser partiellen Differentiale ist hier die functionelle geometrische Abhängigkeit der in ihrem constanten Bestandtheil beliebig wählbaren Entfernung p von den analogen Längen ξ und ψ maassgebend.

8. Nachdem wir auf diese Weise für diejenigen, welche mit Poinsot von der niedern Stufe der specifischen Geometrie her die Lagrangesche Analyse nicht verstehen, die Mittel einer kurzen geometrischen Probe angegeben haben, wenden wir uns nun direct zu der Umkehrung der Sache. Nicht Lagrange hat etwas Geometrisches vernachlässigt, sondern Poinsot hat einen argen geometrischen Fehler gemacht. Weil Lagrange von schiefen Linien redet und vermittelst dieser die Oerter der Angriffspunkte der Kräfte bestimmt, so hat Poinsot sich eingebildet, es handle sich um schiefe Parallelcoordinaten und hat diese widersinnigerweise der Lagrangeschen, ganz anders beschaffenen Anordnung untergeschoben. Lagrange bestimmt seine Oerter durch die Abschnitte, die durch die rechtwinkligen Projectionen der virtuell verschobenen Angriffspunkte entstehen. Man hat auf den schiefen Axen am Ende dieser jedesmaligen Abscissen nur senkrecht Ebenen durchzulegen, um durch deren Durchschnitt den punktuellen Ort im Raume zu erhalten. Im obigen vereinfachten und auf die Ebene reducirten Beispiel genügen Lothe. Poinsot denkt aber in seiner geometrisch beschränkten Voreiligkeit an Parallelogramme oder Parallelepipeden, die er nach der Schulerlernung durch Ziehung von Coordinaten gewinnt, die von dem jedesmaligen Angriffspunkt der Kraft den schiefen Axen parallel gezogen werden. Durch diese beschränkte Unterstellung hören Abschnitte wie $d\xi$ und $d\psi$ auf, virtuelle Geschwindigkeiten zu sein, und der arme Lagrange muss sich nun gefallen lassen, zurechtgewiesen zu werden, dass seine Differentiale $d\xi$ und $d\psi$, in Beziehung auf welche er eine analytisch richtige Beziehung gefunden habe, in geometrischer Thatsächlichkeit nicht die virtuellen Geschwindigkeiten, sondern schiefe Projectionen seien. Die Schiefheit gehört aber ganz und gar Poinsot an, der sich hier wie ein Schüler und zwar wie ein sehr hölzern geschulter Schüler benommen hat. Das Bekanntwerden mit schiefwinkligen Coordinaten, einer, nebenbei bemerkt, unpraktischen Spielerei, gehört meist zur Schuldressur. Was aber nicht dazu gehört, ist der freie Blick und Gedanke, dem auch andere praktischere Ortsbestimmungen nicht über den Horizont gehen. Die Befangenheit Poinsots in der geometrischen Schulüberlieferung hat ihn statt Lagranges ganz natürlicher und zweckentsprechender geometrischer Anordnung eine andere sehen lassen, die mit der fraglichen Analyse in Widerspruch steht. Er hat also die Geometrie, die bei

Lagrange vorkommt, noch weniger verstanden als dessen algorithmisches Raisonnement. Die analytische Correctur, die nun Poinsot auf Grund seiner Lagrange angedichteten Schiefheiten gegen diesen eintreten lässt, geräth entsprechend ergötzlich; jedoch müssen wir es dem Leser, der sich für dieses historisch denkwürdige Stückchen noch näher interessirt, selber überlassen, sich mit unserm Compass in das Gebiet der Poinsotschen Ausführungen zu begeben. Er mag dabei zugleich bedenken, dass man in Poinsot den solidesten Vertreter geometrischer Methoden im 19. Jahrhundert, einen solideren als Poncelet und Steiner, ja vielleicht auch als den Einleiter der ganzen Richtung Monge, vor sich hat, und dass diese verhältnissmässige Gediegenheit es allein ist, was den Missgriff geschichtlich so lehrreich macht.

Die specifisch geometrischen Raisonnements sind, abgesehen von dem nothwendigen Minimum, welches den analytischen zur Unterlage dient, eine niedere Stufe der Vermittlungs- und Denkweise, die principiell bereits überwunden ist, aber auch thatsächlich gleich einer todten Sprache, ausser bei rückständigen Gelehrten, aus dem Gebrauch gänzlich und überall verschwinden wird. Eine Vermittlung mit zufälligem Nebenwerk hat keine Berechtigung mehr, sobald der davon befreite abstractere Gedankengang, der demgemäss ungemischter, reiner und mithin auch klarer ausfällt, einmal gefunden ist. Nur eine rückständige Art der Schulung, ja zum Theil auch eine gewisse naturwüchsige Unentwickeltheit der persönlichen Anlagen und Neigungen, die sich zuerst auf voll Sinnliches, Concretes und Anschauliches richten, mag das Hängenbleiben und die Bewegung im Bereich einer niedern methodischen Position erklären. Uebrigens versteht sich, dass derartig tiefer stehende Methoden an sich nichts Unrichtiges mitsichzubringen brauchen, sondern nur beschwerlicher und in ihrer Tragweite weniger mächtig sind als die höheren. Sie können für sich bestehen, ohne der höheren Mittel zu bedürfen; aber sie werden es unter übrigens gleichen Umständen auch immer nur zu subalternen Leistungen bringen. Dagegen hat der Gedanke sofort mehr abstracte Kraft und arbeitet gleichsam mit einer vollkommneren Maschinerie, nämlich mit einfacheren Begriffen und bequemeren Zeichen, sobald er sich des analytischen Werkzeugs bedient. Was ein Zahlensystem und gutes Zählen für gemeines Zahlenrechnen, das sind überhaupt eine

abstracte gute Zeichensprache und der analytische Algorithmus für alles Rechnen und rechnende Denken.

9. Nun ist aber auch die bisherige vorherrschende Rolle der Analysis, selbst in ihrer besten Gestalt bei Lagrange, kein letztes Muster für die Behandlung eines sachlichen Gegenstandes. Der Mangel einer zureichenden Pflege der Realbegriffe ist unverkennbar, und was eingestandenermaassen nur eine Vervollkommnung des Instruments bezweckte, ist unwillkürlich zu einer mit Unrecht vorherrschenden Hauptsache geworden. Die Formelhäufungen sehen der logischen Scholastik des Mittelalters ähnlich, in welcher ja auch der Cultus eines dürren und leeren Formalismus das unmittelbare Herantreten an die Quelle der sachlichen Wahrheiten ersetzen musste. Für niedere oder hohle Geister bietet grade die Analysis eine bequeme Gelegenheit, mit leichter Mühe und fast auf automatische Weise Geistlosigkeiten zu Markte zu bringen und diesen für Unkundige das äusserliche Ansehen von begründeten Wahrheiten, schwierigen Wendungen und tiefen Einsichten zu geben. Für überlegene Geister, wie einmal Lagrange in seiner hohen einsamen Stellung einer war, ist allerdings schon die ausschliessliche Rechnungssymbolik kein blosses Darstellungs- und Beweismittel, sondern auch ein selbständiger Wegweiser zu darüber hinaustragenden Erfindungen, aber doch nur, indem sie sich mit den Sachbegriffen unwillkürlich combinirt und im Hinblick auf die realen Zwecke Gleichungen aufstellt und ausnützt. Grade hiebei tritt es aber zu Tage, dass die leitenden Begriffe in erster Linie unmittelbare und sachliche sein müssen, und dass die Folgerungen aus dem blossen Algorithmus nur dann geschickt und fruchtbar ausfallen, wenn sie in einer gegenüber den Sachbegriffen subalternen Weise vor sich gehen, d. h. vor allen Dingen den Gesetzen der Natur der Sache gehorchen. Ihre Selbständigkeit ist nur eine relative und bemessene, und die Rechnung läuft wie eine Maschine nur, nachdem sie durch einen Motor und äussere Kräfte in Gang gesetzt ist. Die in erster Ordnung wirkenden Kräfte sind aber nicht die algorithmischen Mittel, sondern anderweitige Gedanken, die sich, nachdem sie das Ihrige vorgethan, hinterher die absehbaren Rechnungswendungen dienstbar machen. Aus Rechnungsbegriffen wird daher erst dann etwas gewonnen, nachdem vorher die unmittelbaren Sachbegriffe in Ordnung gebracht sind. Aus dem fortwährenden Zusammenwirken der Sachbegriffe mit den

Rechnungsbegriffen ergiebt sich erst der Fortschritt, und es ist daher ein grosser Mangel der grundsätzlich analytischen Behandlung eines Gegenstandes, das analytische Formelwesen dabei als die leitende Hauptsache geltend zu machen. Es giebt daher auch keine Sachwissenschaft, die in dem fraglichen Sinne analytisch heissen dürfte; denn das Analytische ist nur ein methodisches Hülfsmittel und zwar ein Nebenmittel, welches nur nach und neben den sachlichen Begriffsnormen seine wahre und gebührende Stelle einnimmt.

Hienach empfehlen wir grundsätzlich, bei allem Studium und bei aller Forschung nur an eine einzige vollkommene Methode zu denken, und daher weder mit der Berücksichtigung der synthetischen Reactionen zu viel Zeit zu verlieren, noch sich durch die analytischen Ausschreitungen von der Einschlagung eines selbständigen natürlichen Weges abhalten zu lassen. Es ist beispielsweise keine natürliche Geometrie, wenn die in der Geometrie bethätigte Functionentheorie sich so anlässt, als wäre sie nicht für Zwecke der Geometrie, sondern um ihrer selbst willen angebracht und die geometrischen Gestaltungen blosse Beispiele. Die Geometrie hat ihre eignen Bedürfnisse und Schranken; es darf daher mit ihr nicht willkürlich analytisch gespielt und sie nicht zum Tummelplatz beliebiger analytischer Phantasien gemacht werden. Analytisch sind viele Conceptionen und Combinationen möglich, die geometrisch, phoronomisch oder mechanisch keinen Sinn oder kein Interesse haben, indem sie den specifischen Vorbedingungen der Naturaction, wo nicht widersprechen, doch nicht entsprechen. In einer natürlichen Geometrie ist die Geometrie selbst der Zweck und die Analysis das Mittel. Ebenso verhält es sich mit der natürlichen Mechanik und überhaupt mit jedem Zweige der Sachmathematik. Man wird nur zur gesunden Auffassung und Behandlung der Gegenstände gelangen, indem man sich durch äusserste Zergliederung die an erster Stelle maassgebenden Begriffsnormen verschafft, dann zur Aufstellung der functionellen Rechnungsnormen übergeht und bei dem vereinigten Gebrauch von beiderlei Satzungen auch noch die specifischen Beschaffenheiten im Auge behält, die mit der concreten Natur der Sache gegeben werden. So kennt die blosse Rechnung nur Grössen schlechthin, und ihr ist beispielsweise die Sinusfunction keine Sinuslinie, geschweige eine Linie, die zum Radius eine bestimmte Lage hätte. Statt dieser Lage figurirt wiederum nur

eine gleichgültige Grösse, nämlich das Argument, bei welchem sogar der Begriff eines Ausgangspunktes der Zählung wegfällt. In der Sachwissenschaft kommt es aber grade darauf an, diese unterscheidenden Specifica stufenweise nacheinander geltend zu machen. Nur auf diese Art wird der methodische Stufenbau vollendet, der, mag man ihn nun von unten hinauf — oder von oben hinunter steigen, die richtigen wissenschaftlichen Verbindungen mit weder zuviel noch zuwenig Abstraction herstellt und jeglicher Einsicht oder Einsichtsart ihren Rang nebst der zugehörigen Verwerthung anweist.

Die synthetischen Reactionen geometrischer Art haben keine natürliche Geometrie im Auge gehabt, sondern sind im Grossen und Ganzen ein in das Verkünstelte führender Abweg gewesen, unbeschadet einer gewissen geistreichen Art und Weise einzelner ihrer Vertreter, wie Poncelets. Sie wollten recht modern sein und geriethen doch sozusagen etwas altfränkisch; sie repräsentiren mit ihren Mischungen und ihrem Halbwesen gleichsam eine Romantik der Mathematik, die noch auf geometrische Abenteuer auszieht, nachdem längst diese Ritterkünste durch mächtigere moderne Waffengattungen verdrängt sind. Zu einer natürlicheren Mechanik ist es aber durch die geometrisch statische Reaction Poinsots auch nicht gekommen, wenn auch hier ein gewisses Streben nach Solidität und einiges nachhaltigere Verdienst nicht zu verkennen ist. Die Methode der geometrisch statischen Kräftesubstitutionen fiel erst recht altmodisch aus und speciell die Statik Poinsots ist etwas durchaus Altfränkisches. Man verliere also auch auf diesem Abwege nicht zuviel Zeit, wenn auch immerhin Angesichts überwuchernder Analysis einige Uebung im unmittelbar geometrischen Denken nicht schaden kann. Man verfahre aber grundsätzlich derart, dass man von den analytischen Musterwerken ausgehe und sich das Minimum von specifischer Geometrie oder sonstigen Sachvoraussetzungen ergänzend verdeutliche.

Man hüte sich aber vor den auf Analysis oder sonst abgerichteten Autoritätsmaschinen in menschenähnlicher Gestalt, und zwar ganz besonders, wo sie jenen neusten Mischmasch von Analysis und Projectivik zu Markte gebracht haben, welcher in der dem mechanischen Principienwerk beigefügten Anleitung als stillos und zerfahren signalisirt worden ist, — eine Signalisirung, derenwegen der Verfasser noch besonderen Attentaten auf seine

wissenschaftliche Lehrstellung und Existenz ausgesetzt gewesen ist. Einst konnten die Zeichen des Mathematischen, wo man sie auf unbekannter Erde, etwa als geometrische Figuren, antraf, als Spuren von Menschen und von echt Menschlichem gelten. Heute aber würde gemeiniglich, wo man Formelkram und Figuren sozusagen herumliegen sieht, eher der Ausspruch Geltung haben: Ich sehe die Spuren von Affen, — und zwar (wenn man mit den Eigenschaften der betreffenden professoralen Fauna vertraut ist) Spuren von ansehnlich ungeschickten, diebischen und boshaften Affen. Freilich sind diese Affen Culturaffen; sie sind sammt ihrer Eitelkeit und ihren Amtsgestellen im Bereich der Universitäten und Akademien und für dieses Bereich fabricirt und dressirt worden; aber eben deswegen sind sie noch eine ärgere Verzerrung auf das Menschliche, als die Naturaffen. Man wende sich also von dem ganzen Tummelplatz dieser intellectuellen und moralischen Betise rechtzeitig mit Verachtung und Ekel fort und suche vorwärts seinen eignen Weg, indem man nur bisweilen nach vereinzelten Gipfeln zurückblickt, die in eine reinere Luft emporragen. Nur so wird man mit der Mathematik wieder selbst zur Höhe und zur Ehre kommen.

10. Blosses Studium, d. h. Zueigenmachung von Etwas, was bereits vorhanden und von Andern her zugänglich ist, ist noch nicht das Letzte. Es leistet viel, wenn es gut eingerichtet und namentlich, anstatt vorzugsweise auf ein Durchgehen von Schriften, baldmöglichst auf das Verfolgen bereits gelöster Probleme gelenkt wird. Die Wiederhervorbringung gewonnener Ergebnisse, besonders mit Rücksicht auf den historischen Stufengang in ihrer Auffindung, ist aber nur eine Vorübung, auf welche die Selbständigkeit in eigner Forschung folgen muss. Dies ist wenigstens das Grundgesetz für das Ganze aller verfügbaren Fähigkeiten, wenn auch nur wenige einzelne davon berührt werden.

Unter den Selbständigkeiten in der Forschung sind nun zweierlei Arten zu unterscheiden. Entweder finden sich die Probleme bereits geschichtlich überliefert, aber noch gar nicht oder nur theilweise gelöst, oder der Forscher stellt sich selbst eine eigenartige Aufgabe, an die man bisher noch nicht gedacht hat. Letztere freie Initiative ist, unter übrigens gleichen Umständen, offenbar die höhere Gattung; denn ein bedeutendes Problem aufwerfen und zu einer ersten Fragestellung gelangen, ist Mehr, als eines von der Geschichte her blos übernehmen.

Nicht selten bestehen die wichtigsten drei Viertel der Arbeit in der richtigen Stellung eines Problems, und für die Antwort auf die Frage bleibt nur noch ein Viertel übrig. Wie sich die Sache aber auch im Besondern gestalte, immer wird es eine grössere Originalität bekunden, wenn Zeiten und Männer mit bedeutenden eignen, als wenn sie nur mit überlieferten Problemen fertig werden. Ueberhaupt entscheidet die Gattung von Aufgaben, mit der man sich zu schaffen macht, über den Werth der Thätigkeit, mögen nun ganze Generationsreihen, Generationen oder direct einzelne Persönlichkeiten gemessen werden.

Das bisherige 19. Jahrhundert, d. h. die wesentlich nachlagrangesche Zeit, hat sich im Bereich der reinen Mathematik in nennenswerther Weise nur mit überlieferten, ja der fraglichen Lösung schon sehr nahe gebrachten Problemen zu schaffen gemacht. Grade die besten Namen, ja die einzigen, mit denen sich die Vorstellung von ernsthaft schaffenden Fähigkeiten verknüpfen lässt, Abel und Galois, repräsentiren nicht nur das bisherige mathematische Jahrhundert, sondern auch jene abgeleitete secundäre Art und Weise. Diese Wahrnehmung kann aber für jene beiden Persönlichkeiten als solche kein Vorwurf werden; im Gegentheil ist hier Vieles auf Rechnung der Zeit und der Verhältnisse zu setzen. Ueberdies starben Beide als junge Männer, ja Galois schon beim ersten Eintritt in die Zwanziger. Es ist daher grade kein Wunder, wenn sie zunächst von der eben frischen Ueberlieferung, d. h. von den Schriften Lagranges her, Antriebe empfingen. Lagrange war noch nicht lange todt und hatte noch zuletzt neue Auflagen der wichtigsten Schriften erscheinen lassen. Namentlich musste sein Werk über die Gleichungen mit dem dort noch unabgeschlossen gebliebenen Hauptproblem zu neuen Versuchen spornen, und so ging denn Abel schon als Student an die Aufgabe der allgemeinen Gleichungslösung und zwar noch mit der Vorstellung, als wäre sie im Allgemeinen algebraisch ausführbar. Durch Lagrange war dieser Fall unwahrscheinlich gemacht, aber nicht völlig ausgeschlossen, und Abel fand erst durch die Vergeblichkeit seiner Bemühungen seinen berühmten Unmöglichkeitsbeweis, zu dem freilich ein gewisses Maass von Vorgängerschaft in Ruffini vorhanden gewesen war. Dieser Beweis nebst dem Zubehör an algebraischen Lösbarkeitsfällen ist die Hauptleistung des jungen Norwegers gewesen; denn die elliptischen Functionen und Zubehör gehören in ein niedriger

gelegenes Gebiet, zu dessen Bearbeitung die Sammlungen Legendres veranlasst hatten und worüber wir uns schon oben ausgesprochen haben. Lagrange hatte in der Gleichungsfrage seit 1770 ein halbes Jahrhundert hindurch selbst keinen entscheidenden Fortschritt mehr gemacht, so nahe er auch dem Abschluss gekommen war. Abel formulirte diesen Abschluss, indem er eine Antwort, die Lagrange als schwierig bezeichnet hatte, auf einem, wenn auch weitläufigen und schwer controlirbaren Wege zu Stande brachte. An eine wesentlich neue Fragestellung, die von derjenigen Lagranges erheblich abwiche, hat weder der Norweger noch bisher sonst Jemand gedacht; denn die von Galois her veranlassten sogenannten Lösungen in elliptischen Functionen sind noch kaum als ernsthafte Bewältigungen des fünften Grades zu betrachten.

Galois arbeitete nach Abels Tode, ging ebenfalls von der Gleichungsmethode Lagranges aus, schlug aber einen von dem Abels abweichenden Weg ein und gelangte selbständig zu dem unter seinem Namen berühmten und epochemachenden Satze. Ihm war die Ueberlieferung von Lagrange her noch näher und wahlverwandter, und bei ihm könnte man noch eher, als bei Abel, annehmen, dass er vielleicht später zu noch originaleren Wendungen gelangt sein würde. Interessant ist seine kurze, so rasch und jäh abreissende Geschichte, weil sie zugleich ein Stück Geschichte der Verkommenheit der Akademien und überhaupt des amtlichen Gelehrtenthums geworden ist. Der junge Mann, ohne Mittel, seine Abhandlungen selbst drucken zu lassen, sendete sie mit der Hoffnung der Unerfahrenheit an die französische Akademie. Von dieser wurden sie zum Theil verbracht, und besonders Fourier, der in Zahlengleichungen recht subaltern gearbeitet hat, soll dabei betheiligt gewesen sein. Uebrigens aber, nach weiteren persönlichen Bemühungen seitens Galois', befasste sich endlich Poisson mit der Sache, doch nur um als Berichterstatter der Akademie zu erklären, dass die betreffenden Arbeiten nicht zu verstehen seien. So hatte denn moralisch und intellectuell die französische Akademie der Wissenschaften an dem Galoisschen Fall einmal wieder für ihre Beschaffenheit Zeugniss abgelegt. Auch erschien, was sich von den Galoisschen Arbeiten an Hauptsächlichem trotz der Akademie erhalten hatte, erst fast ein halbes Menschenalter später nach jenen Vorgängen und nach dem bald erfolgten Tode ihres Helden. Komischerweise geschah die Veröffentlichung in Liouvilles Journal (1846), einer Zeitschrift,

die gegen ihre Beschaffenheit und akademische Officiosität durch die Galoissche Hinterlassenschaft, die, wenn auch mit einer entstellten Kunde von dem zugehörigen Schicksal, schliesslich in diese Spalten gedrungen war, doch nur ein höhnendes Memento aufweist.

Uebrigens erstreckte sich Galois' Gutgläubigkeit bezüglich der Zeitgelehrten, auch nachdem er die Erfahrung mit der Akademie schon gemacht hatte, noch sehr weit; denn vor seinem Gange zu einem Duell mit tödtlichem Ausgang appellirte er in einem gleichsam testamentarischen Brief, versteht sich vergebens, an bestimmt genannte Namhaftigkeiten auf deutschem Boden, die ihre Autorität einsetzen sollten, um die französischen Gelehrten darüber zur Raison zu bringen, dass er etwas der Beachtung Werthes geschrieben habe. Armer Galois, der du in deiner Unkunde den Herrn Hofrath Gauss und den Herrn Juden Jacobi ausdrücklich zu so etwas, wie geistigen Testamentsvollstreckern ernanntest und die bête triomphante, von der du zu Hause in Paris ein Probestückchen erfahren, anderwärts noch verkanntest! Hierüber haben wir glücklicherweise seitdem deutschgründliche Aufklärungen gewonnen und gegeben, und die Zeit ist nicht mehr fern, wo aller Orten auch sehr junge Männer das Gelehrtenthum, die Akademien und Universitäten, die officiös oder cliquenmässig hoch geschraubten Namhaftigkeiten der verschiedensten Länder und Stämme einschliesslich des hebräischen, — kurz die ganze gelehrte bestia trionfante hinreichend durchschauen werden, um sich nicht mehr wie Galois nach ihrer Höhle zu adressiren.

Auch für Studium und Forschung selbst ist das zuletzt Angeführte ein wichtiger Fingerzeig. Was sich modisch den Namen moderne Algebra anmaasst, ist noch schlechter und impotenter, als die Reactionen, die sich als moderne Geometrie ausgeben. Verschnörkelungen alter Dinge mit Namenerfindungen, wie Determinanten, oder mit schlechten Namenvertauschungen, wie Substitutionen anstatt Permutationen, nebst ebenso nutzlosem als unschönem Hin- und Herwürfeln, Ausspinnen und Kramen, — das sind die Grossthaten der privilegirten Hauptmacher gewesen, welche zusammen die bête règnante vorstellten. Ueber die auf diese Weise verdorbene Algebra, die auch schon in unserer andern Anleitung besprochen wurde, ist nach dem Vorangehenden kein weiteres Wort nöthig. Die Geschichte der gediegenen und ernsthaften Algebra hat nach Galois' Tode im Hauptproblem ein

halbes Jahrhundert stillgestanden, und selbst in Nebendingen ist nur äusserst wenig Bleibendes zum Vorschein gekommen. Wohl aber hat das Gehaben inzwischen und auch die Beschaffenheit der Compilationen, wie beispielsweise eines noch 1880 zum zweiten Mal in deutscher Uebersetzung gedruckten Buchs über höhere Algebra von Serret das gesunkene Niveau der Zustände bestätigt. So ist die Serretsche Darstellung voll von den modischen Auswüchsen, Verzerrungen und Verdunkelungen, aber arm an klarem Verständniss und an Fähigkeit auch nur zu klarer und einfacher Reproduction der bessern Leistungen, so dass beispielsweise nicht leicht Jemand daraus die Auffindung des Galoisschen Satzes begreifen wird, der sie nicht schon kennt oder verzerrte Wiedergaben selbst zurechtzurücken und zu ergänzen vermag. Trotzdem haben solche Compilationen für Mancherlei wenigstens nahezu den Werth eines Lexikon, wenn auch keineswegs eines guten.

11. Was vorher im besondern Hinblick auf die höhere Algebra von den Zuständen gesagt wurde, sollte natürlich auch ganz im Allgemeinen für die Mathematik überhaupt gelten; denn im abstracteren Gebiet und in der zugehörigen Zuspitzung des Verständnisses liegt naturgemäss die höchstinstanzliche Entscheidung, und wo diese durch äussere Herrschaft privilegirter Betise verfälscht wird, kann sich in oder aus den niedriger belegenen Bereichen auch nicht viel Vernünftiges und Freies regen, geschweige zu durchgreifendem Einfluss erheben. So würde beispielsweise Poncelet, auch wenn er zu einer zureichenden Aufraffung hätte gelangen können, vermöge der natürlichen Schwäche seines wesentlich geometrischen Standpunkts nicht im Stande gewesen sein, gegen die Misere, von der er ein Stückchen wirklich durchschaute, etwas Erhebliches auszurichten. Er hat sich auf einige Spöttereien beschränken müssen, die meist zutrafen, und die Angesichts der autoritativ geknebelten Kritik und Wissenschaftsfreiheit immerhin dankenswerth gewesen sind.

Durch hemmende Beschränktheit, verbunden mit etwas Kleinigkeitsfähigkeit und durch Hinterlassung eines scholastischen Drucks auf dem freien, zum Bessern strebenden Aufschwung der Wissenschaft hat sich besonders jener Göttinger Professor Gauss ausgezeichnet, von dem wir des Gegenstandes wegen in dieser Schrift nicht umhin gekonnt haben, einige böotische Stückchen zu berühren. Einiges Wesentliche zu seiner allgemeinen Charakteristik findet man bei Erläuterung der Contraste in der

Schrift über Robert Mayer, die überhaupt zu einer Kennzeichnung des heutigen Gelehrtenthums werden musste. Für Studium und Forschung wäre eine hier weiter eingehende Orientirung speciell über die mathematischen Zustände sicherlich von äusserem und innerem Nutzen. Indessen ist der Gegenstand in seinen Grundzügen von uns wohl hinreichend der Würdigung offengestellt, und bietet, sobald man in heutige oder jüngste Einzelheiten eingehen will, meist nur so kleinliche und widerliche Erscheinungen dar, dass man ihm lieber nur aus gehöriger Entfernung einen flüchtigen Blick zuwirft, anstatt sich die ästhetische Unannehmlichkeit der Einnahme eines förmlichen Augenscheins aufzuerlegen. Die kritische Gerechtigkeit bleibt darum doch nicht aus, wenn sie sich auch nicht in alle Winkel und Höhlen begiebt.

Es sei daher nur im Ganzen darauf hingewiesen, dass die verdorbenen Zustände in ihrer jüngsten Hochgradigkeit auf der Verbindung von zwei schädigenden Ursachen beruhen, von denen schon eine einzelne hinreichen würde, in ihrem Herrschaftsbereich die besten Vergangenheitsüberlieferungen zu unterdrücken und die edelsten Zukunftskeime zu ersticken. An erster Stelle sind es die verfallenden zünftlerischen Zustände der Universitäten, nebst der zugehörigen Beschaffenheit der Akademien, was eine Gelehrtenzucht mitsichbringt, deren Zuchtwahlprincip die Auslese der geringern Fähigkeiten, aber grössern Unterthänigkeiten begünstigt. Hiezu gesellt sich der schon seit dem Mittelalter fortwirkende Sachverhalt, demzufolge sich die hier fraglichen gelehrten Berufe aus den am wenigsten an Freiheit der That und des Gedankens gewöhnten Ständen und Volksclassen recrutiren. Die zugleich gefügigsten und bornirtesten, ja gradezu knechtischen und verdummten Bevölkerungselemente und Berufsstände liefern aus ihren Familien nicht wenig von der Candidatenschaft zu den gelehrten Stellungen, und es sind nicht etwa blos die Theologen, sondern eben auch die Mathematiker, die nach dieser Herkunft und Züchtung aussehen. In Vereinigung mit den in allen Ländern verkommenen Universitätszuständen, die aus ihrer eignen Mitte noch Schlechteres propagiren, muss die Nachzucht je länger desto mehr eine intellectuell und moralisch defecte und arge werden.

Dringen in die so qualificirten Brutstätten, wie dies neuerdings in steigendem Maass geschehen, noch gar viele Juden ein, die ja immer im Bereich der Corruption zu hausen und zu fischen

lieben, so wird durch diese Hebraisirung die Pflege der Mathematik vollends ruinirt. Diese zweite Ursache der Schädigung ist zwar nur eine secundäre, aber darum nicht zu unterschätzen; denn die Hebräer, wesentlich ohne Anlage zum Schaffen und Produciren, ja nicht einmal mit zureichenden Fähigkeiten zum unverzerrten Nachahmen begabt, drängen sich zu der Mathematik als zu einem Markte, um mit der dortigen Waare und den zugehörigen Amtspatenten Geschäfte zu machen. Sie verstehen weiter nichts, als mit Allem Handel zu treiben, und auch der Handel geht ihnen nur da einigermaassen von der Hand, wo ordinäres Urtheil dazu ausreicht. Wo aber, wie bei dem Vertrieb von Wissensartikeln, feinere Kritik nöthig wäre, da hapert es bei den aus dem Judenstamm zugelaufenen Gelehrten, und man sieht grade sie auf allerlei Waare hineingerathen, die noch weniger reellen Werth hat, als die alten Kleider, um die ihre nicht auf Gelehrsamkeit zugerichteten Gebrüder sich von Haus zu Haus bemühen.

Das Niedrigere und Schlechtere passt mehr zu der Natur der Juden, und heimelt ihre beschränkte Denkweise mehr an, als das Hohe und Vorzügliche. Aus diesem Grunde wird man auch finden, dass sie grade die grössten und edelsten Erscheinungen, wie einen Lagrange, bemängeln, ja beschnoddern und ihr Bebrüten fremder Eier dreist für die durch sie erst gelungene Hauptsache ausgeben. So machte es jener Jacobi, und seitdem es seinen Leuten gelungen ist, ihn je länger desto mehr fälschlich als einen Mathematiker ersten Ranges aufzuspielen, ist die Hebräerschaft in ganzen Schaaren in die wurmstichigen Behausungen der Mathematik eingerückt. Sie hat in den europäischen Akademiesitzen und universitären Professorgestellen ihre Leute, gängelt die Zeitschriften, hat ihre internationalen Durchstechereien in Angelegenheiten der Akademien und beispielsweise der Preisaufgaben, legt sich in den Examinaturstellungen breit aus, nöthigt auserwählt zum Studiren der Judenmathematiker und macht den stark andringenden Judencandidaten das Gelangen zu den Lehrstellen aller Schulen auserwählt bequem. Sie unterhält und begünstigt überhaupt allerlei Schmutz und Schwindel, so dass unter ihren Fingern die Physionomie der Wissenschaft wirklich eine hässliche und das Gewand ein sichtlich schmieriges geworden ist. Vom Handelseinmaleins her sind die Hebräer ein bischen Rechenknechte und hieraufhin trompeten sie sich mit

ihrer mehr als dummdreisten, nämlich dummfrechen Reclame als zur Mathematik ganz vorzüglich beanlagt aus, während nicht blos ihre alte Stammesgeschichte, sondern auch alle ihre neuern Entreprisen das Gegentheil lehren. Hieraus erklärt sich aber auch, dass sie mit ihrer Unfähigkeit sich wahlverwandt fast immer das Verkehrteste auserwählen und, unter übrigens gleichen Umständen eher als Angehörige besserer Nationalitäten, in glitzernde und gleissende Ungereimtheiten übertägiger Autoritätchen hineinfliegen.

Bezüglich der Zustände haben wir hiemit auf die elendesten Missgestaltungen hingewiesen, und der Studirende kann sich demgemäss vor Zeitverderb hüten, der selbständige Forscher aber auch positiv besser orientiren, indem er, soweit er überhaupt das Geschehene als Leitfaden mitbenützt, den Forschungsthaten der zugleich gediegenen und hochbeanlagten Charaktere nachzugehen vermag, ohne allzuviel täuschenden Ablenkungen oder gradezu Betrügereien ausgesetzt zu bleiben. Mit einiger Anatomie der Gelehrtenwirthschaft, nebst Kenntniss der in den Zunftleichnamen überhandnehmenden Parasitenrace, wird der Forscher über Manches rasch hinwegkommen, was ihn sonst aufgehalten hätte. Er wird Beschränktheiten oder Betrügereien vermuthen, wo er sonst in allzu grosser Gutgläubigkeit Fähiges und Ehrliches vorausgesetzt hätte und sich mit den entsprechenden Sächelchen bei dieser Hypothese lange nicht würde haben abfinden können. Ist man aber einmal einigen Fällen angesehener Dummheit und angesehenen Betruges bei den Häuptlingen auf den Grund gekommen, so steht dem freien Aufschwung und Fortschritt des Gedankens nichts mehr im Wege. Die Bahn ist alsdann rein gefegt und der leitende Ausblick auf das Bessere unbehindert.

Unter letzterer Voraussetzung treten auch die wirklich grossen Ueberlieferungen erst in ein volleres Licht. Die allerbeste Würdigung wird man ihnen aber zu Theil werden lassen, wenn man bedenkt, wodurch sie nicht blos nachträglich, sondern schon von vornherein, ja theilweise an sich selbst beschattet wurden. Der akademische Zusammenhang hat auch auf Gelehrte vom edelsten Typus schädlich gewirkt, und es ist nicht so einfach und natürlich geforscht, gedacht und geschrieben worden, wie hätte geschehen können, wenn die wissenschaftliche Luft reiner und gesunder gewesen wäre. So würde selbst Lagranges Thätigkeit eine noch weit bessere Gestalt erhalten haben, wenn er nicht bei allen seinen Abhandlungen in der akademischen Lage gewesen

wäre, blos einige Gelehrte als Publicum vor Augen zu haben. Seine eigentlichen und vorzüglichsten Lehrschriften sind schon durch eine bessere Nothwendigkeit und Lage auf äussere revolutionäre Veranlassung hin entstanden, würden aber ebenfalls innerlich und äusserlich noch zweckmässiger haben ausfallen können, wenn auch eine zureichende geistige Revolution in den Zuständen des Gelehrtenreichs eine natürlichere Ordnung und bessere Sitte angebahnt gehabt hätte. Man leistet den grossen Erscheinungen keine guten Dienste, wenn man an ihnen auch das gut heisst, was nicht ihren eigensten Gehalt, sondern die Schwächen ausmacht, in die sie von den Verhältnissen gebannt blieben. Man trenne also von Lagrange den Genossen der Akademiker und man wird Einiges herausschälen, was uneingeschränkt in alle weitere Wissenschaft fortwirken und von einem edlen Typus hochbelegener Denkkraft Zeugniss geben mag.

Das in der natürlichsten Weise Theoretische wird sich auf die Dauer auch als das im höchsten Sinne Praktische erweisen müssen. Die ganze Mathematik kann als ein einziges grosses Problem gedacht werden, welches sich in Specialprobleme verzweigt und als letzten Beziehungsgegenstand die gesammte Wirklichkeit der Dinge und Verhältnisse auch da hat, wo es sich auf einer abstracten Stufe nur auf die abstracten Möglichkeiten allgemeiner Quantitätsgedanken bezieht. Im Bereiche der reinen Mathematik ist die Gleichungsfrage bisher das oberste Problem geworden und geblieben. Die bisherige Gestalt dieses Problems stand aber in Widerspruch mit der unmittelbar praktischen Verwerthbarkeit seiner Ergebnisse; sogar bis einschliesslich zum dritten Grade hinunter löst man die höheren Gleichungen thatsächlich bequemer durch versuchsmässige Annäherungen. Ueberdies war die Beantwortung dieses Problems, vor unsern Vereinfachungen und Ergänzungen, noch ziemlich verwickelt, schwer controlirbar und unzugänglich, so dass auch, wenn man die Angelegenheit nach dem Maasse der Geistesbefriedigung schätzt, die Freude am Erkennen dabei nur eine getrübte und überdies nur äusserst Wenigen zugängliche werden konnte. Ausserdem ist von uns praktisch das Auskommen mit den beiden ersten Graden und das möglichste Vermeiden höherer irreducibler Gleichungen für die Sachmathematik sowie für die nächsten Interessen des Studiums und der Forschung als Norm hingestellt worden. Wie Beides, nämlich der hochspeculative Gesichtspunkt mit der Ver-

folgung eines im höchsten Sinne praktischen Ziels vereinbar sei, muss die vollkommenere Fassung und Weiterführung des Problems aller Mathematik lehren. Die Mathematik muss die allerspeculativste Praxis werden, — hiemit genügt sie ihrem höchsten wie ihrem niedersten Beruf. Hiemit geht sie aber auch stets echten Wirklichkeitsproblemen nach und lässt über der Thätigkeit am Rahmen, den sie als reine Mathematik vorstellt, nicht das Bild aus den Augen, welches in ihm zur Darstellung kommen soll.

Dagegen treiben die Mathematisten, die noch etwas Schlimmeres als Sophisten der Mathematik sind, nur eitles Spiel und betrügerischen Unfug. Wie es mit dieser Species grade heute im Bereiche der Physik stehe, dafür haben wir besonders im letzten Capitel unserer Neuen Grundgesetze zur Physik und Chemie Kennzeichnungen von Zuständen und Personen gegeben. Es wird also auch im Hinblick auf die Anwendungen der Mathematik der Studirende oder Forschende Anhaltspunkte genug vorfinden, um trügerische Strudel vermeiden und den rechten Curs einhalten zu können. Unsere Grundmittel aber, die wir selbst erst zu einigen Touren gebraucht haben, werden ihn nicht blos an verschiedenen Stellen sicherer ankern, sondern auch überall besser steuern lassen.

Schluss.

Das hier noch schliesslich in Bezug auf das vorstehende Werk zu Sagende ist gleich dem nachfolgenden Anhang allein dem auf dem Titel zuerst genannten der beiden Verfasser zuzuschreiben. In allem Früheren, ausgenommen die Vorrede, sind die Antheile beider vereinigt, sei es nun bezüglich des Gehalts oder auch der Ausarbeitung ganzer Partien. Doch möchte es bei dem besten Willen mir selbst schwer werden, immer zu unterscheiden. Ich habe mit meinem Sohn zusammengearbeitet und zwar in den verschiedensten Stadien der Thätigkeit. Dennoch werden aber kaum ein paar Verschiedenheiten des Stils oder kleinere Abweichungen der Methode die Doppelheit der Entstehung von Stoff und Buch Jedermann sichtbar machen. Feinere Kenner werden allerdings, falls es sie interessirt, in einigen Angelegenheiten Unterschiede der Bearbeitung und Ausführung herausfinden. Wenn nun aber in Folgendem wenigstens sachlich bezüglich einiger Hauptlehren gelegentlich persönliche Unterscheidungen gemacht werden, so gelten diese nur dem vorzugsweise entscheidenden Ursprung. Doch soll damit, dass ein Grundmittel oder eine Erfindung dem einen oder dem andern der beiden Verfasser zugeschrieben wird, nicht gesagt sein, dass in deren specieller Ausführung nicht oft auch beiderseitige Beiträge zusammengewirkt hätten.

Nach dieser vorgängigen Erklärung, die nicht blos der Wahrheit an und für sich gilt, sondern auch dem Orientirungsbedürfniss der in dieses Buch tiefer Eindringenden entgegenkommt, wird nun die folgende Schlussrechenschaft über unser wissenschaftliches Ganze bei Solchen, die daran ein redliches Interesse haben, weniger leicht zu Missverständniss führen. Im Gegentheil wird sie den

Ausblick erweitern und jeden echt Aufstrebenden noch mehr darauf führen können, in Verfolgung der gebrochenen Bahn für sich besondere, sei es theoretische, sei es praktische Ziele abzustecken.

Oft sind es nicht am wenigsten die Buchtitel, die gleich nicht gehörig verstanden und gewürdigt werden. Letzterer Mangel tritt namentlich da ein, wo die Bezeichnung nicht etwas längst Ausgeprägtes und dementsprechend gewohnheitsmässig mit einem geläufigen Sinn zu Verbindendes ist. Grundmittel ist zwar an sich ein klares Wort, aber als Titelrubrik für einen Inbegriff mathematischer Gegenstände neu. In unserm Sinn besagt es etwas erheblich Anderes als Elemente. Letztere sind die Grundbestandtheile einer Wissenschaft und zwar, wenn umfassend verstanden, nicht blos ihrer niedern sondern auch ihrer höhern Bereiche. Unter den Elementen in diesem weitern Sinne werden sich auch Grundmittel finden; aber die Eigenart der letzteren besteht darin, dass sie speciell als solche Einsichten gedacht werden, mit denen etwas auszurichten, d. h. ein wissenschaftlicher Zweck zu erreichen ist. Hienach sind sie eine Art Werkzeuge, und in der That hat man z. B. allemal, wo früher nicht vorhandene Rechnungshülfen von allgemein methodischer Bedeutung gewonnen werden, von dem Ansatz neuer Organe an die Analysis zu reden. So war die in abstracter Weise wohl zuerst von Fermat aufgestellte Berechnungsart für Maxima und Minima, d. h. die wesentliche Grundlage der später nur algorithmisch specialisirten Fluxionen- und Differentialrechnung ein neues Grundmittel von sehr grosser Tragweite. Etwas enger, aber doch noch immer recht bedeutend war das von Lagrange erfundene, welches Variationsrechnung heisst. Zu beiden grossen Wendungen waren aber in einem gewissen Sinne schon vorher Materialien vorhanden, so dass es sich nur um einen neuen Typus von Operationen handelte, die sich, ausgenommen eben die Typusform selbst, aus bereits verfügbaren Elementen zusammensetzten. In dem Typuskeim liegt aber auch grade der Ursprung des Neuen und der hiezu gehörigen Fortwirkungen.

Mit den angeführten geschichtlichen Beispielen dürfte der Sinn von Grundmitteln einigermaassen veranschaulicht und zugleich vor der Verwechselung mit dem im gemeinen Sinne Elementaren gesichert sein. Jedoch auch das höher Elementare trifft, wie gesagt, nicht damit zusammen; denn es braucht kein

Grundmittel in der Bedeutung eines Instruments zu sein, und umgekehrt wird ein für ein bestimmtes Zweckbereich hergestelltes Grundmittel nicht immer elementar einfach sein können. Absolute Grundmittel werden dies allerdings sein. Man wird von ihnen sagen können, sie seien letzte Mittel, indem man das Wort letzte ähnlich versteht, wie wenn man von letzten Gründen spricht. Dagegen giebt es auch relative Grundmittel, die in der Reihe der Entwicklungen irgendwo ansetzen und mehr oder weniger Bestandtheile in sich vereinigen können. Grade auch für diese Art fehlt es in dem vorstehenden Werk nicht an ausgiebigen Beispielen. Es wird jedoch immer zu bedenken sein, wie das jedesmal Wesentliche an einem Grundmittel, wie zusammengesetzt dessen Verfassung auch aussehen möge, an sich immer in einem einfachen Gedanken bestehen müsse.

Obwohl man, ohne in eine Uneigentlichkeit zu verfallen, von Mitteln einer Wissenschaft reden kann, so stimmt der Ausdruck Mittel doch besser zu der im Bereich des Wissens ausgeübten Kunst, als zum Wissen kurzweg. In der That wäre es auch ein Vortheil, in der Analysis von vornherein mehr die Kunst mit deren gewissermaassen unbeschränkter Tragweite als blos den jedesmaligen, gleichsam regungslosen Wissensniederschlag im Sinne zu behalten. Das Können ist hier, wie in allem lebendigen Wissen, wirklich die Hauptsache. Auch spricht man schon im Elementaren gemeiniglich nicht von einem Rechnungswissen, sondern von einer Rechenkunst. Analysis, Algebra und Functionsrechnung sind in erster Linie Künste, von denen gewisse Dinge geleistet werden, und erst in zweiter Linie Inventarisirungen von Wissen, welches nur zum Theil erheblich und lebendig ist, zum Theil aber gleichgültig bleibt, ja bisweilen wirklich nur eine todte Masse ist. Betont man nun die Kunst, also im eignen Bereich des Wissens die zweckdienliche Thätigkeit, so wird man sich vor einer allzu unlebendigen Auffassung des Gegenstandes bewahren. Dann aber erhält auch der Ausdruck Grundmittel seine volle Bedeutung. Ja man könnte sich aus diesem Gesichtspunkt die alten Grundmittel der Mathematik als ein Ganzes entwerfen, welches einen etwas anderen und bestimmteren Sinn haben würde, als kurzweg ein System der Elemente. Jedoch wollen wir diesen Unterschied hier nicht verfolgen. Wer den leitenden Gedanken erfasst, wird dies selber thun können. Bei unsern neuen Grundmitteln tritt der Sachverhalt ohnedies leichter zu

Tage, da hier zu dem bisher Vorhandenen etwas hinzugefügt ist, und zwar Mehreres handgreiflich von einer Art, an welcher der überwiegende Kunstcharakter, wenn einmal im Allgemeinen in Frage gebracht, in den einzelnen Fällen kaum Jemandem verborgen bleiben dürfte.

Sogar das, was in unserm Buch an erster Stelle steht, nämlich meine neue Vorzeichentheorie, findet sich sofort mit der eigentlichen Kunstseite der Wissenschaft verknüpft. Zunächst führt speciell meine Lehre vom analytischen Sinn des Imaginären zu einem neuen Bereich von Constructionsmöglichkeiten und überhaupt von Darstellungen sachlicher Verhältnisse mit Bestimmung ihrer Beziehungen durch imaginäre Rechnungszeichen. Im Geometrischen wird hier die Behandlung der dritten Dimension als ein kennzeichnendes Stück der fraglichen Kunst wohl als am handgreiflichsten markirt erscheinen. Nebenbei sei bemerkt, dass in unserm ganzen Werk die geometrischen Entwürfe einfach genug waren, um die Nebensetzung von Zeichnungen als unschöne Ueberflüssigkeit auszuschliessen. Der Geübte stellt sich das räumliche Zubehör nach unserer jedesmaligen Angabe leicht im Kopfe vor; der minder Geübte mag sich die Zeichnungen selbst ausführen. Schon Lagrange wurde von dem richtigen, gleichsam ästhetischen Urtheil geleitet, dass im Gebiet vorwaltend analytischer Methoden die paar zugehörigen geometrischen Grundbilder nicht auf dem Papier zu stehen haben, sondern in der räumlichen Phantasie genugsam vertreten sein können, ja für den hinreichend Vorbereiteten es sein sollen. Ueberdies helfen bei drei Dimensionen die ebenen Figuren unmittelbar gar wenig, und wer sich nicht in der Vorstellung, beispielsweise mit der Kugel und den zugehörigen Hyperboloiden, unter Zuhülfenahme geschickter Bewegungserzeugungen des Gebildes, klar zurechtfinden kann, muss sich auf diese Fertigkeiten der räumlichen Phantasie sozusagen erst einschulen, ja bei besonderer Unentwickeltheit oder Schwerfälligkeit der betreffenden Fähigkeit vielleicht selbst körperliche Modelle nicht verschmähen. Doch dies nur zur nebensächlichen Rechtfertigung unserer betreffenden Grundsätze. Diejenige Kunst, um die es sich in unsern Darlegungen handelt, hat mit der geometrischen Construction und überhaupt dem specifischen Gehalt des Sachlichen in erster Linie nichts zu schaffen. Sie bezieht sich vielmehr wesentlich auf die Gestaltung der Rechnungsbeziehungen und namentlich auf die Wege, durch welche neue

Rechnungsvermittlungen repräsentirt werden, aus denen die Constructionen oder sonstigen sachlichen Verhältnisse ihren Sinn erhalten.

Den überall am meisten sichtbaren Leitfaden und zugleich das fundamentalste Kunstmittel bildet meine Werthigkeitsrechnung. Sie ist in ihrem ersten Ausgangspunkte einfach, verzweigt sich aber nach allen Richtungen. Eine ihrer Hauptanwendungen ist die Gleichungsspaltung. Ohne die Werthigkeitsrechnung wäre aber auch meine Methode der Wurzelelemente nicht entstanden. Wenn nun die Werthigkeitsrechnung ein neues Grundmittel ist, so liefert der von meinem Sohn für Beweiszwecke erfundene Gebrauch der allgemeinen Functionsentwicklungsreihe, der sie auch im Falle der Divergenz verwerthbar macht, das Beispiel eines analytischen Kunstmittels überhaupt und zwar eines nicht wenig durchgreifenden. Auf der Grundlage derartiger sicherer Operationen konnte der Handhaber derselben einen Bau sich erheben lassen, auf dessen Höhe namentlich eine umfassende Wahrheit sichtbar wird, von der man bisher nur das auf Gleichungswurzeln beschränkte Stückchen einigermaassen kannte und leidlich zureichend, wenn auch sehr umständlich, bewiesen hatte. Die Unmöglichkeit von Ultraimaginaritäten ist nämlich durch die neuen allgemeinen Wendungen und Beweismittel nunmehr für alle functionellen Operationen, also einschliesslich aller erdenkbaren Transcendenzen, erkannt und dargethan worden. Ueberhaupt sind neue Ausgangspunkte für eine universelle Functionenlehre gewonnen, und jener Satz ist in Beziehung auf die Festigung des Grund und Bodens sicherlich wohl kein geringfügiger.

Der Würde der in diesem Buch vertretenen Sache entspräche es nicht, etwa eine Art Aufzählung des Einzelnen herzusetzen. Nicht einmal für die entscheidenden Vermehrungen des Wissens kommt uns Derartiges in den Sinn, geschweige für die Beiträge zweiter Ordnung. Wohl aber ist die Fassung des Titels und der zugehörige Charakter des Buchgehalts durch Hinweisung auf kennzeichnende Hauptfälle und Hauptbeispiele vor unwillkürlichen Missverständnissen zu wahren; gegen absichtliche Missdeutungen und Verkennungen giebt es selbstverständlich keine Vorbeugung. Um nun in jener Hinsicht noch einen gleich in die Augen fallenden Punkt zu erledigen, so bezieht sich der Ausdruck Erfindungen im Titel nicht blos als eine Art zusätzlicher Erklärung auf die Grund- und Kunstmittel selbst, sondern vertritt

auch selbständig solche Wissensvermehrungen, die nicht den Charakter von Mitteln, sondern von letzten Ergebnissen und speciellsten Einsichtsgewinnungen haben. Dahin gehört beispielsweise die Fortführung der Theorie der höhern Gleichungen über denjenigen Stand hinaus, auf den sie Abel und Galois ein halbes Jahrhundert zuvor gebracht hatten, und auf dem sie bisher verblieben war. Eine wesentliche und bisher nicht einmal bemerkte Lücke im Abelschen Unmöglichkeitsbeweis bezüglich der algebraischen Lösung überviergradiger Gleichungen ist ausgefüllt und hiemit nicht nur eine strengere, sondern auch weit einfachere und übersichtlichere Nachweisung der betreffenden Unmöglichkeit gegeben worden. Nach der positiven Seite hin ist die Theorie der Gleichungen zusammengesetzter Grade im entscheidenden Theil eine Neuschöpfung; denn Abel und Galois, die überdies jung gestorben, hatten keine sichern und vollständigen Formulirungen, und wo sie etwas hatten, fehlten ihnen noch die Beweise. Hier hat nun ganz besonders der jugendliche Mitverfasser dieses Buchs das Seinige gethan, um dieses intricate Gebiet der Algebra der zusammengesetzten Grade in den noch übrigen wesentlichen Anforderungen zu erledigen. Der Galoissche Satz für die Primgrade war bisher der einzig verfügbare Kern; nunmehr sind entsprechende Fundamentalsätze für die zusammengesetzten Grade hinzugekommen. Meine Methode der kritischen Functionen hat zugleich dem Ganzen eine leichtere Auffassbarkeit und Uebersichtlichkeit gegeben. Berücksichtigt man noch die Vereinfachungen der ganzen Gleichungstheorie durch den Werthigkeitsgesichtspunkt und durch die Methode der Wurzelelemente, so kann nur die, freilich unvermeidliche, Böswilligkeit leugnen, dass nicht blos die Grenzen des bisherigen Wissens hinausgerückt, sondern auch die sonst nur mit vieler Mühe und daher nur für Wenige nahbaren Gegenstände jetzt für Viele zugänglich geworden sind.

Ueberhaupt hat unser Werk neben allen übrigen Zwecken auch immer und von vornherein das Ziel im Auge gehabt, durch Klärung und Vertiefung des Inhalts der Mathematik dem Namen dieser Wissenschaft, der von der Lehrbarkeit herstammt, in einem erheblich höheren Grade zu entsprechen als bisher geschehen. In den verschiedensten Capiteln hat man dafür die Beläge. Es war aber nicht wohl thunlich, ausser in ganz besondern Fällen, diese Eigenschaft unserer Neu- oder Umgestaltungen im Einzelnen ausdrücklich hervorzuheben. Meine Anleitung zum Lernen

und Lehren hat allerdings auch in jener Richtung allgemeine Gesichtspunkte bemerklich gemacht. Indessen ist das Breitermachen derjenigen Schicht des Publicums, die sich gründlich und unbeschränkt mit dem Besten der Mathematik vertraut machen kann, doch eine Angelegenheit für sich. Das gewöhnliche Lernen und Lehren hängt zum grössten Theil von äussern Vorschriften und Einrichtungen ab. Auf letztere haben wir nun zwar auch Rücksicht genommen, uns hiedurch aber niemals in der Verfolgung eines unabhängigen Zieles beengen lassen. Wir streben für die Mathematik nach einer Sicherheit, Klarheit und Einfachheit, die für diese Wissenschaft ein so breites Publicum ermöglicht, wie sie es in der Welt noch nie gehabt hat. Wir sagen nicht, wir hätten uns in dieser Richtung überall genuggethan; es bleiben noch in einigen Richtungen grössere Vereinfachungen zu wünschen. Indessen sind wir überzeugt, den entscheidenden Grund gelegt und ausserdem mehreren specialistischen, sonst sehr verwickelten Fachtheorien eine weit lehrbarere Gestalt gegeben zu haben. Auch ist es hiebei nicht gleichgültig, dass wir im Inhalt unseres Werks auf umfassende Systematik gehalten haben, so dass sogar die Anleitung mit dem vorangehenden Buchinhalt eng verwandt und verknüpft ist. Ohne das vorangehende Buch hätte die Anleitung, wie sie hier gestaltet ist, keine breite Basis und in einigen Punkten kaum einen Sinn, wenigstens keinen vollständig verständlichen. So aber bezieht sie sich thatsächlich auf die für sie wesentlichen Grundlegungen des Buchs, und umgekehrt erhalten manche Eigenschaften des Buchinhalts durch die Anleitung eine vollere, für die Bethätigung des Dargestellten wichtige Beleuchtung.

Nicht aber blos um die Verbreitungsfähigkeit der Mathematik zu steigern, waren Vertiefung, Vereinfachung, Vermehrung und Kritik des Wissens nothwendig. Die Grundsätze der mathematischen Reform, die sich durch das ganze Buch in alle Hauptlehren eingeschlossen finden, sind vor allen andern Rücksichten aus dem Triebe nach Wahrheit, Ordnung und Schönheit entsprungen. In diesem Sinne wollen sie in erster Linie aufgefasst sein, und versteht man es, sie in dieser Weise zu nehmen, so ergiebt sich der Weg zu allem sonst Nützlichen und zu den Interessen zweiter Ordnung fast von selbst und jedenfalls in der besten Weise. Jede neu begründete oder umgestaltete Lehre ist ein Wegweiser zur mathematischen Reform, und es wird sich

demgemäss kein Capitel finden, in welchem nicht wenigstens formell Derartiges vertreten wäre. Alles Reformatorische setzt Zweierlei voraus, nämlich nicht blos Kritik, sondern auch positiv umschaffende Kräfte. Was nun die mathematische Kritik betrifft, so hat sie bisher als selbständig bewusste und abgesonderte Wissenschaft, die mit radicalen Mitteln und weittragenden Gesichtspunkten operirte, so gut wie gefehlt. Auch ist es für den bisherigen Theil des 19. Jahrhunderts nicht grade eine Ehre, durch die in ihm angehäuften Thorheiten und Ausschweifungen der Verworrenheit dem verneinenden, ja spottenden Bestandtheil der Kritik so viele Nothwendigkeiten der Bethätigung auferlegt zu haben. Eine Ausgleichung für diese Unehre wird aber, wenn die Erinnerungen an das Jahrhundert auch zur gemeinen Beurtheilung reif geworden sein werden, darin zu finden sein, dass in ihm der Widerstand und die das Bessere schaffenden Kräfte nicht gänzlich gefehlt haben. Was wir in der, herrschenden Verkehrtheiten entgegengesetzten Richtung zugleich schaffend und kritisch unternommen haben, und dem möglicherweise auch schon im kurzen Rest des Jahrhunderts eine durchgreifende Thätigkeit Anderer folgen könnte, wird die Verkommenheitsseiten der mathematischen Zustände aufwiegen.

Das Gehaben der letzten Generationen ist freilich nur ein mahnendes Anzeichen der Kahlheit und Abgeschmacktheit, wie Derartiges in veränderter Façon sich wohl öfter in der Geschichte wiederholen mag. Nachträglich, wenn längere Zeiträume verstrichen, kommen solche elende Episoden meist nur als Lücken in Anschlag, d. h. man führt das benachbarte Vorzügliche an und lässt übrigens den Zeitraum leer. Eine bessere Auffassung wird aber zur positiven, wenn auch nur summarischen Kennzeichnung übergehen; denn das Grassiren und Dominiren von Abgeschmacktheiten und Ungeheuerlichkeiten in einer Zeitperiode, wie namentlich im mittleren Lauf des 19. Jahrhunderts, hat bestimmte Ursachen und ist geschichtlich nichts ganz Gleichgültiges. Dennoch ist dieser Zustand für uns nur ein Nebengesichtspunkt gewesen, der sich aber der Zeitnähe wegen um so mehr aufdrängen und zur abhelfenden Gegenwirkung um so lebhafter spornen musste. Der Compass aber, welcher den tieferen Gründen der mathematischen Reform ihre Richtung ertheilte, leitete in einem weit umfassenderen geschichtlichen Element von ganz anderer Würdigkeit. Die ganze Entwicklung seit den neuern Jahrhunderten, und zwar das

Beste, was von ihr her eine nachhaltige Bedeutung gewonnen oder noch zu gewärtigen hat, wurde das Feld, in welchem wir dem Abweichenden oder dem Mangelnden gegenüber unsere reformirenden Einsichten und Grundsätze sich bethätigen liessen. Die Ausläufer dieses Besten, die sich vereinzelt noch einige Jahrzehnte in das 19. Jahrhundert hinein erstreckt haben, sind von uns mit gebührender Vorliebe berücksichtigt worden. Allein welcher Zustand auch hier bald eingetreten war, davon ist die von uns als angeblich und fälschlich aufgedeckte Berichtigung Lagranges durch Poinsot ein Beispiel. Jedoch auch wenn wir auf die besten Zeiten und Erscheinungen zurückgreifen, so sind auch von daher gewisse Abwege und Irrthümer ausgegangen, die wir durch bessere Wege und durch Wahrheiten zu ersetzen hatten. Unsere Reform bezieht sich daher auf verschiedene Theile des ja übrigens zuverlässigen Fundaments der neuern Mathematik selbst und nicht etwa blos auf einen neusten entarteten Zustand.

Wahrhafte Theilnehmer an dem tiefern und fortwirkenden Inhalt dieses Werks, also auch an der entsprechenden Reform der Mathematik, sind auf den verschiedensten Stufen des Wissens denkbar. Wenn nur diejenigen betheiligt sein könnten, die mit den entlegensten und speciellsten Ausläufern oder Verästelungen hantiren, so wäre dies übel. Zunächst wäre die Wahrscheinlichkeit gering, dass sich unter dieser beschränkten Zahl ausnahmsweise auch solche fänden, die sich hinreichend über dem Handwerk und der Routine oder gar unabhängig genug von Coterieeinflüssen zu halten vermöchten, um in die eröffnete Bahn einlenken zu können. Der üble Wille soll hiebei noch gar nicht veranschlagt sein; von ihm ist wohl Aneignung einzelner handgreiflicher Leistungen, aber freilich nur Aneignung im Sinn des gelehrten Diebstahls zu gewärtigen. Allein auch abgesehen von letzterer, fast unvermeidlich scheinender Fortwirkungsaussicht lässt sich auch im Allgemeinen annehmen, dass die festeste Gründung einer Sache nicht grade vorzugsweise in denjenigen Theilen zu bestehen habe, über die zunächst nur eine kleinere Zahl urtheilen kann. So werden z. B. die einfachen neuen Beweise und ausgedehnten Verallgemeinerungen, welche der Mitverfasser von der Gleichgültigkeit der Integrationswege und von der unter allen Voraussetzungen vorhandenen Existenz von Gleichungswurzeln gegeben und wodurch er die bisherigen entsprechenden Sätze zu Specialfällen seiner erweiterten Theorien herabgesetzt hat, nicht

auf jeglicher Stufe der mathematischen Bildung zureichend zu würdigen sein. Wie wichtig nun aber an sich diese Wendungen und besonders deren rein analytische, von der graphischen Krücke unabhängige Eigenschaften sind, und wie innig sie auch mit den leitenden Principien zusammenhängen, so ist doch glücklicherweise ihr Verständniss oder das ähnlicher Lehren keine Grenze, diesseits deren es nicht auch noch Verbesserungen aus unserm Buch anzunehmen und geltend zu machen gäbe.

Ja wir rechnen sogar mit denjenigen Chancen, die in der breiten Basis des mathematischen Publicums liegen, als mit den absehbar günstigsten. Unser Buch, so sehr es sich auch im Ueberbau mit den höchstbelegenen Punkten zu schaffen gemacht hat, kann doch in den Fundamenten grade denen Frucht tragen, deren Interesse vorzugsweise an dem gewöhnlichen Lern- und Lehrgebiet und sozusagen an der bisherigen Bildungsmathematik haftet. Selbst die unterste Schicht des Elementaren kann, wenn sie sich etwas ernster nimmt, von den verschiedensten Bereichen unserer Grundlegung her Klärung, Festigung und Erweiterung erfahren. Von sehr verschiedenen Stufen aus führen Wege in und durch unser Buch, falls man nur versteht, jedesmal von dem abzusehen und das zur Seite zu lassen, was über den durch die Umstände begrenzten Zweck hinausliegt. Beispielsweise ist die allererste Grundlage der Werthigkeitsrechnung, nämlich soweit sie sich nur auf Zweiwerthigkeiten bezieht, gleichsam ein neues Stück Abc der Analysis. Dieses Stück wird auch denen nützen, die in der Algebra bei den einfachsten Elementen stehenbleiben. Auf ähnlich einfache Weise lässt sich die Imaginärtheorie abgrenzen, und sogar deren Consequenz, meine Lehre von einem Imaginativen, erfordert kaum die Einlassung mit den einfachsten, ja theilweise trivialsten Transcendenten, um in entscheidenden geometrischen Constructionen solche sachliche Functionen des Imaginären kennen zu lehren, nach denen man bisher nicht einmal zu fragen vermocht hat. Doch ich will die Beispiele nicht häufen. Die meisten Capitel bieten neben ihrem sonstigen Inhalt auch Anknüpfungspunkte für das einfachere mathematische Bedürfen dar, und selbst solche in das Detail verzweigte Gestaltungen, wie die vom Mitverfasser umspannend und erschöpfend hergestellte Gesammttheorie der Wurzelform, haben auch Seiten und Züge von fundamentaler Einfachheit an sich. Sogar etwas von der neuen Theorie der allgemeinen Functionseigenschaften hat eine verhältnissmässig so

einfache Gestalt erhalten, dass es für Diejenigen, die sich mit bemessenen, wenn nur gediegenen Vorkenntnissen daran machen, mit einem nicht allzu grossen Zusatz von Vorbereitung ebenfalls zugänglich werden kann. Letzteres ist um so werthvoller, als die generelle Functionenlehre, unsern Nachweisungen gemäss, für die gesammte Mathematik die oberste Wissenschaft bildet.

Das Fundament und der Hochbau dazu entsprechen sich und weisen aufeinander hin, — dies ist natürlich und nothwendig. Allein in den Grundlagen kann sich Jemand bewegen und zurechtfinden, der sich nicht in die höhern Stockwerke begiebt. Das Umgekehrte ist aber in der Hauptsache nicht möglich. Man kann das Oberste wohl äusserlich besichtigen, ohne sich um den Unterbau zu kümmern; aber begreifen wird man es nicht, wenigstens nicht vollständig, wenn man nicht in die verschiedenen Theile und Einrichtungen des Fundaments eingeht. Man vergesse also nicht, dass es in erster Linie Grundmittel sind, was wir dargeboten haben, und dass die Emporführungen einiger neuer Pfeiler des Wissenschaftsgebäudes bis in die höchsten Spitzen mit einem besondern Maass gemessen sein wollen. Allein die richtige Handhabung dieses Maasses ist stets selten und kann selbst in längeren Zeiträumen erfahrungsgemäss nur auf Wenige zählen. Wohl aber kann, um in einem nicht blos mathematischen Bilde zu reden, die Function der Zeit eine etwas andere Gestalt erhalten und einen günstigeren Lauf nehmen, wenn es sich neben den Höhen zugleich um jenen Grund und Boden handelt, auf dem Alle zu hausen haben. Hier bleibt dann die Frage nur die, ob sie Letzteres übel oder gut, ob sie es in widerlegten Irrgängen oder im Bereich der vorgelegten Wahrheiten wollen.

Schriften von Dr. E. Dühring.

1. Philosophische:

†**De tempore, spatio, causalitate atque de analysis infinitesimalis logica.** Berlin 1861. 3 M.

†**Natürliche Dialektik,** neue logische Grundlegungen der Wissenschaft und Philosophie. Berlin 1865. 4 M.

Der Werth des Lebens, populär dargestellt. 3. Auflage. Leipzig 1881. Fues. 6 M.

Cursus der Philosophie als streng wissenschaftlicher Weltanschauung und Lebensgestaltung. Leipzig 1875. Heimanns Verlag. 9 M.

Logik und Wissenschaftstheorie. Leipzig 1878. Fues. 9 M.

Kritische Geschichte der Philosophie von ihren Anfängen bis zur Gegenwart. 3. Auflage. Leipzig 1878. Fues. 9 M

2. Volkswirthschaftliche und socialitäre:

Carey's Umwälzung der Volkswirthschaftslehre und Socialwissenschaft. 12 Briefe. München 1865. Merhoff. 2 M. 50 Pf.

†**Capital und Arbeit,** neue Antworten auf alte Fragen. Berlin 1865. 3 M. 50 Pf.

***Kritische Grundlegung der Volkswirthschaftslehre.** Berlin 1866. 8 M. 40 Pf.

Die Verkleinerer Carey's und die Krisis der Nationalökonomie, sechzehn Briefe. Breslau 1867. Trewendt. 3 M.

Kritische Geschichte der Nationalökonomie und des Socialismus. 3. Auflage. Leipzig 1879. Fues. 9 M.

Cursus der National- und Socialökonomie, einschliesslich der Hauptpunkte der Finanzpolitik. 2. Auflage. Leipzig 1876. Fues. 9 M.

3. Vermischte:

†**Die Schicksale meiner socialen Denkschrift für das Preussische Staatsministerium,** zugleich ein Beitrag zur Geschichte des Autorrechts und der Gesetzesanwendung. (1868.) Heimanns Verlag in Leipzig. 1 M.

Der Weg zur höheren Berufsbildung der Frauen und die Lehrweise der Universitäten. Leipzig 1877. Fues. 1 M. 60 Pf.

Die Judenfrage als Racen-, Sitten- und Culturfrage. Mit einer weltgeschichtlichen Antwort. 2. Auflage. Karlsruhe 1881. Reuther. 3 M.

Die Ueberschätzung Lessing's und dessen Anwaltschaft für die Juden. Karlsruhe 1881. Reuther. 1 M. 80 Pf.

Sache, Leben und Feinde. Als Hauptwerk u. Schlüssel zu seinen sämmtlichen Schriften. Mit seinem Bildniss. Karlsruhe 1882. Reuther. 8 M.

Der Ersatz der Religion durch Vollkommeneres und die Ausscheidung alles Judenthums durch den modernen Völkergeist. Karlsruhe 1883. Reuther. 4 M. 50 Pf.

4. Mathematische und naturwissenschaftliche:

Neue Grundgesetze zur rationellen Physik und Chemie. Erste Folge. Leipzig 1878. Fues. 3 M.

Robert Mayer der Galilei des neunzehnten Jahrhunderts. Eine Einführung in seine Leistungen und Schicksale. Mit seinem Portrait in Stahlstich. Chemnitz 1880. Schmeitzner. 4 M.

Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Von der philosophischen Facultät der Universität Göttingen mit dem ersten Preise der Beneke-Stiftung gekrönte Schrift. Zweite, theilweise umgearbeitete und mit einer Anleitung zum Studium der Mathematik vermehrte Auflage. Leipzig 1877. Fues. 9 M.

In dem Urtheil der Göttinger Universität, die den Namen des Verfassers nicht wusste, heisst es:

„Mit vollständigster und freiester Beherrschung der Sache und erstaunlicher Ausdehnung genauester literarischer Kenntniss sind nicht nur alle wesentlichen Punkte erörtert, sondern eine grosse Anzahl kleinerer Discussionen, welche die Facultät nicht für unerlässlich gehalten hätte, aber mit Dank anerkennt, da sie überall dem volleren Verständniss des Gegenstandes dienen, bezeugen zugleich die grosse Liebe und die Umsicht, mit welcher der Verfasser sich in seine Aufgabe vertieft hat. Dem ausserordentlichen so aufgehäuften Stoffe entspricht die Fähigkeit zu seiner Bewältigung. Durch feines Gefühl für klare Vertheilung der Massen ist es dem Verfasser gelungen, zugleich auf die ganze geistige Signatur der Zeitalter, auf den wissenschaftlichen Charakter der leitenden Persönlichkeiten und auf die fortschreitende Entwickelung der einzelnen Principien und Lehrsätze ganz das belehrende geschichtliche Licht fallen zu lassen, welches die Facultät vor allem gewünscht hatte. Die ursprünglichen Aufgaben, an deren Behandlung jedes neue Princip oder Theorem entstand, sind überall mit vollendeter Anschaulichkeit reproducirt und die allmälige Umformung, die jedes erfahren hat, durch alle Zwischenglieder sorgfältig verfolgt. Die Berührungen der mechanischen Gedanken mit der philosophischen Speculation sind nirgends vermieden; sie sind nicht nur in eigenen Abschnitten entwickelt, sondern der feine philosophische Instinct, der den Verfasser auch auf diesem Boden leitet, ist ebenso deutlich in einer grossen Anzahl aufklärender allgemeiner Bemerkungen sichtbar, welche an schicklichen Stellen in die Darstellung der mechanischen Untersuchungen verflochten sind. Den angenehmen Eindruck des Ganzen vollendet eine sehr einfache, aber an glücklichen Wendungen reiche Schreibart. Voll Befriedigung, sich als die Veranlasserin dieser schönen Leistung zu wissen, durch welche ihre Aufgabe vollständig gelöst und viele Nebenerwartungen übertroffen sind, zögert sie nicht, dem Verfasser den ersten Preis hierdurch öffentlich zuzuerkennen."

Für das mit einem * bezeichnete Buch ist die Verlagshandlung eingegangen und befinden sich die wenigen restirenden Exemplare bei dem Verfasser, Adresse Zehlendorf bei Berlin, von wo solche gegen vorgängige Einsendung des Betrages zu beziehen sind. — Die mit einem † bezeichneten Bücher sind vergriffen.

Bemerkung zum Schriftenverzeichniss
über die Plagiirung der neuen Grundgesetze zur Physik und Chemie.

Die im Verzeichniss aufgeführte Schrift „Neue Grundgesetze" etc. erschien im Mai 1878 und erhielt sofort durch den Buchhandel eine umfassende Verbreitung im Inlande und nach Verhältniss der Sprache auch im Auslande. Ueberdies waren schon vorher Prospecte derselben an zahlreiche Fachgelehrte, sowie an Akademien des In- und Auslandes versendet worden. In diesen Prospecten war insbesondere das von meinem Sohn Ulrich entdeckte und von ihm in der Schrift selbst mit einer vollständigen Theorie und praktischen Anwendungen ausgestattete Siedegesetz wörtlich formulirt. Die einzige Aufmerksamkeit jedoch, welche die Gelehrten dieser Schrift widmeten, bestand darin, dass sie dieselbe recht erfreulich kauften, sich aber, wie des Näheren nachher deutlich werden wird, auch nachträglich deren neuen Inhalt für sich, wie der Volksausdruck lautet, zu kaufen versuchten. Sie schwiegen Jahr und Tag über die Schrift in den Fachjournalen, gaben aber mündlich die Parole aus, es sei in der Schrift nichts Neues enthalten, das darin Enthaltene vielmehr schon überall zu lesen, und ich hätte mich mit dieser Schrift ganz besonders blamirt. Dies war die eine Seite des liebenswürdigen Gelehrtenverhaltens, dessen allgemeine moralische Signatur in früheren berühmten Fällen seit meiner Schrift über Robert Mayer auch dem weiteren Publicum eindringlicher bekannt und durchschaubar geworden ist. Die andere, noch unwürdigere Seite, die das Zubehör hiezu bildete, zeigte sich bald und zwar zuerst in Deutschland, dann aber auch im Auslande. Als Beispiele führe ich nur folgende Fälle an, weil sie sich weniger auf das von mir Herrührende, als vielmehr speciell auf das ebenso einfache als wichtige, darum aber auch handgreiflich verständlichere und zu handgreiflicher Aneignung äusserst bequeme Gesetz meines Sohnes über die correspondirenden Siedetemperaturen beziehen. Ich für mein Theil bin an die edlen Manieren der Gelehrten, an gleichzeitige Verschweigung und Plünderung meiner Schriften durch sie, genugsam gewöhnt und hätte viel zu thun, wenn ich Derartiges im Einzelnen verfolgen wollte.

Zuerst ist ein Theil des Gesetzes der correspondirenden Siedetemperaturen seitens eines Professors Winkelmann durch Vermittlung eines Mitgliedes der Münchener Akademie, eines Professors von Jolly, als neue und angeblich Herrn Winkelmann gehörige Entdeckung Juni 1879 jener Akademie vorgelegt und in deren Abhandlungen in Gestalt eines Aufsatzes des Herrn Winkelmann veröffentlicht worden. Obenein ist die Aufnahme einer sachgemässen Reclamation, die mein Sohn an Herrn von Jolly eingesendet hat, von diesem Herrn verweigert worden. Schon kühner geworden, hat später Herr Winkelmann in einer Abhandlung der Wiedemannschen „Annalen der Physik" (Jahrgang 1880) sich wesentlich den Hauptinhalt des Gesetzes der correspondirenden Siedetemperaturen unter Umhüllung mit einer unerheblichen Abänderung angeeignet und diese Manipulation dadurch gekrönt, dass er zugleich das Gesetz dem Publicum gegenüber ostensibel als unwahr signalisirte. In diesem Fall gelang es meinem Sohn, wenigstens einen Artikel zum Schutz seines Gesetzes in die Annalen eingerückt zu erhalten.

Das vollständige Gesetz auch ohne den Schein einer Abänderung ist im Februar 1880 der Pariser Akademie der Wissenschaften als die neue Entdeckung eines Herrn P. de Mondesir durch ein Mitglied dieser Akademie, den bekannten Chemiker H. Sainte-Claire Deville, vorgelegt worden, und ist der betreffende Artikel des Herrn de Mondesir auch damals in den „Comptes Rendus" erschienen. Alsdann wurde das Gesetz meines Sohnes in dem Incognito einer französischen Entdeckung in deutsche Fachzeitschriften übernommen, wogegen er zunächst im „Chemischen Centralblatt" (December 1880) reclamirte. Dieselbe Reclamation, nur in französischer Sprache, war von ihm dem betreffenden Secretär der französischen Akademie mit dem Ersuchen um Aufnahme in die „Comptes Rendus" zugesendet worden. Sie fand sich aber nur in wesentlicher Fälschung der

Worte und des Sinnes (ebenfalls December 1880) zum Abdruck gebracht, so dass mein Sohn für diese ihm untergeschobene Fassung nicht verantwortlich ist. Später haben sich zu den Genannten auch noch Andere gesellt, welche mit jenen und unter sich nunmehr über die Priorität der Aneignung markten mögen. So haben beispielsweise auch ein holländischer Professor Waals und ein preussischer Professor Clausius, unter verschiedenen aber schlecht verhüllenden Masken, in ihrer Manier das Gesetz als ihr eignes reproducirt. Bezeichnenderweise ist die verzerrte Reproduction des letztern Herrn frischweg auch schon collegialisch nachtreterisch in Lehrbücher aufgenommen worden, wie z. B. gehorsamst in den Nachtrag des Jaminschen Cursus der Physik (1883), welches Buch auch übrigens in seiner 3. Auflage durchgängig unsolider und unbehülflicher gerathen ist als in seiner ersten Bearbeitung durch den ursprünglichen Verfasser.

Die Thatsachen, aus denen mein Sohn das Gesetz erkannte, standen seit mehreren Jahrzehnten in Fülle Jedermann zur Verfügung; aber erst als seine Entdeckung veröffentlicht war, sprossten in den darauf folgenden Jahren allerorten die Nachentdeckungen hervor. Er selbst konnte es nicht eher finden, als geschehen; denn er ist erst, als schon die Thatsachen vorhanden waren, geboren und hat dieses Gesetz, welches von grosser physikalischer und chemischer Tragweite ist, in seinem 15. Lebensjahre aufgefunden. Wenn nun, nachdem er die fragliche sehr umfassende Wahrheit, um die sich 70 Jahre früher ein Dalton vergebens bemüht hatte, gesehen, auch andere ältere Leute, die schon Jahrzehnte vorher sie hätten sehen sollen, nun plötzlich sehen lernten, so ist dies wohl verständlich genug.

Es ist aber in derartigen Dingen oft noch mehr Komik, als schon der Rückimport deutscher Originalwaare aus dem Auslande in sich schliesst, wie er auch einst R. Mayer gegenüber prakticirt worden war. Es hat nämlich die Münchener Akademie in der ganzen Plagiatangelegenheit nicht blos die Palme der Priorität für sich, sondern offenbar auch den Apfel der höchsten Komik abgeschossen. Bei allem moralischen Ernst der Sache hat sie dennoch, wie die Leser der Gruppe meiner mathematisch naturwissenschaftlichen Schriften wissen, schon einmal den Humor rege gemacht. Die Akademie der alten Mönchestadt hatte nämlich einen Dr. G. Berthold mit der Abfassung einer Geschichte der Physik beauftragt und dieser nichts Besseres zu thun gewusst, als sich unbekannterweise an mich zu wenden, um dazu Disposition und Materialien von mir zu bekommen, die ich selbstverständlich nicht verabfolgt habe. So ist der Münchener Akademie das Schicksal erspart worden, auf jene Weise vom Vater zu zehren; indessen der Sohn ist, wie erwähnt, nicht ganz heil davongekommen. Jedoch auch er weiss sich gegen Anzehrungen zu wehren, und das Schicksal des zu wenig wehrhaften R. Mayer ist ihm ein zur Warnung leuchtendes Beispiel geworden. Auch bei diesem hatten die Thatsachen, auf Grund deren er seine neue grosse Wahrheit entdeckte, mehrere Jahrzehnte lang aller Welt zur Verfügung gestanden; aber erst als er sie 1842 veröffentlicht hatte, schossen in den nächsten Jahren im In- und Auslande eine ganze Anzahl Nachentdecker auf. Im Fall R. Mayers gesellte sich aber zu den Beraubungen noch ein besonderes Gelehrtenverbrechen, welches schlimmer war als das gegen Galilei verübte und in meiner Schrift über R. Mayer dem Publicum dargelegt worden ist. Diese Schrift hat ausser ihrem persönlichen Gegenstande überhaupt noch die allgemeinere Bedeutung, die tiefe moralische Verderbniss und intellectuelle Verkommenheit der gewerbsmässigen Gelehrtenclasse sichtbar zu machen und zu zeigen, wie diese Classe gegenwärtig eine ähnliche Rolle spielt, wie vor ihr ausschliesslich die Priester. Es ist daher kein Wunder, wenn der mit allen Mitteln betriebene und, wenn verübt, mit allen Mitteln aufrechterhaltene Ehrendiebstahl und andere verwandte saubere Stückchen in der Gelehrtenclasse mehr grassiren, als in der ungelehrten der gemeine Diebstahl und die sonstigen Gaunerstreiche.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

